УДК 519.1

Р. Ю. Евстафьев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АРТИНОВЫ КОЛЬЦА С НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППОЙ

Let R be an Artinian ring not necessarily with identity element, let $Z(R)$ be its center , and let R° be a group of invertible elements of the ring R with respect to the operation $a \circ b = a + b + ab$. We prove that the adjoint group R° is nilpotent and the set $Z(R) + R^\circ$ generates R as a ring if and only if R is a direct sum of finite number of ideals each of which is either a nilpotent ring or a local ring with nilpotent multiplicative group.

Нехай R — артинове кільце, необов'язково з одиницею, $Z(R)$ — його центр і R° — група оборотних елементів кільця R відносно операції $a \circ b = a + b + ab$. Доводиться, що приєднана група R° нільпотентна та множина $Z(R) + R^\circ$ породжує R як кільце тоді і тільки тоді, коли R є прямою сумою скінченного числа ідеалів, кожен з яких є або нільпотентним кільцем, або локальним кільцем з нільпотентною мультиплікативною групою.

1. Введение. Пусть R — ассоциативное кольцо, необязательно с единицей. Множество всех элементов кольца R образует полугруппу R^{ad} с единичным элементом 0 относительно операции *присоединенного умножения* $a \circ b = a + b + ab$ для всех элементов a и b из R. Группа всех обратимых элементов этой полугруппы называется *присоединенной группой* кольца R и обозначается через R°. Если кольцо R имеет единицу, то $1 + R^\circ$ совпадает с мультипликативной группой R^* кольца R и отображение $r \mapsto 1 + r$ для $r \in R^\circ$ является изоморфизмом R° на R^*.

Напомним, что кольцо называется *артиновым справа* (*нетеровым справа*), если в нем выполнено условие минимальности (условие максимальности) для правых идеалов. Всюду в работе под артиновым (нетеровым) кольцом будем подразумевать артиново справа (нетерово справа) кольцо.

Радикал Джекобсона и центр кольца R будем обозначать соответственно через $J(R)$ и $Z(R)$. Кольцо R с единицей называется *локальным*, если фактор-кольцо $R/J(R)$ является телом.

Известно, что каждое коммутативное артиново кольцо с единицей разлагается в прямую сумму локальных колец [1] (теорема 8.7). Следующая теорема обобщает этот результат на произвольные артиновы кольца с нильпотентной присоединенной группой, которые порождаются множеством $Z(R) + R^\circ$.

Теорема А. *Пусть R — артиново кольцо. Присоединенная группа R° нильпотентна и множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо тогда и только тогда, когда R — прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из которых является либо нильпотентным кольцом, либо локальным кольцом с нильпотентной мультипликативной группой.*

Основу доказательства этой теоремы составляет изучение прямо неразложимых артиновых колец, удовлетворяющих условиям теоремы. В частности, мы доказываем, что минимальный идеал такого кольца содержится в центре, а само кольцо является либо локальным, либо нильпотентным.

Заметим, что если в кольце R есть единица, то группы R° и R^* изоморфны. Поэтому все полученные структурные теоремы будут справедливы и для артиновых колец с нильпотентной мультипликативной группой. В частности, имеет место следующее утверждение.

Следствие A. *Пусть R — артиново кольцо с единицей, порождаемое мультипликативной группой R^*. Тогда группа R^* нильпотентна в том и только в том случае, когда R — прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из которых является локальным кольцом с нильпотентной мультипликативной группой.*

Артиновы кольца с заданными свойствами мультипликативной или присоединенной групп изучались в работах [2 – 4]: в первой из них рассматривались кольца с единицей, которые имеют циклическую мультипликативную группу, во второй — кольца с циклической присоединенной группой, а в последней — кольца с единицей, мультипликативная группа которых нильпотентна. В частности, в ней доказано, что конечные кольца с таким свойством, порождаемые своей мультипликативной группой, разлагаются в прямую сумму идеалов, каждый из которых является гомоморфным образом групповой алгебры вида SP для подходящего коммутативного конечного кольца S и конечной p-группы P, где p — простое число. В следующей теореме фактически описываются конечные кольца с тем же свойством, которые необязательно порождаются своей мультипликативной группой.

Определим идеал L как наибольший идеал кольца R такой, что фактор-кольцо $L/J(R)$ разложимо в прямую сумму полей из двух элементов, если такое разложение существует, и $L = J(R)$ — в противном случае.

Теорема B. *Присоединенная группа R° конечного кольца R тогда и только тогда нильпотентна, когда $R = Z(R) + L$.*

Каждое ассоциативное кольцо R может быть рассмотрено как кольцо Ли относительно операции $[a, b] = ab - ba$ для всех $a, b \in R$, которое называется *кольцом Ли, ассоциированным с* R. Для аддитивных подгрупп V и W кольца R будем обозначать через $[V, W]$ аддитивную подгруппу в R, порожденную всеми Ли-коммутаторами $[v, w]$ для $v \in V$ и $w \in W$. Напомним, что *верхний центральный ряд* кольца Ли, ассоциированного с R, определяется следующим образом: $Z_0(R) = 0$ и $Z_n(R) = \{ z \mid z \in R, \forall r \in R : [z, r] \in Z_{n-1}(R) \}$ для произвольного натурального n. Верхний центральный ряд присоединенной группы R° определяется аналогичным образом, если кольцевые коммутаторы заменить групповыми коммутаторами.

Напомним, что кольцо R называется *Ли-нильпотентным класса* n, если $Z_n(R) = R$ и n — наименьшее число с таким свойством. Если вместо верхнего центрального ряда кольца рассмотреть верхний центральный ряд группы, то получим определение нильпотентной группы класса n.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Н. Гупта и Ф. Левин [5] установили, что если кольцо R Ли-нильпотентно класса n, то мультипликативная группа R^* также нильпотентна класса не выше n.

Следуя Джекобсону [6], кольцо R называем *радикальным*, если $R = R^\circ$. Последнее означает, что кольцо R совпадает со своим радикалом Джекобсона $J(R)$. Дженнингс [7] доказал, что присоединенная группа R° радикального кольца R нильпотентна тогда и только тогда, когда кольцо R Ли-нильпотентно. Он также предположил, что классы нильпотентности кольца Ли, ассоциированного с R, и группы R° совпадают, и это было подтверждено Ду [8], который получил следующий результат: в радикальном кольце R каждый член $Z_n(R)$ $(n \geq 0)$ его верхнего центрального ряда совпадает с соответствующим членом $Z_n(R^\circ)$ $(n \geq 0)$ верхнего центрального ряда группы R°. В случае, когда кольцо R локально, соответствующий результат был получен в работе [9] и формулируется следующим образом: $Z_n(R)^* = Z_n(R^*)$ для каждого $n > 0$, где $Z_n(R^*)$ — n-й член верхнего центрального ряда группы R^*. В частности, мультипликативная группа R^* локального кольца R нильпотентна тогда и только тогда, когда кольцо R Ли-нильпотентно и классы нильпотентности обеих структур совпадают.

Пусть R — ассоциативное кольцо, необязательно с единицей. Амберг и Я. П. Сысак [10] установили, что присоединенная полугруппа R^{ad} кольца R нильпотентна класса n (в смысле А. Мальцева [11]) тогда и только тогда, когда кольцо R Ли-нильпотентно класса n. Таким образом, если кольцо R Ли-нильпотентно класса n, то присоединенная группа R° также нильпотентна класса не выше n.

В связи с указанными выше результатами представляют интерес следующие две проблемы:

1. Пусть R — артиново кольцо, которое порождается своей присоединенной группой R°. Будет ли группа R° нильпотентна тогда и только тогда, когда кольцо R Ли-нильпотентно?

2. Пусть R — артиново кольцо, присоединенная группа R° которого нильпотентна и порождает R как кольцо. Выполняется ли равенство $Z_n(R)^\circ = Z_n(R^\circ)$ для каждого $n \geq 0$?

Сразу заметим, что артиново кольцо R, присоединенная группа R° которого нильпотентна и не порождает R как кольцо, не обязательно Ли-нильпотентно. В качестве примера можно рассмотреть кольцо верхнетреугольных (2×2)-матриц над полем из двух элементов.

Из теоремы A вытекают следующие утверждения, которые дают решения поставленных выше проблем.

Теорема C. *Пусть R — артиново кольцо. Если присоединенная группа R° нильпотентна и множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо, то*:

1) *для всех $n \geq 0$ выполняется равенство $Z_n(R)^\circ = Z_n(R^\circ)$*;

2) *каждый идемпотент кольца R лежит в центре.*

***Следствие* B.** *Пусть R — артиново кольцо, порождаемое множеством $Z(R) + R^\circ$. Тогда присоединенная группа R° нильпотентна в том и только в том случае, когда кольцо R Ли-нильпотентно, причем классы нильпотентности обеих структур совпадают.*

Как будет показано ниже (см. пример 3.1), в теоремах A, C и следствии B условие, что множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо, опустить нельзя.

Символ R везде в работе будет обозначать ассоциативное кольцо, необязательно с единицей.

2. Основные леммы. Подкольцо, *порожденное подмножеством* $S \subset R$, будем обозначать через $\langle S \rangle$, поле из двух элементов — через $\mathbb{F}_2$. Некоторые свойства присоединенной группы устанавливают следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R. Тогда $J(R)^\circ$ — нормальная подгруппа в R° и $(R/J(R))^\circ \cong R^\circ/J(R)^\circ$.*

Доказательство. Если $r \in R^\circ$, то $r + J(R) \in (R/J(R))^\circ$. Если же $r + J(R) \in (R/J(R))^\circ$, то существует элемент $s \in R$ такой, что $r \circ s = j \in J(R)$. Пусть j' — присоединенно обратный к j. Тогда $r \circ (s \circ j') = 0$ и, следовательно, r присоединенно обратим справа. Аналогично можно доказать, что r присоединенно обратим слева и, значит, $r \in R^\circ$.

Естественное отображение $R \to R/J(R)$ индуцирует отображение $\varphi : R^\circ \to (R/J(R))^\circ$. Ясно, что φ является гомоморфизмом группы R° на группу $(R/J(R))^\circ$ с ядром $\operatorname{Ker}\varphi = J(R)^\circ$. Согласно основной теореме о гомоморфизмах имеем $(R/J(R))^\circ \cong R^\circ/J(R)^\circ$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть кольцо* R *разлагается в прямую сумму своих подколец* $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *присоединенная группа* R° *является прямым произведением групп* R_i°;

2) *кольцо* R° *порождается множеством* $Z(R) + R^\circ$ *тогда и только тогда, когда каждое кольцо* R_i *порождается множеством* $Z(R_i) + R_i^\circ$;

3) *кольцо* R *порождается группой* R° *в том и только в том случае, когда каждое кольцо* R_i *порождается своей присоединенной группой* R_i°.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Покажем теперь справедливость второго утверждения. Ясно, что $Z(R) = Z(R_1) \oplus \ldots \oplus Z(R_n)$. Далее, подкольцо, порожденное множеством $Z(R) + R^\circ$, содержит подкольца, порожденные множествами $Z(R_1) + R_1^\circ, \ldots, Z(R_n) + R_n^\circ$, и, значит, совпадает с прямой суммой этих подколец. Поэтому если какое-то множество $Z(R_i) + R_i^\circ$ не порождает R_i как кольцо, то и все кольцо R не порождается множеством $Z(R) + R^\circ$. Таким образом, необходимость доказана.

Обратно, пусть каждое кольцо R_i порождается множеством $Z(R_i) + R_i^\circ$. Тогда в силу изложенного выше подкольцо, порожденное множеством $Z(R) + R^\circ$, совпадает с прямой суммой колец $R_1, \ldots, R_n$, т. е. множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо.

Доказательство третьего утверждения проводится аналогично.

Лемма доказана.

Следующая лемма описывает артиновы кольца, которые порождаются своей присоединенной группой. Соответствующий результат для конечных колец с единицей, порождаемых своей мультипликативной группой, был получен в [12]. Заметим, что если артиново кольцо порождается своей присоединенной группой, то оно обязательно порождается и своей мультипликативной группой. Обратное утверждение не всегда верно.

Лемма 2.3. *Присоединенная группа* R° *артинова кольца* R *тогда и только тогда порождает* R *как кольцо, когда каждая простая компонента полупростого кольца* $R/J(R)$ *отлична от* $\mathbb{F}_2$.

Доказательство. Покажем сначала, что группа R° порождает R как кольцо тогда и только тогда, когда фактор-кольцо $R/J(R)$ порождается своей присоединенной группой.

Действительно, если $R = \langle R^\circ \rangle$, то каждый элемент кольца R можно представить в виде линейной комбинации элементов из R° с целыми коэффициентами и, значит, фактор-кольцо $R/J(R)$ порождается своей присоединенной группой. Обратно, пусть группа $(R/J(R))^\circ$ порождает $R/J(R)$ как кольцо. Тогда каждый элемент кольца R можно записать в виде суммы линейной комбинации элементов из R° с целыми коэффициентами и некоторого элемента из $J(R)$. Поскольку $J(R) = J(R)^\circ$, группа R° порождает R как кольцо. Таким образом, достаточно найти условия, при которых фактор-кольцо $R/J(R)$ порождается своей присоединенной группой.

Согласно теореме Веддерберна – Артина имеем $R/J(R) \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$, где S_i, $i = 1, \ldots, k$, — полное матричное кольцо над телом. Известно, что присоединенная группа S° полного матричного кольца S над телом порождает S как кольцо всегда, кроме случая $S = \mathbb{F}_2$, для которого имеем $\mathbb{F}_2^\circ = 0$. Следовательно, в силу леммы 2.2 фактор-кольцо $R/J(R)$ порождается своей присоединенной группой тогда и только тогда, когда каждая простая компонента S_i отлична от $\mathbb{F}_2$.

Лемма доказана.

Напомним, что кольцо называется *прямо неразложимым,* если это кольцо нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых идеалов.

Ясно, что если кольцо R разложимо в прямую сумму идеалов, то изучение строения кольца R сводится к изучению строения каждого идеала. Следовательно, достаточно рассматривать кольца, которые неразложимы в прямую сумму идеалов.

Идемпотенты 0 и 1 называются *тривиальными.*

Лемма 2.4. *Если кольцо R прямо неразложимо, то в центре кольца R лежат только тривиальные идемпотенты.*

Доказательство. Заметим, что если e — центральный идемпотент, то кольцо R разлагается в прямую сумму идеалов $R = eR \oplus V$, где $V = \{r - er \mid r \in R\}$. Поскольку R прямо неразложимо, то либо $eR = 0$, либо $V = 0$. В первом случае заключаем, что $e = 0$. Если же $V = 0$, то для каждого $r \in R$ имеем $r = re = er$ и, значит, e — единица кольца R.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы А. *Аннулятором* кольца R называется множество всех элементов $a \in R$, для которых $aR = Ra = 0$. Следующая лемма характеризует полупростые артиновы кольца с нильпотентной присоединенной группой.

Лемма 3.1. *Если присоединенная группа R° артинова кольца R нильпотентна, то фактор-кольцо $R/J(R)$ разложимо в прямую сумму полей.*

Доказательство. Из теоремы Веддерберна – Артина следует, что $R/J(R) \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$, где S_i, $i = 1, \ldots, k$, — полное матричное кольцо над телом. Поэтому присоединенная группа фактор-кольца $R/J(R)$ изоморфна прямому произведению групп S_i°. Поскольку группа R° нильпотентна, то в силу леммы 2.1 группа S_i° нильпотентна для каждого i. Известно, что присоединенная группа кольца $(n \times n)$-матриц над телом D нильпотентна только тогда, когда $n = 1$. Более того, мультипликативная группа тела D нильпотентна только в том случае, когда D коммутативно [13]. Следовательно, фактор-кольцо $R/J(R)$ есть прямая сумма полей.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть кольцо R артиново и прямо неразложимо. Если присоединенная группа R° нильпотентна и множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо, то R либо локально, либо нильпотентно.*

Доказательство. Пусть M — минимальный идеал кольца R. Тогда имеем либо $MJ(R) = M$, либо $MJ(R) = 0$. Если $MJ(R) = M$, то $M = MJ(R) = MJ(R)^2 = \ldots = MJ(R)^k = 0$, так как $J(R)^k = 0$ для некоторого числа k. Получили противоречие, поскольку идеал M ненулевой. Таким образом, $MJ(R) = 0$.

Докажем теперь, что M содержится в центре кольца R. Обозначим $M \cap Z(R)$ через K. Согласно лемме 3.1 фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно и, значит, для любых $r, s \in R$ элемент $rs - sr$ лежит в $J(R)$. Тогда для каждого $k \in K$ имеем $k(rs - sr) = 0$. Поскольку k лежит в центре кольца R, то $(kr)s = s(kr)$ и, следовательно, $kr \in Z(R)$. Аналогично можно показать, что $rk \in Z(R)$. Кроме того, $kr \in M$ и $rk \in M$. Таким образом, K — идеал. На основании минимальности M заключаем, что $K = M$ или $K = 0$.

Вследствие того что $M \bigcap J(R)$ является идеалом, либо $M \subset J(R)$, либо $M \bigcap J(R) = 0$. Предположим сначала, что $M \subset J(R)$. Поскольку группа R° нильпотентна и M° — нормальная подгруппа в R°, пересечение M° с центром R° нетривиально. Далее, так как множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо, каждый элемент из центра R° лежит в $Z(R)$. Последнее означает, что $M \bigcap Z(R) \neq 0$. Следовательно, $K = M$ и $M \subset Z(R)$.

Пусть теперь $M \bigcap J(R) = 0$. Поскольку $[M, R] \subset M$ и $[M, R] \subset J(R)$, то $[M, R] = 0$. Таким образом, $M \subset Z(R)$.

Известно, что каждая квазициклическая подгруппа артинова кольца лежит в аннуляторе. Поэтому сумма всех квазициклических подгрупп кольца R является идеалом в R, который обозначим через N. Если R не содержит квазициклических подгрупп, то положим $N = 0$. Фактор-кольцо $\overline{R} = R/N$ не содержит квазициклических подгрупп, и поэтому в нем выполняется условие максимальности для правых идеалов.

Если $\overline{R} = 0$, то $R = N$ и, значит, R — нильпотентное кольцо. Предположим, что $\overline{R} \neq 0$. Поскольку $\overline{R}$ нетерово, в кольце R существует цепочка идеалов

$$R = L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq L_k \supsetneqq L_{k+1} = N,$$

в которой L_{n+1} — идеал, максимальный в L_n, $n = 0, \ldots, k$.

Факторизуя по L_{n+1}, получаем, что L_n/L_{n+1} — минимальный идеал фактор-кольца R/L_{n+1}, содержащийся в его центре. Пусть e — произвольный идемпотент кольца R. Тогда $[e, L_n] \subset L_{n+1}$ для каждого n.

Докажем теперь, что eR — идеал. Для произвольных $r, s \in R$ имеем $ser = eser + [s, e]er$. Следовательно, $L_n eR \subset eR + [e, L_n]eR \subset eR + L_{n+1}eR$ для каждого n. Теперь заметим, что $ReR \subset eR + L_1 eR \subset eR + L_2 eR \subset \ldots \subset eR + NeR = eR$. Аналогично можно доказать, что Re — идеал.

Рассмотрим правый $V = \{ r - er \mid r \in R \}$ и левый $W = \{ r - er \mid r \in R \}$ идеалы. Покажем, что V — идеал. Для каждого $r - er \in V$ и для каждого $s \in R$ имеем $sr - ser = sr - esr + eser - ser + [e, s]r - [e, s]er$. Следовательно, $L_n V \subset V + [e, L_n]V \subset V + L_{n+1}V$ для каждого n. Далее, $RV \subset V + L_1 V \subset V + L_2 V \subset \ldots \subset V + NV = V$. Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что W — идеал.

Ясно, что кольцо R разлагается в прямую сумму идеалов $R = eR \oplus V$. Поскольку R прямо неразложимо, либо $eR = 0$, либо $V = 0$. В первом случае делаем вывод, что $e = 0$. Если же $V = 0$, то для любого $r \in R$ имеем $r = er$. Аналогично, рассматривая разложение $R = Re \oplus W$, получаем, что $re = r$ для каждого $r \in R$. Но тогда e — единица кольца R. Поэтому R содержит только тривиальные идемпотенты и, значит, является либо локальным, либо нильпотентным кольцом.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* А.** Предположим, что присоединенная группа R° нильпотентна и множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо. Кольцо R является прямой суммой конечного числа прямо неразложимых колец

$$R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n. \tag{3.1}$$

Поскольку группа R° нильпотентна и $R^\circ = R_1^\circ \times \ldots \times R_n^\circ$, группа R_i° нильпотентна для каждого $i = 1, \ldots, n$. Если в кольце R_i есть единица, то вследствие изоморфизма групп R_i° и R_i^* мультипликативная группа R_i^* будет также нильпотентной. Кроме того, в силу леммы 2.2 имеем $R_i = \langle Z(R_i) + R_i^\circ \rangle$. Следовательно, согласно лемме 3.2 каждое из колец R_i будет либо нильпотентным, либо локальным. Далее, так как прямая сумма нильпотентных колец является опять нильпотентным кольцом, получаем утверждение теоремы.

Обратно, пусть кольцо R является прямой суммой конечного числа идеалов, каждый из которых является либо нильпотентным кольцом, либо локальным кольцом с нильпотентной мультипликативной группой и имеет разложение (3.1). Ясно, что в этом случае присоединенная группа R° является прямым произведением нильпотентных групп и, значит, сама нильпотентна. Поскольку нильпотентное кольцо совпадает со своей присоединенной группой и локальное кольцо порождается своей мультипликативной группой, каждое из колец R_i порождается множеством $Z(R_i) + R_i^\circ$. Следовательно, в силу леммы 2.2 множество $Z(R) + R^\circ$ порождает R как кольцо.

Теорема доказана.

***Пример* 3.1.** *Артиново кольцо R с нильпотентной присоединенной группой R°, неразложимое в прямую сумму идеалов, не обязано быть локальным или нильпотентным.*

Действительно, рассмотрим кольцо (2×2)-матриц

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кольцо R не является локальным, поскольку не содержит единицы, и не является нильпотентным, так как содержит ненулевой идемпотент. Легко проверить, что

$$J(R) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R/J(R) \cong \mathbb{F}_2.$$

Заметим еще, что из разложения, указанного в следствии А, не следует, что кольцо порождается своей мультипликативной группой. В самом деле, в кольце $R = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ подкольцо, порожденное мультипликативной группой R^*, состоит из двух элементов $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

***Доказательство теоремы* С.** Из теоремы А следует, что кольцо R является прямой суммой конечного числа идеалов, каждый из которых является либо нильпотентным кольцом, либо локальным кольцом. Поскольку локальные кольца имеют только тривиальные идемпотенты, каждый идемпотент кольца R центральный, т. е. утверждение 2 справедливо.

Справедливость утверждения 1 для нильпотентных и локальных колец была показана в работах соответственно [8, 9]. Следовательно, если R имеет разложение (3.1), то $Z_n(R_i)^\circ = Z_n(R_i^\circ)$ для всех $n \geq 0$. Но тогда прямая сумма имеет то же свойство, т. е. $Z_n(R)^\circ = Z_n(R^\circ)$.

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы В. Аддитивную группу кольца R будем обозначать через R^+, центр присоединенной группы R° — через $Z(R^\circ)$. Следующая лемма описывает конечные кольца с нильпотентной присоединенной группой, неразложимые в прямую сумму идеалов.

Лемма 4.1. *Пусть кольцо R конечно и прямо неразложимо. Тогда R^+ является p-группой для некоторого простого числа p. Если, кроме того, присоединенная группа R° нильпотентна, то $J(R)^\circ$ является силовской p-подгруппой в R° и $R^\circ = G \times J(R)^\circ$, где $G \subset Z(R^\circ)$.*

Доказательство. Известно, что любое артиново кольцо является прямой суммой некоторого артинова кольца без кручения и конечного числа артиновых p-колец. Поэтому из конечности и неразложимости кольца R в прямую сумму идеалов следует, что R^+ является p-группой для некоторого простого числа p. Поскольку $\left|J(R)^\circ\right| = \left|J(R)\right|$ и $J(R)$ является подгруппой R^+, $J(R)^\circ$ — p-группа.

Если группа R° нильпотентна, то согласно лемме 3.1 фактор-кольцо $R/J(R)$ разложимо в прямую сумму полей. Далее, так как $\left|R/J(R)\right| = p^k$, характеристика каждого поля равна p и, следовательно, группа всех обратимых элементов каждого из этих полей имеет порядок, взаимно простой с p. Отсюда следует, что порядок мультипликативной группы $(R/J(R))^*$, являющейся прямым произведением таких групп, также взаимно прост с p. Поскольку мультипликативная и присоединенная группы фактор-кольца $R/J(R)$ изоморфны, в силу леммы 2.1 имеем $\left(\left|R^\circ/J(R)^\circ\right|, p\right) = 1$, т. е. $J(R)^\circ$ — силовская p-подгруппа в R°.

Вследствие того что R° нильпотентна и конечна, она представима в виде прямого произведения своих силовских p-подгрупп. Таким образом, $R^\circ = G \times \times J(R)^\circ$, где $G \cong R^\circ/J(R)^\circ$ и $\left(\left|G\right|, p\right) = 1$. Поскольку группа G абелева, то $G \subset Z(R^\circ)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть R^+ является p-группой и $r = z + s \in R$ для $z \in Z(R)$ и $s \in R$. Если s — нильпотентный элемент, то существует такое число k, что $r^k = z^k$.*

Доказательство. Предположим, что порядок элемента z в R^+ равен p^k и $s^{n+1} = 0$. Выберем m так, что p^m — наибольшая степень p, делящая $n!$. Тогда $r^{p^{k+m}} = (z + s)^{p^{k+m}} = \sum_t C^t_{p^{k+m}} z^{p^{k+m}-t} s^t$. Легко проверить, что $C^t_{p^{k+m}}$ делится на p^k при $t = 1, \ldots, n$. Таким образом, $r^{p^{k+m}} = z^{p^{k+m}}$.

Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть R — конечное кольцо, порождаемое своей присоединенной группой R°. Тогда группа R° нильпотентна в том и только в том случае, когда $R = Z(R) + J(R)$.*

Доказательство. Как было замечено выше, достаточно рассматривать кольца, неразложимые в прямую сумму идеалов.

Пусть R° нильпотентна. Из леммы 4.1 следует, что $R^\circ = G \times J(R)^\circ$, где $G \subset Z(R^\circ)$. Поскольку R° порождает R как кольцо, каждый элемент из R записывается в виде линейной комбинации элементов из R° с целыми коэффициентами, и поэтому $G \subset Z(R)$. Пусть A — подкольцо, порожденное группой G. Тогда $R = A + J(R)$ и $A \subset Z(R)$. Следовательно, $R = Z(R) + J(R)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $r = z + j \in R^\circ$, где $z \in Z(R)$, $j \in \in J(R)$, и s — присоединенно обратный к r. Тогда $0 = r \circ s = z \circ s + j + js$ и, значит, $z \circ s = -j - js \in J(R)$. Следовательно, $z \circ s \in R^\circ$ и поэтому $z \in R^\circ$. Если y — присоединенно обратный к z, то $r = z + j = z \circ (j + yj)$ и, таким образом, группа R° разлагается в произведение групп $Z(R)^\circ$ и $J(R)^\circ$. Поскольку $J(R)^\circ$ нильпотентна, группа R° также нильпотентна.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда конечное кольцо не порождается своей присоединенной группой.

Лемма 4.3. *Пусть кольцо R конечно и прямо неразложимо. Если группа R° нильпотентна и не порождает R как кольцо, то* $R/J(R) \cong \mathbb{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}_2$.

Доказательство. Как следует из леммы 2.3, группа R° не порождает R как кольцо только тогда, когда в разложении фактор-кольца $R/J(R)$ есть поля из двух элементов. Согласно лемме 4.1 это влечет, что R^+ является 2-группой, $J(R)^\circ$ — силовская 2-подгруппа в R° и $R^\circ = G \times J(R)^\circ$, где $G \subset \subset Z(R^\circ)$.

Покажем, что $G \subset Z(R)$. Поскольку $G \subset Z(R^\circ)$, каждый элемент из G перестановочен с каждым элементом из $J(R)$. Учитывая, что фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, получаем, что для любого $g \in G$ и для любого $r \in R$ существует такой элемент $j \in J(R)$, что $g \circ r \circ g' = r + j$, где g' — присоединенно обратный к g. Предположим, что порядок элемента j в R^+ равен 2^k. Тогда $\underbrace{g \circ \ldots \circ g}_{2^k} \circ r \circ \underbrace{g' \circ \ldots \circ g'}_{2^k} = r + 2^k j = r$. Поскольку порядок G нечетный, то $g \circ r \circ g' = r$. Таким образом, $G \subset Z(R)$.

Согласно лемме 3.1 фактор-кольцо $R/J(R)$ разложимо в прямую сумму полей, и поэтому его можно представить в виде $R/J(R) = S_1 \oplus S_2$, где S_1 — прямая сумма полей, каждое из которых отлично от поля $\mathbb{F}_2$, и $S_2 = L/J(R)$. Пусть K — идеал в R такой, что $K/J(R) = S_1$. Так как $S_2^\circ = 0$, то $R^\circ/J(R)^\circ \cong \cong K^\circ/J(R)^\circ$ и, значит, $R^\circ = K^\circ$. Ясно, что группа K° нильпотентна и согласно лемме 2.3 порождает K как кольцо. Следовательно, $K = A + J(R)$, где $A = \langle G \rangle$ и $A \subset Z(R)$. Из этого разложения и леммы 4.2 следует, что каждый идемпотент кольца K лежит в центре R. Согласно лемме 2.4 в центре R лежат только тривиальные идемпотенты. Таким образом, возможны два случая: либо единственным идемпотентом кольца K есть 0 и тогда $R = L$, либо K содержит единицу кольца R и тогда $S_2 = 0$. Последнее, однако, невозможно, поскольку в разложении фактор-кольца $R/J(R)$ есть поля из двух элементов. Следовательно, $R = L$.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* B.** Кольцо R разлагается в прямую сумму конечного числа прямо неразложимых колец

$$R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n.$$

Если некоторое R_i порождается своей присоединенной группой R_i°, то в силу теоремы 4.1 $R_i = Z(R_i) + J(R_i)$. В противном случае согласно лемме 4.3 имеем $R_i/J(R_i) \cong \mathbb{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}_2$ и, таким образом, R_i содержится в идеале L кольца R, который был определен во введении. Поскольку $Z(R) = Z(R_1) \oplus \ldots \oplus Z(R_n)$ и $J(R) = J(R_1) \oplus \ldots \oplus J(R_n)$, то $R = Z(R) + L$.

Обратно, пусть $R = Z(R) + L$. Чтобы доказать, что группа R° нильпотентна, достаточно ограничиться случаем, когда кольцо R неразложимо в прямую сумму идеалов. Пусть $r = z + l \in R^\circ$, где $z \in Z(R)$, $l \in L$, и s — присоединенно обратный к r. Поскольку $s = z' + l'$, где $z' \in Z(R)$, $l' \in L$, то $0 = r \circ s = z \circ z' + + l \circ l' + zl' + z'l$ и, значит, $z \circ z' = m \in L$. Из определения идеала L следует, что $m^2 = m + j$ для некоторого $j \in J(R)$. Поэтому согласно лемме 4.2 существует такое число k, что $(m^2)^k = m^k$. Следовательно, $e = m^k$ — центральный идемпотент кольца R. В силу леммы 2.4 имеем либо $e = 1$, либо $e = 0$.

В первом случае $1 \in L$, так что $R = L$ и, таким образом, $R^\circ = L^\circ = J(R)^\circ$ — нильпотентная группа. Во втором же случае $m^k = 0$ и поэтому $z \circ z' = m \in R^\circ$. Но тогда элемент z присоединенно обратим, и если y — присоединенно обратный к z, из равенства $r \circ y = (z + l) \circ y = l + ly$ следует, что $l + ly \in L \bigcap R^\circ = L^\circ$. Поскольку $L^\circ = J(R)^\circ$, то $l + ly \in J(R)$ и, значит, $l \in J(R)$. Следовательно, группа R° разлагается в произведение групп $Z(R)^\circ$ и $J(R)^\circ$. Далее, так как $J(R)^\circ$ нильпотентна, группа R° также нильпотентна.

1. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. – М.: Мир, 1972. – 160 с.
2. *Fisher I., Eldridge K. E.* D.C.C. rings with a cyclic group of units // Duke Math. J. – 1967. – **34**. – P. 243 – 248.
3. *Fisher I., Eldridge K. E.* Artinian rings with cyclic quasi-regular groups // Ibid. – 1969. – **36**, № 1. – P. 43 – 47.
4. *Groza G.* Artinian rings having a nilpotent group of units // J. Algebra. – 1989. – **121**, № 2. – P. 253 – 262.
5. *Gupta N., Levin F.* On the Lie ideals of a ring // Ibid. – 1983. – **81**, № 1. – P. 225 – 231.
6. *Jacobson N.* Structure of rings // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – 1964. – **37**.
7. *Jennings S. A.* Radical rings with nilpotent associated groups // Trans. Roy. Soc. Can. – 1955. – **49**, № 3. – P. 31 – 38.
8. *Du X.* The centers of a radical ring // Can. Math. Bull. – 1992. – **35**. – P. 174 – 179.
9. *Catino F., Miccoli M. M.* Local rings whose multiplicative group is nilpotent // Arch. Math. (Basel). – 2003. – **81**, № 2. – P. 121 – 125.
10. *Amberg B., Sysak Ya. P.* Associative rings whose adjoint semigroup is locally nilpotent // Ibid. – 2001. – **76**. – P. 426 – 435.
11. *Мальцев А.* Нильпотентные полугруппы // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. Сер. физ.-мат. науки. – 1953. – **4**. – С. 107 – 111.
12. *Stewart I.* Finite rings with a specified group of units // Math. Z. – 1972. – **126**, № 1. – S. 51 – 58.
13. *Хузурбазар М. И.* Мультипликативная группа тела // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 6. – С. 1268 – 1271.

Получено 20.09.2004