УДК 517.938.5 + 519.514.17

О. А. Кадубовський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ НА ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ*

On closed oriented surfaces of the genus $g \geq 1$, we consider functions which possess only one saddle critical point in addition to local maxima and minima. We study the problem of the realization of such functions on surfaces and construct an invariant for the distinguishing of such functions. For surfaces of the genus $g = \dfrac{n-1}{2}$, where n is a prime number, we calculate the number of topologically nonequivalent functions with one maximum and one minimum.

Розглядаються функції на замкнених орієнтованих поверхнях роду $g \geq 1$, які окрім локальних максимумів і мінімумів мають лише одну критичну точку типу сідла. Досліджено питання про реалізацію таких функцій на поверхнях та побудовано інваріант, що їх розрізняє. Для поверхонь роду $g = \dfrac{n-1}{2}$, де n — просте число, підраховано число топологічно нееквівалентних функцій, які мають лише один максимум і один мінімум.

Вступ. Нехай $(N, \partial N)$ — гладка поверхня з краєм ∂N (∂N може бути порожнім). Позначимо через $C^\infty(N)$ простір нескінченно диференційовних функцій на N з краєм $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$, всі критичні точки яких ізольовані та лежать у внутрішності N, а на компонентах зв'язності краю $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ функції з $C^\infty(N)$ набувають однакових значень $a(b)$.

Відомо, що $C^\infty(N)$ є простором Фреше, на якому діє нескінченновимірна група Лі зі структурою многовиду Фреше $G_{\mathrm{Diff}} = \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}_+(R^1)$, яка визначається рівністю $(k,l) \circ f = l \circ f \circ k^{-1}$, $k \in \mathrm{Diff}(N)$, $l \in \mathrm{Diff}_+(R^1)$, $f \in C^\infty(N)$. Тут $\mathrm{Diff}(N)$ — група дифеоморфізмів многовиду N, а $\mathrm{Diff}_+(R^1)$ складається з тих дифеоморфізмів прямої R^1, які зберігають орієнтацію.

Дві функції f і g з простору $C^\infty(N)$ називають „право-ліво” еквівалентними [1], якщо вони належать одній орбіті під дією групи G_{Diff}.

Підрахунок числа нееквівалентних функцій у такому формулюванні є достатньо складною нерозв'язаною задачею. Неважко побудувати замкнену орієнтовану поверхню N роду $g \geq 1$, на якій існують гладкі функції з одним максимумом, одним мінімумом та однією виродженою критичною точкою. Однак число орбіт групи G_{Diff} на множині $C^\infty(N)$ може виявитися нескінченним (виникають модулі особливостей).

Якщо ж замість дифеоморфізмів розглянути гомеоморфізми, то задача про класифікацію функцій значно спрощується.

Дві функції f і g з простору $C^\infty(N)$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $k: N \to N$ і $l: R^1 \to R^1$ (l зберігає орієнтацію) такі, що $g = l \circ f \circ k^{-1}$.

У подальшому завжди будемо покладати, що N — *орієнтована поверхня, а гомеоморфізм k зберігає орієнтацію.*

Відомо [2], що функція $f \in C^\infty(N)$ у деякому околі своєї ізольованої критичної точки $x \in N$ (яка не є локальним екстремумом), у якої топологічний тип

* Виконано при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект № 01.07/00132).

ліній рівня при переході через x змінюється, неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = \mathrm{Re}\ z^n + c$, $n \geq 2$ (у подальшому будемо називати її *суттєво критичною*), або $f = \mathrm{Re}\, z$, якщо топологічний тип ліній рівня при переході через x не змінюється. Число k суттєво критичних точок x_i функції f разом зі значеннями n_i (показниками в зображенні $f = \mathrm{Re}\, z^{n_i} + c_i$ в околах критичних точок x_i) називається *топологічним сингулярним типом* функції f.

У роботі [3] розглянуто питання топологічної еквівалентності функцій із класу $C^\infty(N)$, у яких число критичних точок є фіксованим, та встановлено, що існує скінченне число топологічно нееквівалентних таких функцій.

У даній роботі будемо розглядати гладкі функції з M максимумами, m мінімумами та однією суттєво критичною точкою на замкненій орієнтованій поверхні N роду $g \geq 1$. У подальшому множину всіх таких функцій будемо позначати $C_{M,m}(N)$.

Встановлено (лема 1), що на будь-якій орієнтованій поверхні роду $g \geq 1$ існують функції з класу $C_{M,m}(N)$, але точне значення числа топологічно нееквівалентних таких функцій є невідомим. Для всіх функцій із класу $C_{M,m}(N)$ показник n у зображенні $f = \mathrm{Re}\, z^n + c$ однаковий (лема 2).

Доведено необхідну й достатню умови топологічної еквівалентності гладких функцій з однією суттєво критичною точкою на замкненій орієнтованій поверхні в термінах 2-кольорових хордових діаграм. Встановлено, що число топологічно нееквівалентних функцій із класу $C_{M,m}(N)$ дорівнює числу неізоморфних 2-кольорових діаграм спеціального вигляду з $n = 2g-1+M+m$ хордами. Підрахунок числа неізоморфних таких діаграм у загальному випадку є достатньо складною і нерозв'язаною задачею.

У роботі [2] встановлено початкові значення числа топологічно нееквівалентних функцій із класу $C_{1,1}(N)$ для поверхонь роду $g = 1, 2, 3$.

У даній роботі для поверхонь роду $g = \dfrac{n-1}{2}$, де n — просте число, підраховано точне значення числа $\delta_g^* = \dfrac{1}{2g+1}\left(\dfrac{(2g)!}{g+1} + 2g(2g-1)\right)$ топологічно нееквівалентних функцій із класу $C_{1,1}(N)$.

1. Означення та зауваження.

Означення 1. *Конфігурація* (*граф*) *на площині, що складається з кола та n хорд, які сполучають $2n$ різних точок на ньому, називається хордовою діаграмою порядку n або, коротко, n-діаграмою* (*див., наприклад*, [4, 5]).

Означення 2. 2-*Кольоровою хордовою діаграмою будемо називати n-діаграму, дуги кола якої розфарбовано в два кольори так, що будь-які сусідні дуги мають різний колір.*

Всі 2-кольорові діаграми будуються на одиничному колі (в R^2) з фіксованою нумерацією за годинниковою стрілкою $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$-кутника; дуги $b_1 = \widehat{1;2}$, $b_2 = \widehat{3;4}, \ldots, b_n = \widehat{2n-1;2n}$ — чорного кольору, а $w_1 = \widehat{2;3}$, $w_2 = \widehat{4;5}, \ldots, w_n = \widehat{2n;1}$ — білого) (рис. 1).

Нехай $\alpha = (a_1, c_1)(a_2, c_2)...(a_n, c_n) = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & a_n & c_n \\ c_1 & a_1 & \ldots & c_n & a_n \end{pmatrix}$ — правило сполучення $2n$ точок такого кола n хордами. Тоді 2-кольорову діаграму будемо позначати $D(\alpha)$ і ототожнювати з підстановкою α, а множину таких діаграм позначати $\Im_n$.

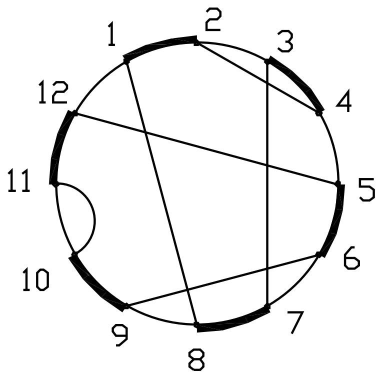

Рис. 1. $D(\alpha): \ \alpha = (1,8)(2,4)(3,7)(5,12)(6,9)(10,11)$.

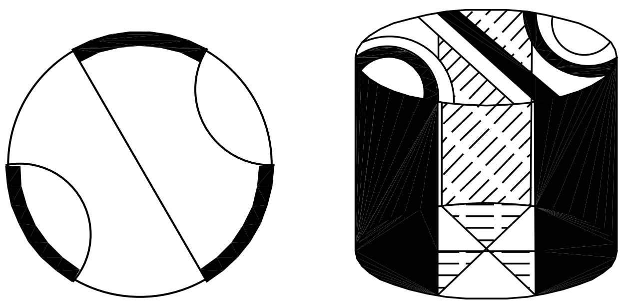

Рис. 2. Розширення 2-кольорової діаграми.

Означення 3. *Діаграми $D(\alpha)$ і $D(\beta)$ називають ізоморфними, якщо існує поворот кола, який переводить одну діаграму в іншу.*

Означення 4. *2-Кольорову діаграму, яка не містить хорд, що сполучають точки з номерами однакової парності, будемо називати O-діаграмою.*

Означення 5. *b-Циклом (w-циклом) 2-кольорової діаграми з обраним напрямком на колі будемо називати послідовність хорд і чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола.*

Означення 6. *Розширенням 2-кольорової O-діаграми будемо називати двокольорову орієнтовану поверхню з краєм, яку одержуємо таким чином (рис. 2):*

1) *стовстимо коло діаграми до кольорового циліндра так, щоб його хорди належали лише одному (наприклад, ω_1) з двох його граничних кіл ω_1, ω_2;*

2) *заклеїмо коло ω_2 двокольоровим диском (коло з $2n$ секторами, які по черзі пофарбовано у чорний та білий колір) у відповідності з кольорами;*

3) *вздовж кожної хорди підклеїмо чорно-білі смуги у відповідності з кольором.*

Означення 7. *b-Циклом (w-циклом) розширення 2-кольорової O-діаграми будемо називати чорну (білу) компоненту його краю.*

***Зауваження* 1.** Якщо коло 2-кольорової діаграми (з n хордами) стягнути в точку, то отримаємо букет n кіл, який гомотопічно еквівалентний розширенню цієї діаграми. Тому ейлерова характеристика розширення будь-якої 2-кольорової діаграми з n хордами дорівнює $1 - n$.

***Зауваження* 2.** Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (білий) цикл 2-кольорової O-діаграми збігається з відповідним циклом звичайної діаграми.

Наслідуючи [6], природним чином визначаємо рід 2-кольорової O-діаграми.

Означення 8. *Родом 2-кольорової O-діаграми будемо називати ціле число g, яке визначається співвідношенням $g = \dfrac{1}{2}(1 + n - \lambda)$, де λ — сумарне число чорних і білих циклів 2-кольорової O-діаграми.*

Означення 9. *O-Діаграму з n хордами, яка має M чорних (білих) і m білих (чорних) циклів, будемо позначати $D^n_{M,m}$, а множину всіх таких діаграм — $\Im^n_{M,m}$.*

O-Діаграми з двома циклами будемо називати діаграмами максимального роду.

***Зауваження* 3.** O-Діаграми максимального роду можливі лише при непарних n.

2. Топологічна еквівалентність функцій із класу $C_{M,m}(N)$.

Лема 1. *Нехай N — замкнена орієнтована поверхня. Тоді для будь-яких натуральних M і m існує гладка функція $f : N \to R^1$ з M максимумами, m мінімумами та однією (виродженою) суттєво критичною точкою.*

Доведення. Розглянемо на N функцію Морса f з M максимумами, m мінімумами і деяким числом r критичних точок $x_1, x_2, \ldots, x_r$ індексу 1. Така функція на N завжди існує. Без втрати загальності можна вважати, що всі критичні точки $x_1, x_2, \ldots, x_r$ належать одному критичному рівню $f^{-1}(c)$. Якщо це не так, то в результаті збурень початкової функції Морса цього неважко досягнути.

Розглянемо критичний рівень $f^{-1}(c)$ і доведемо, що лінія рівня $\Gamma = f^{-1}(c)$ є зв'язним графом, порядок кожної з r вершин якого дорівнює чотирьом.

Для цього достатньо показати, що критичний рівень $f^{-1}(c)$ є (лінійно) зв'язним.

Припустимо обернене, а саме, що критичний рівень $f^{-1}(c)$ є об'єднанням зв'язних компонент $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$, які не перетинаються. Їх буде скінченне число внаслідок скінченності числа критичних точок початкової функції Морса. Розглянемо ε-околи $\Gamma_i^\varepsilon = f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ кожної з компонент Γ_i.

З одного боку, $M = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^\varepsilon$ є зв'язним многовидом, оскільки його отримано в результаті вирізання з поверхні N двомірних клітин, що відповідають дисковим околам максимумів і мінімумів. З іншого боку, оскільки кожен з ε-околів Γ_i^ε ретрагується на свою компоненту Γ_i лінії рівня Γ, то внаслідок (лінійної) незв'язності $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ об'єднання ε-околів $M = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^\varepsilon$ буде незв'язним многовидом.

Отже, прийшли до суперечності. Звідси маємо, що критичний рівень $f^{-1}(c)$ є лінійно зв'язним. А оскільки він містить r морсівських особливостей, то $\Gamma = f^{-1}(c)$ є зв'язним графом, порядок кожної з r вершин якого дорівнює чотирьом.

Виберемо кусково-гладкий шлях $\alpha : [0,1] \to f^{-1}(c)$, який містить всі критичні точки $x_1, x_2, ..., x_r$ лінії рівня $f^{-1}(c)$. Це завжди можливо зробити, тому що за раніше встановленим критичний рівень є лінійно зв'язним.

Зрозуміло, що функція f є сталою та регулярною на компонентах краю $\partial M = f^{-1}(c+\varepsilon) \bigcup f^{-1}(c-\varepsilon)$ зв'язного многовиду $M = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^\varepsilon$.

Далі побудуємо відображення $\Psi : M \to M$, яке задовольняє умови:

1) $\Psi(\alpha[0,1])$ є точкою $p \in M$;

2) $\Psi(M \backslash \alpha[0,1]) \to M \backslash p$ є дифеоморфізмом.

Відображення Ψ тотожне на доповненні до малого околу критичного рівня $f^{-1}(c)$. Тоді згідно з теоремою 2.7 [7] функція $g = f \circ \Psi^{-1}(p)$ є гладкою функцією, яка відрізняється від f тільки в малому околі критичного рівня $f^{-1}(c)$ і має в цьому околі лише одну вироджену критичну точку. Останнє і доводить, що побудована функція g задовольняє умови леми.

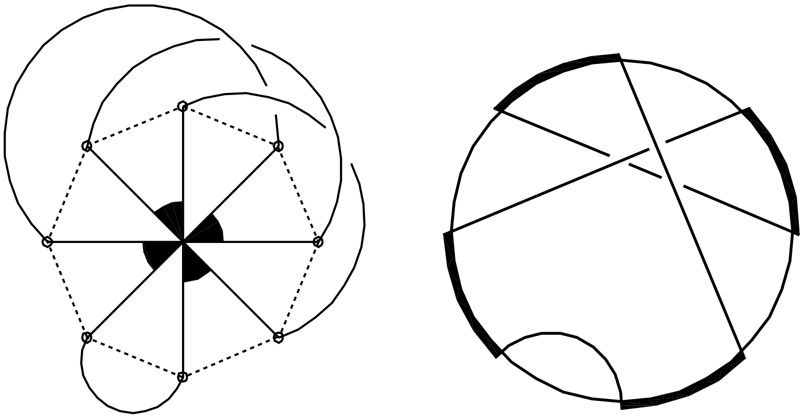

Рис. 3. Лінія рівня критичного значення функції f та відповідна їй діаграма D_f.

Лема 2. *Нехай N — замкнена орієнтована поверхня, на якій задано гладку функцію f з M максимумами, m мінімумами та однією суттєво критичною точкою. Тоді в деякому околі своєї суттєво критичної точки функція f неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = \operatorname{Re} z^{2g-1+(m+M)} + c_f$, де g — рід поверхні, c_f — деяка константа.*

Доведення. З роботи [2] випливає, що функція f в деякому околі своєї ізольованої критичної точки $x_f \in N$ (яка не є локальним екстремумом) неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = \operatorname{Re} z^n + c$, $n \geq 2$.

Обчислимо ейлерову характеристику даної поверхні. Очевидно, що прообраз виродженої критичної точки функції f є букетом n кіл. Відомо [8], що для будь-якого локального мінімуму (максимуму) гладкої функції $f : N \longrightarrow R$ на замкненій поверхні існує окіл, в якому f неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = x^2 + y^2$ ($f = -x^2 - y^2$). Тоді, виконавши клітинне розбиття, неважко встановити, що $\chi(N) = 1 - n + (m + M)$, де 1, n, $m + M$ — число відповідно нуль-, одно- і двовимірних клітин. Таким чином, $n = 1 - \chi(N) + (m + M)$ або ж $n = 1 - (2 - 2g) + (m + M) = 2g - 1 + (m + M)$, де g — рід поверхні N.

***Наслідок* 1.** *Для будь-якої функції $f \in C_{M,m}(N)$ показник n у зображенні $f = \operatorname{Re} z^n + c$ є однаковим і пов'язаний із родом поверхні співвідношенням*

$$g = \frac{n + 1 - M - m}{2}.$$

Покажемо, що кожній функції $f \in C_{M,m}(N)$ єдиним чином ставиться у відповідність клас ізоморфних $D^n_{M,m}$-діаграм з $n = 2g - 1 + M + m$ хордами.

Нехай $x_f \in N$ — суттєво критична точка функції f. Без втрати загальності можна вважати, що x_f збігається з початком координат. Зрозуміло, що лінія рівня критичного значення є букетом n кіл, які перетинаються в точці x_f. Оскільки функція f в деякому околі своєї суттєво критичної точки x_f має вигляд $f = \operatorname{Re} z^n + c$, то окіл D^f останньої можна вибрати таким чином, щоб він був дисковим околом цієї точки, в якій перетинаються n відрізків лінії рівня і розбивають диск на $2n$ білих і чорних секторів, у внутрішності яких функція f набуває значень відповідно більших і менших, ніж c. Таким чином, в околі D^f буде $2n$ послідовно розфарбованих чорних і білих секторів (рис. 3).

Продовження відрізків лінії рівня визначають хорди 2-кольорової діаграми D_f, а колір секторів — колір дуг її кола. Оскільки N — орієнтована поверхня, то розширення діаграми D_f (означення 6) повинно бути орієнтованою поверхнею з краєм. Тому діаграма D_f є O-діаграмою. А внаслідок того, що функція f має саме M максимумів і m мінімумів на N, розширення діаграми D_f повинно мати M чорних (білих) та m білих (чорних) компонент краю. Тому діаграма D_f є $D^n_{M,m}$-діаграмою.

***Зауваження* 4.** Якщо чорну і білу компоненти краю розширення діаграми D_f заклеїти відповідно чорними і білими дисками, то отримана поверхня (колір не має значення) буде гомеоморфною N.

Теорема 1. *Дві функції $f, g \in C_{M,m}(N)$ топологічно еквівалентні тоді і лише тоді, коли ізоморфні відповідні їм 2-кольорові діаграми D_f, $D_g \in \Im^n_{M,m}$.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай функції $f, g : N \longmapsto R^1$ топологічно еквівалентні. Тоді існують гомеоморфізми $k : \ N \to N$ і $l : \ R^1 \to R^1$ (що зберігають орієнтацію) такі, що $g = l \circ f \circ k^{-1}$. Це означає, що сідлова точка x_f відображається в сідлову точку x_g, кожна точка максимуму (мінімуму) функції f — в точку максимуму (мінімуму) функції g, критичний рівень функції f, що містить точку x_f, — в критичний рівень функції g, що містить точку x_g.

Без втрати загальності можна вважати, що суттєво критичні точки x_f, x_g цих функцій збігаються. Якщо це не так, то дифеоморфізмом, ізотопним тотожному, цього неважко досягнути.

Виберемо окіл цієї точки таким чином, щоб для кожної з функцій f і g він був дисковим околом D^f (D^g) спільної точки, в якій перетинаються n відрізків відповідної лінії рівня і розбивають цей диск на $2n$ білих і чорних секторів, у внутрішності яких функція f (g) набуває значень більших або менших, ніж c.

Оскільки поверхня N орієнтована, то в околі D^f на відповідних $2n$ відрізках можна задати циклічний порядок $(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$, тобто згідно з обраною орієнтацією послідовно їх занумерувати. Внаслідок того, що гомеоморфізм $k : \ N \to N$ зберігає орієнтацію, зберігається такий самий циклічний порядок і на відрізках в околі $k\left(D^f\right) \cap D^g$. Це означає, що зберігається циклічний порядок точок на колах діаграм D_f, D_g.

Більш того, оскільки кожна точка максимуму (мінімуму) функції f відображається в точку максимуму (мінімуму) функції g, то це означає, що кожна чорна (біла) компонента краю розширення діаграми D_f переходить у чорну (білу) компоненту краю розширення діаграми D_g. З цього випливає, що кожен чорний (білий) цикл діаграми D_f переходить у чорний (білий) цикл діаграми D_g.

Підсумовуючи викладене вище, робимо висновок, що для топологічно еквівалентних функцій $f, g \in C_{M,m}(N)$ діаграма D_g одержується в результаті деякого повороту діаграми D_f. Таким чином, діаграми D_f, D_g є ізоморфними.

Достатність очевидна.

***Наслідок* 2.** *Число топологічно нееквівалентних функцій із класу $C_{M,m}(N)$ дорівнює числу неізоморфних $D^n_{M,m}$-діаграм, де $n = 2g - 1 + M + m$, g — рід поверхні N.*

Оскільки розширення $D^n_{M,m}$-діаграм з n хордами є орієнтованими поверхнями (означення 6) з однаковою ейлеровою характеристикою (зауваження 1) і однаковим числом компонент краю відповідного кольору (M чорних і m білих), то розши-

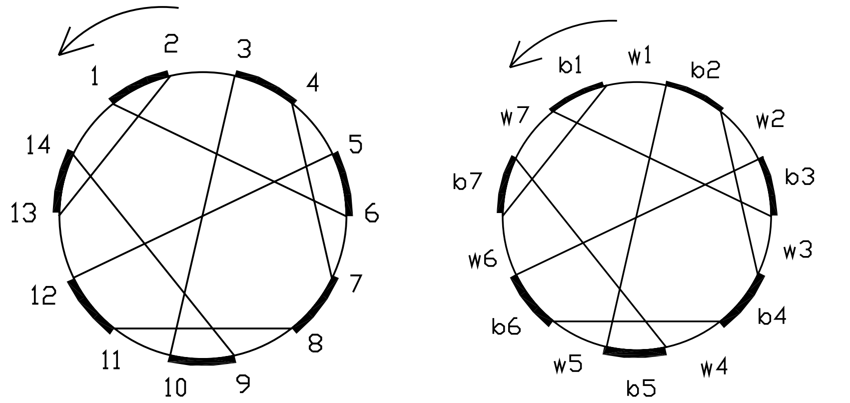

Рис. 4. $b = (b_1, b_3, b_6, b_4, b_2, b_5, b_7) \leftrightarrow w(b) = (w_1, w_6, w_2, w_3, w_7, w_4, w_5)$.

рення, що відповідають неізоморфним $D^n_{M,m}$-діаграмам (при фіксованому n), є гомеоморфними поверхнями з краєм.

Таким чином, число топологічно нееквівалентних функцій із класу $C_{M,m}(N)$ дорівнює числу неізоморфних $D^n_{M,m}$-діаграм з $n = 2g - 1 + M + m$ хордами.

3. Число неізоморфних *O*-діаграм максимального роду. Підрахуємо спочатку число всіх O-діаграм максимального роду. Нагадаємо, що вони будуються на основі кола з фіксованою нумерацією $2n$ вершин і фіксованим розфарбуванням його дуг.

Задамо напрямок кола діаграми, наприклад, проти годинникової стрілки (рис. 4). Тоді кожну O-діаграму максимального роду можна подати у вигляді циклу довжини n з додатковою умовою. Пояснимо це більш детально.

Під *обходом* чорних (білих) дуг b_j (w_j) O-діаграми максимального роду починаючи з чорної (білої) дуги b_1 (w_1) будемо розуміти послідовність чорних (білих) дуг

$$b = (b_1, b_{m_2}, \ldots, b_{m_n}), \qquad (w = (w_1, w_{k_2}, \ldots, w_{k_n}),$$

які зустрічаються при слідуванні по єдиному чорному (білому) її циклу (рис. 4). Тоді кожен такий обхід однозначно визначає хорди діаграми, а тому і саму діаграму, і навпаки.

Зрозуміло, що для O-діаграм максимального роду b і w є циклами довжини n і належать симетричній групі S_n.

Неважко перевірити, що якщо $b = (1, i_2, \ldots, i_n) = \begin{pmatrix} 1 & i_2 & \ldots & i_{n-1} & i_n \\ i_2 & i_3 & \ldots & i_n & 1 \end{pmatrix}$ — обхід чорних дуг (з номерами $1, i_2, \ldots, i_n$) O-діаграми $D = D(b)$ максимального роду, то обхід білих дуг цієї діаграми можна встановити по b, а саме

$$w = w(b) = \begin{pmatrix} i_2 & i_3 & \ldots & i_n & 1 \\ n & i_2 - 1 & \ldots & i_{n-1} - 1 & i_n - 1 \end{pmatrix} = (j_1, j_2, \ldots, j_n).$$

Таким чином, задача про підрахунок числа всіх O-діаграм максимального роду звелась до задачі про підрахунок всіх таких циклів b довжини n, для яких $w = w(b)$ також є циклом довжини n. Зрозуміло, що для будь-якого циклу b довжини n

$$b \circ w(b) = \begin{pmatrix} 1 & i_2 & ... & i_n \\ n & i_2 - 1 & ... & i_n - 1 \end{pmatrix} = (n, n-1, ..., 1).$$

Неважко показати, що дана задача, в свою чергу, еквівалентна задачі про число зображень фіксованого циклу (з S_n) довжини n у вигляді добутку двох циклів (з S_n) довжини n. Остання була розглянута в роботі [9], де встановлено, що для парних n це число дорівнює 0, а для непарних n обчислюється за формулою $a_n = \dfrac{2(n-1)!}{n+1}$. Таким чином, число 2-кольорових O-діаграм максимального роду дорівнює $\dfrac{2(n-1)!}{n+1} = \left|\Im_{1,1}^{n}\right|$.

Згідно із зауваженням 3 та як наслідок з роботи [9], O-діаграми максимального роду можливі лише при непарних n.

Згідно з лемою Бернсайда, використовуючи результати роботи [6], неважко встановити, що число неізоморфних 2-кольорових O-діаграм максимального роду з n хордами можна обчислити за формулою

$$\delta_n^* = \frac{1}{|C_n|}\left(M_n + \sum_{i|n,\ i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right)\mathrm{Fix}(\xi^{2i}, n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(M_n + \sum_{i|n, i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) p(n, 2i)\right), \tag{1}$$

де $M_n = \left|\Im_{1,1}^{n}\right|$; C_n — група циклічних перестановок порядку n, породжена елементом $\xi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\phi(q)$ — функція Ейлера (число натуральних менших за q чисел, взаємно простих із ним); $p(n, 2i)$ — число 2-кольорових O-діаграм $D(\alpha)$ максимального роду, для яких циклічна перестановка ξ^{2i} є автоморфізмом [6], тобто число таких $D(\alpha)$, для яких $\alpha = \xi^{-2i} \circ \alpha \circ \xi^{2i}$.

Іншими словами, $p(n, 2i)$ — число всіх 2-кольорових O-діаграм максимального роду, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \dfrac{\pi}{n} \cdot 2i$ (за годинниковою стрілкою).

Обмежимося розглядом випадку, коли n є простим числом. Тоді формула (1) набирає вигляду

$$\delta_n^* = \frac{1}{n}\left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + (n-1)p(n, 2)\right), \tag{2}$$

і для підрахунку числа неізоморфних 2-кольорових O-діаграм максимального роду достатньо обчислити величину $p(n, 2)$.

Лема 3. *Для простих n величина $p(n, 2) = n - 2$.*

Доведення. Нехай $D = D(b)$ — O-діаграма максимального роду з n хордами, $b = (1, j_2, \ldots, j_n)$ — обхід чорних дуг діаграми, а $w = w(b) = (1, j_n - 1, \ldots)$ — обхід білих дуг цієї діаграми.

Той факт, що діаграма $D(b)$ самосуміщається при повороті на кут $\omega = \dfrac{\pi}{n} \cdot 2$ за годинниковою стрілкою, означає, що якщо впорядкована пара $\{1, j_2\} \in b$, то циклу b належать і впорядковані пари $\{2, j_2+1\}$, $\{3, j_2+2\}, \ldots, \{j_2, 2j_2-1\}, \ldots, \{2j_2 - -1, 3j_2 - 2\}, \ldots$. Зауважимо, що арифметичні дії виконуються за модулем n.

Таким чином, b має вигляд $b = (1,\ 1+h,\ 1+2h, \ldots,\ 1+(n-1)h)$, де h — крок, з яким відбувається обхід чорних дуг діаграми. Справді, оскільки n є простим, то при будь-якому $1 \leq h \leq n-1$ b є циклом довжини n, і зрозуміло, що відповідна діаграма має єдиний чорний цикл. Але при $h = n-1$ відповідна діаграма має n білих циклів.

Покажемо, що при будь-якому $1 \leq h \leq n-2$ відповідна діаграма є діаграмою максимального роду.

На підставі викладеного вище обхід білих дуг діаграми відбувається також з деяким кроком h'. Більш того, оскільки $w = w(b) = (1, j_n - 1, \ldots)$, то з цього випливає, що при кожному $1 \leq h \leq n-2$ $w = w(b)$ має вигляд $w = (1, (n-1)h, \ldots)$, а тому $h' = (n-1)h - 1$. Зрозуміло, що $h + h' \equiv h + (n-1)h - 1 \equiv nh - 1 \equiv$ $\equiv n - 1(\mathrm{mod} n)$. Далі, оскільки $1 \leq h,\, h' \leq n-2$, то з останнього співвідношення випливає, що $h' = n-1-h$ і є взаємно простим з n. А це й означає, що відповідна діаграма має єдиний білий цикл. Отже, $p(n,2) = n-2$.

***Наслідок* 3.** *Для простих n число неізоморфних 2-кольорових O-діаграм максимального роду може бути обчислене за допомогою співвідношення*

$$\delta_n^* = \frac{1}{n}\left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + (n-1)(n-2)\right). \tag{3}$$

***Наслідок* 4.** *На замкненій орієнтованій поверхні роду $g = \dfrac{n-1}{2}$ (n — просте число) існує точно δ_n^* топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N)$.*

Початкові значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N)$ в залежності від роду g орієнтованої поверхні N наведено в таблиці.

g	0	1	2	3	4	5	6
$n = 2g+1$	1	3	5	7	9	11	13
δ_n^*	1	1	4	30		54 990	5 263 764

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. – М.: Наука, 1982. – Т. 1. – 302 с.
2. *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface // Topology and its Apll. – 2002. – **119**. – P. 257 – 267.
3. *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. жур. – 2003. – **55**, № 5. – P. 687 – 700.
4. *Stoimenov A.* On the number of chord diagrams // Discrete Math. – 2000. – **218**, № 1-3. – P. 209 – 233.
5. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams. – Arxiv: math. CO/0008209. – 10 p.
6. *Cori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // Theor. Comput. Sci. – 1998. – **204**. – P. 55 – 73.
7. *Takens F.* The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik – Sehnirelman category // Invent. math. – 1968. – **6**. – P. 197 – 244.
8. *Dancer E. N.* Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities. II // J. reine und angew. Math. – 1987. – **382**. – S. 145 – 164.
9. *Boccara G.* Nombre de representations d'une permutation comme produit de deux cycles de longueurs donnees // Discrete Math. – 1980. – **29**, № 2. – P. 105 – 134.

Одержано 08.02.2005