УДК 517.95

В. П. Бурский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
А. С. Жеданов (Донецк. физ.-техн. ин-т НАН Украины)

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ, ПРОБЛЕМЕ ПОНСЕЛЕ, УРАВНЕНИИ ПЕЛЛЯ – АБЕЛЯ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ СВЯЗАННЫХ С НИМИ ЗАДАЧАХ*

In a plane domain bounded by a bi-square curve, we consider a problem of the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for the equation of string vibration. We show that this problem is equivalent to the classical Poncelet problem in the projective geometry for two appropriate ellipses and also to the problem of solvability of the Pell – Abel algebraic equation. Some other problems are associated with two last-mentioned problems.

У плоскій області, що обмежена біквадратною кривою, розглядається проблема єдиності розв'язку задачі Діріхле для рівняння коливання струни. Показано, що ця проблема еквівалентна класичній проблемі Понселе з проективної геометрії для двох придатних еліпсів, а також проблемі розв'язності алгебраїчного рівняння Пелля – Абеля, з якими пов'язані деякі інші задачі.

В настоящей работе показаны связи между свойствами граничных задач для уравнения колебания струны в области, ограниченной биквадратной кривой, и некоторыми классическими задачами алгебры, геометрии и анализа, недавно обнаруженные авторами.

1. Граничные задачи. ***1.1. Исторические сведения.*** Исследования некорректных граничных задач восходят к Ж. Адамару [1], впервые заметившему, что однородная задача Дирихле для уравнения колебания струны в некотором прямоугольнике допускает нетривиальное решение. Исследования А. Губера [2] и затем Д. Барджина и Р. Даффина [3] привели к установлению условия нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в прямоугольнике $\{ 0 \le t \le T;\ \ 0 \le x \le X\}$. Оказалось, что единственность решения такой задачи в классических пространствах нарушается тогда и только тогда, когда отношение T/X — рационально. В этих работах использовался метод разложения решения в ряд Фурье. В работах Б. И. Пташника и его учеников этот метод применен к изучению свойств различных других граничных задач для уравнений с частными производными в прямоугольнике и параллелепипеде [4]. В работе Ф. Джона [5] исследовалась проблема нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для уравнения колебания струны в общей плоской ограниченной области, выпуклой относительно обоих семейств характеристик, в связи с некоторым отображением границы области в себя (называемым характеристическим биллиардом, см. ниже), использованным ранее в указанных работах Ж. Адамара и А. Губера. Наблюдения за отмеченной связью продолжили Р. А. Александрян и его ученики, ориентируясь на задачу С. Л. Соболева о колебаниях поверхности полости жидкости в летящем теле [6 – 8]. В. И. Арнольд в работе [9] указал на связь указанной задачи Дирихле в эллипсе с проблемой малых знаменателей в контексте влияния на гладкость решения скорости приближений некоторого числа, связанного с задачей, рациональными числами. Некоторым вопросам этой тематики посвящены исследо-

* Частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 03-01-00780).

вания Ю. М. Березанского [10], Т. И. Зеленяка [11], М. В. Фокина [12] и др.

Опишем характеристический биллиард. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения колебания струны

$$u_{xy} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

$$u\big|_C = \varphi \in C^0(C) \quad \text{в} \quad C = \partial\Omega \tag{1.2}$$

в плоской области, выпуклой относительно семейств характеристик $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и ограниченной замкнутой жордановой кривой C. Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ — произвольная точка на границе C. Чтобы построить отображение I_1, проведем через точку M_0 прямую $x = x_0$. В силу условия выпуклости эта характеристика пересекает кривую C и в другой точке N_0. Отображение I_1 по определению переводит точку M_0 в $N_0 = (x_0, y_1)$ с некоторым y_1. Очевидно, это — инволюция, т. е. $I_1 \circ I_1 = \text{id}_C$. Инволюция I_2 строится аналогично по горизонтальным характеристикам, т. е. точку N_0 отображение I_2 переводит в точку $M_1 = (x_1, y_1)$. Наконец, отображение T, которое будем называть отображением Джона, определяется как композиция $T = I_2 \circ I_1$. Под характеристическим биллиардом понимается дискретная динамическая система, порожденная отображением T. Точка M называется периодической периода $N \in \mathbb{N}$ для отображения T, если $T^N M = M$.

В работе [5] проблема нарушения единственности решения однородной задачи (1.1), (1.2) изучалась в связи с топологическими свойствами отображения T; для сохраняющего ориентацию отображения T было выделено четыре случая поведения динамической системы:

1) все точки периодичны (тогда их периоды совпадают);

2) имеются периодические и непериодические точки;

3) нет периодических точек и нет точки, орбита которой $\{\ldots, T^{-1}P, P, TP, \ldots, T^nP, \ldots\}$ плотна в C;

4) нет периодических точек и есть точка, орбита которой плотна в C (действие группы $\mathbb{Z}$ на C — транзитивно).

Было показано [5], что для C^2-гладкой границы случай 3 невозможен. Для случая 2 доказано, что на C найдется дуга D_0 такая, что никакие две из дуг $D_0, I_1D_0, TD_0, I_1TD_0, T^2D_0, \ldots, I_1T^{n-1}D_0, T^nD_0, \ldots$ не имеют общих точек. Ясно, что для аналитической границы это невозможно, поскольку T — диффеоморфизм. В случае 4 показано, что вращение Данжуа – Пуанкаре ξ [13] отображения Джона T — иррационально, а T — топологически эквивалентно повороту окружности на угол $\pi\xi$ (т. е. существует гомеоморфизм h границы C на единичную окружность S такой, что отображение $hTh^{-1}: S \to S$ является поворотом на угол $\pi\xi$). Доказано следующее достаточное условие единственности решения задачи (1.1), (1.2): если множество периодических точек отображения T пусто, конечно или счетно, то задача (1.1), (1.2) имеет не более чем одно решение.

1.2. Намерения. В данной работе будем рассматривать однородную задачу Дирихле

$$u\big|_C = 0, \qquad C = \{(x, y) \,\big|\, F(x, y) = 0\}, \tag{1.3}$$

для уравнения колебания струны (1.1) в плоской области, ограниченной биквадратной кривой

$$F(x, y) := \sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} x^i y^k = 0, \tag{1.4}$$

которую вещественными проективными заменами (см. ниже (5.1)) можно привести к форме Эйлера – Бакстера [14, 15]:

$$F(x, y) = x^2 y^2 + 1 + a(x^2 + y^2) + 2bxy = 0 \tag{1.5}$$

с вещественными a и b, подчиненными условиям ограниченности $a > 0$ и неисчезания $(|b| - a)^2 > 1$. Последнее условие разбивается на два: $b^2 > (a+1)^2$ и $b^2 < (a-1)^2$.

Мы хотим доказать, что задача (1.1), (1.3) имеет нетривиальное решение в пространстве $C^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

PJ) *у отображения* T *существует хотя бы одна периодическая точка*.

В этом случае все точки из C окажутся периодическими и, тем самым, имеет место случай 1. Мы увидим также, что условие PJ) является необходимым и достаточным для существования непостоянного решения задачи Неймана

$$u_{\nu_*}\big|_{\partial\Omega} = \psi, \tag{1.6}$$

где u_{ν_*} — производная по конормали ν_*, и оно равносильно условию недетерминированности

$$\exists \alpha \ \forall N = 0, 1, \ldots : \int_C \alpha(s)(x(s))^N ds = 0, \qquad \int_C \alpha(s)(y(s))^N ds = 0 \tag{1.7}$$

следующей проблемы моментов на кривой C:

по данным числам μ_N, ν_N найти функцию α такую, что

$$\forall N = 0, 1, \ldots : \int_C \alpha(s)(x(s))^N ds = \mu_N, \qquad \int_C \alpha(s)(y(s))^N ds = \nu_N. \tag{1.8}$$

(Эта проблема моментов превратится в обычную тригонометрическую, если положить, что C — единичная окружность, и заменить $x(s)^N = \cos^N(s)$, $y(s)^N = \sin^N(s)$ на $\cos Ns$ и $\sin Ns$ соответственно.)

Доказательство этих фактов основано на связи с известной проблемой Понселе, которой посвящен следующий пункт. Отметим, что в работе [16] было установлено, что в области, ограниченной биквадратной кривой (1.4), осуществляется либо случай 1, либо случай 4 приведенной выше классификации поведения динамической системы, порожденной отображением Джона, но не доказано существование решения задачи (1.1), (1.3) в случае 1.

2. Проблема Понселе. Проблема Понселе (поризм Понселе) — одна из знаменитых проблем проективной геометрии, связанная со многими другими задачами анализа и физики (см., например, [14, 17, 18]).

2.1. Постановка. Изложим проблему в постановке Понселе. Пусть на плоскости имеются два эллипса A и B, для простоты вначале предполагаем, что один (A) расположен внутри другого (B), и P_0 — произвольная точка на B. Проведем через точку P_0 прямую (с другой точкой пересечения, ближайшей по ориентации), касательную к эллипсу A с точкой касания N_0. Она пересечет эллипс B в некоторой точке P_1. Из точки P_1 проведем вторую касательную к эллипсу A и получим точку $P_2 = UP_1$. Тем самым мы определили отображение $U: B \to B$, которое будем называть отображением Понселе. Отображение Понселе порождает дискретную динамическую систему или действие группы $\mathbb{Z}$ на B с орбитой $\ldots, U^{-1}P, P, P, UP, \ldots, U^nP, \ldots$ точки P так же, как и в п. 1 для отображения Джона. Кроме того, имеется динамическая система на эллипсе A, порожденная отображением $V : A \to A$, орбитами которой являются точки касания $N_{-1}, N_0, N_1, \ldots$. Теорема Понселе утверждает, что если найдется периодическая точка $P \in B$ отображения U периода N, то и каждая точка на эллипсе B является периодической того же периода N [17, 19]. Проективное преобразование плоскости не меняет отношений инцидентности и касания, поэтому можно говорить не об эллипсах, заданных первоначально, а, например, о гиперболе (с двумя ветвями) и эллипсе, гиперболе и параболе, и, вообще, о двух непересекающихся и некасающихся кониках. Проективным преобразованием плоскости можно привести пару коник к той или иной канонической форме. Если две коники пересекаются и из них выделена одна, которая порождает пучок касательных прямых, пересекающих вторую, то отображение Понселе определено лишь на части второй коники, лежащей снаружи первой, поскольку внутрь первой коники касательные не заходят. Отметим, что современный взгляд на проблему Понселе содержится в работе [20].

2.2. Поризм Понселе в форме двух окружностей. Это наиболее известная форма, где в качестве эллипсов используются окружности. Нетрудно видеть, что наличие периодической точки на окружности B периода N означает, что отрезки, соединяющие последовательные точки орбиты, образуют N-угольник, в который вписана окружность A и вокруг которого описана окружность B. Заметим, что стороны в таком многоугольнике могут пересекаться и вписанная окружность не обязательно должна касаться отрезка между точками и может касаться продолжения такого отрезка, а потому может пересекаться с описанной окружностью. Многоугольник, у которого имеются и вписанная, и описанная окружности, называется бицентрическим. Бицентрические многоугольники — популярный объект исследования в геометрии. Если обозначить через R радиус описанной окружности, через r радиус вписанной окружности, через d расстояние между их центрами, то эти три числа не могут быть произвольными, и вместе с N они должны удовлетворять некоторым алгебраическим соотношениям. Так, для треугольника известна связь $R^2 - 2Rr - d^2 = 0$, называемая иногда формулой Эйлера. Одна из популярных форм записи подобных связей дается в терминах дополнительных величин

$$a = \frac{1}{R+d}, \qquad b = \frac{1}{R-d}, \qquad c = \frac{1}{r}.$$

Так, для треугольника уже отмеченная связь имеет вид $a + b = c$, для четырехугольника — $a^2 + b^2 = c^2$, для пятиугольника — $4(a^3 + b^3 + c^3) = (a + b + c)^3$. В общем случае последовательно вводятся числа

$$\lambda = 1 + \frac{2c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)}, \qquad \omega = \cosh^{-1}\lambda,$$

$$k^2 = 1 - e^{-2\omega}, \qquad K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}$$

и затем соотношение записывается с использованием эллиптических функций $(\mathrm{sc} = \mathrm{sn}/\mathrm{cn})$ в виде [21]

$$\mathrm{sc}\left(\frac{K}{N}, k\right) = \frac{c\sqrt{b^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - a^2}}{a(b+c)}. \tag{2.1}$$

2.3. Намерения. Мы хотим показать, как по заданным двум коникам построить биквадратную кривую (1.4) и при некоторых предположениях доказать, что условие $PJ)$ для построенной кривой равносильно условию

PP) у отображения Понселе U существует хотя бы одна периодическая точка.
Кроме того, мы хотим указать некоторую иную форму условия периодичности, записанную в виде рациональности некоторого числа, связанного с задачей.

3. Уравнение Пелля – Абеля и некоторые связанные с ним проблемы. Уравнение Пелля

$$P^2 - RQ^2 = L \tag{3.1}$$

— широко известное диофантово уравнение, где по заданному целому числу R, не являющемуся точным квадратом, нужно найти целые P, Q, L, удовлетворяющие этому уравнению. Утверждается, что Л. Эйлер по недоразумению связал его с Пеллем, именем которого и названо это уравнение. На самом деле уравнение (3.1) изучали еще индийский математик Брахмагутпа за 1000 лет до этого (628 г.), а также предшественники Эйлера, среди которых П. Ферма. Стандартная теория уравнения (3.1) [22] устанавливает связь с разложением в цепную дробь числа $\sqrt{R}$. Такая цепная дробь периодична, как и цепное разложение любой квадратичной иррациональности, с некоторым периодом k. Тогда: 1) решений либо нет, либо бесконечно много; 2) при $L = 4$ решения всегда есть; 3) при $L = -1$ решения существуют тогда и только тогда, когда k — четное; 4) если P_s/Q_s — подходящая дробь, то положительные решения имеют вид $P = P_{kn-1}$, $Q = Q_{kn-1}$, где n — любое натуральное число такое, что kn — четное; 5) общее решение можно получить из формулы

$$P + Q\sqrt{R} = \pm(P_0 + Q_0\sqrt{R})^n,$$

где n — любое целое, (P_0, Q_0) — решение с наименьшими положительными числами.

Уравнение (3.1) в кольце полиномов $\mathbb{R}[t]$ или $\mathbb{C}[t]$ одной переменной с постоянным значением L называют уравнением Пелля – Абеля (встречаются также названия „уравнение Абеля" и „уравнение Пелля для полиномов"). Это уравнение появилось у Абеля при изучении проблемы представления в элементарных функциях первообразной $\int \frac{\rho(t)}{\sqrt{R(t)}}\,dt$, где ρ, R — полиномы [23]. Абель доказывает, что если эта первообразная представляется через логарифмы и рациональные функции t и $\sqrt{R}$, то обязательно найдутся полиномы P, Q и число A такие, что

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{R}}\,dt = A \ln \frac{P + \sqrt{R}Q}{P - \sqrt{R}Q}. \tag{3.2}$$

При этом степень R — четная: $\deg R = 2m$, $\deg \rho = m - 1$ и $\rho/A = 2P'/Q$, а полиномы P и Q удовлетворяют уравнению (3.1) с $L = 1$. (Позже Ж. Лиувилль и его последователи показали, что если интеграл в левой части (3.2) с некоторыми ρ и R выражается через элементарные функции, то правая часть должна иметь вид (3.2) с некоторыми P и Q и тем же ρ, см. [24].) Обратно, если полиномы P и Q удовлетворяют уравнению (3.1) с $L = 1$, то имеет место равенство (3.2) с $\rho = 2P'/Q$ и $A = 1$. Таким образом, разрешимость уравнения Пелля – Абеля выступает в роли критерия интегрируемости абелевого дифференциала. Кроме того, Абель получил другой критерий представимости интеграла в (3.2), а именно, формула (3.2) справедлива тогда и только тогда, когда цепное разложение функции $\sqrt{R}$ — периодично. Тем самым разрешимость уравнения Пелля – Абеля выступает в качестве критерия периодичности цепного разложения.

Рассмотрим еще одну классическую задачу — задачу Чебышева о нахождении полинома наименьшего уклонения на подмножестве вещественной оси. Пусть $I = [-1, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} (a_j, b_j)$ — система l замкнутых интервалов. Нужно найти полином заданной степени n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля на множестве I, т. е. найти минимум функционала $\| t^n - P_{n-1}(t) \|_{C(I)}$. Общий полином $P_{n-1}(t)$ пробегает конечномерное линейное подпространство, и задача может быть интерпретирована как задача о нахождении элемента из конечномерного подпространства банахового пространства, ближайшего к заданному. Но поскольку пространство $C(I)$ — нерефлексивно, такой элемент не обязательно существует. Методом, восходящим к П. Л. Чебышеву, удается, однако, доказать существование такого минимального многочлена [25]. Если на множестве I полином P_{n-1} — минимален, то, возможно, он остается минимальным и на некотором более широком замкнутом подмножестве $E \subset [-1, 1]$, называемом n-расширением множества I. Такое подмножество $E = [-1, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} (\alpha_j, \beta_j)$, которое нельзя расширить, т. е. у которого нет других расширений, называется n-правильным [26]. Если теперь выбрать полином R в виде

$$R = (t^2 - 1) \prod_{j=1}^{m-1} (t - \alpha_j)(t - \beta_j),$$

то разрешимость уравнения Пелля – Абеля (3.1) с неизвестными $P(t)$, $Q(t)$, $L = \text{const} > 0$ равносильна n-правильности множества E, при этом полином P дает решение экстремальной задачи, а число $\sqrt{L}$ — минимальное уклонение (минимум нормы) [26]. Интересно, что при этом множество E представляет собой непрерывный спектр (который является абсолютно непрерывным и двукратным) некоторой бесконечной в обе стороны якобиевой (трехдиагональной) самосопряженной вещественной периодической матрицы в l^2 тогда и только тогда, когда множество E — n-правильно или когда уравнение Пелля – Абеля (3.1) разрешимо (см. ссылки в [26]). Заметим, что известная задача Чебышева ставится для случая одного интервала $E = [-1, 1]$, $R = (1 - t^2)$, а задача Ахиезера — для случая двух интервалов ($\deg R = 4$) и полинома четвертой степени $E = [-1, a] \cup [b, 1]$, $a < b$, $R = (1 - t^2)(t - a)(t - b)$. Кроме того, имеется несколько различных критериев разрешимости уравнения Пелля – Абеля с полиномом, соответствующим задаче Ахиезера, среди которых — известный „дикобраз” Золотарева (см., например, [27]).

3.1. Намерения. Мы хотим показать, как при некоторых предположениях по заданным двум коникам можно построить полином четвертой степени R такой, что разрешимость уравнения Пелля – Абеля будет равносильна условию периодичности PP) проблемы Понселе с четным периодом (и поэтому условию нетривиальной разрешимости граничной задачи (1.1), (1.3)).

4. Связь между задачей Понселе и задачей Дирихле. Рассмотрим стандартную рациональную параметризацию коники [17]. Пусть эллипс A описывается в плоских координатах ξ, η уравнением

$$A_1 \xi^2 + A_2 \eta^2 + A_3 \xi\eta + A_4 \xi + A_5 \eta + A_6 = 0, \tag{4.1}$$

тогда существуют полиномы $E_0(x)$, $E_1(x)$, $E_2(x)$ степени $\deg(E_i(x)) \le 2$ такие, что

$$\xi = \frac{E_1(x)}{E_0(x)}, \qquad \eta = \frac{E_2(x)}{E_0(x)}. \tag{4.2}$$

Кроме того, пусть эллипс B описывается уравнением

$$B_1\xi^2 + B_2\eta^2 + B_3\xi\eta + B_4\xi + B_5\eta + B_6 = 0 \tag{4.3}$$

и существуют другие полиномы $F_i(y)$ степени не больше 2 такие, что

$$\xi = \frac{F_1(x)}{F_0(x)}, \qquad \eta = \frac{F_2(x)}{F_0(x)}. \tag{4.4}$$

Тогда значение параметра x полностью характеризует точку на конике A, а значение параметра y — на B. Касательная L_1 к конике A в точке x_1 с аффинными координатами $\xi_1(x_1)$, $\eta_1(x_1)$ описывается уравнением

$$(\xi - \xi_1)\left.\frac{d\eta}{dx}\right|_{x=x_1} = (\eta - \eta_1)\left.\frac{d\xi}{dx}\right|_{x=x_1}. \tag{4.5}$$

Чтобы найти точки пересечения касательной L_1 с кривой B, нужно подставить в равенство (4.5) вместо ξ, η их выражения из (4.4). Опуская вычисления, запишем окончательный результат: для заданной точки x_1 на конике A точки y_1 и y_2 пересечения касательной L_1 с B определяются как два корня квадратного уравнения

$$Z(x_1, y) = 0, \tag{4.6}$$

где полином $Z(x, y)$ имеет вид

$$Z(x, y) = F_0(y)M_0(x) + F_1(y)M_1(x) + F_2(y)M_2(x), \tag{4.7}$$

причем полиномы $M_i(y)$ определяются формулами

$$M_i(x) = \varepsilon^{ikl}\big(E_k'(x)E_l(x) - E_k(x)E_k'(x)\big), \qquad i, k, l = 0, 1, 2. \tag{4.8}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x, а $\varepsilon^{ikl} = \operatorname{sign}(ikl)$ — стандартный антисимметрический тензор. Нетрудно показать, что $\deg\big(M_i(x)\big) \le 2$. Кроме того, для заданной точки с параметром y_1 на конике B параметры точек x_1 и x_2 касания касательных L_1, L_2 к A, проходящих через y_1, определяются как два корня квадратного уравнения $Z(x, y_1) = 0$. Эти корни не могут быть комплексными, так как они являются вещественными параметрами на исходных вещественных кониках. Отметим, что аналогичные соображения использовались в работе [20]. Авторы также вводят две инволюции I_1, I_2 и композицию I_2I_1, которые эквивалентны соответствующим инволюциям и отображению Джона на некоторой эллиптической кривой. В нашем подходе кривая $Z(x, y) = 0$ записывается явно, и мы доказываем существование нетривиального решения задачи Дирихле в периодическом случае.

Таким образом, можно приложить T-алгоритм к нахождению последовательностей точек x_n и y_n на кониках A и B. Периодические орбиты проблемы Понселе при этом соответствуют периодическим орбитам динамической системы отображения Джона, причем движение от точки P_0 к точке P_1 коники B соответствует движению от точки M_0 к точке N_0 кривой (1.4) по вертикальной характеристике, а движению от точки P_1 к следующей точке P_2 на B соответствует движение от точки N_0 к точке M_1 по горизонтальной характеристике.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Проблема Понселе для двух заданных коник удовлетворяет условию периодичности PP) тогда и только тогда, когда условию PJ) удовлетворяет отображение T на соответствующей части кривой* (1.4). *При* *этом точкам* $\ldots, T^{-1}M, M, TM, \ldots, T^nM, \ldots$ *орбиты отображения Джона соответствуют точки с четными номерами* $\ldots, U^{-2}P, P, U^2P, \ldots, U^{2n}P, \ldots$ *орбиты отображения Понселе*.

Из этой теоремы, в частности, следует, что в периодическом случае четному периоду $2N$ проблемы Понселе соответствует период N отображения Джона, а нечетному периоду $2N+1$ проблемы Понселе — такой же период $2N+1$ отображения Джона (при однозначном соответствии частей коник и кривой).

Поскольку свойство периодичности в проблеме Понселе инвариантно относительно проективных преобразований проскости (ξ, η), можно редуцировать коники A и B к простому случаю. Рассмотрим следующую возможность. Переведем проективными заменами коники A и B к двум концентрическим эллипсам

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1, \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

из которых A является единичной окружностью (вначале две квадратичные формы от трех проективных переменных одним линейным преобразованием приведем к главным осям, а затем выберем подходящие аффинные координаты и осуществим растяжения). Заметим, что не любая пара коник может быть вещественным проективным преобразованием сведена к этому случаю; это возможно только для коник, пересекающихся в четырех точках, или касающихся в двух точках, или непересекающихся вовсе. Введем стандартную параметризацию

$$\xi = \frac{2a_1 y}{1+y^2}, \quad \eta = \frac{b_1(1-y^2)}{1+y^2}; \quad \xi = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \eta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

коник B и A. Можно проверить, что в этом случае кривая $Z = 0$ с полиномом $Z(x, y)$, определенным в (4.7), запишется в форме Эйлера – Бакстера (1.5):

$$x^2y^2 + 1 + \frac{1+b_1}{1-b_1}(x^2+y^2) - \frac{4a_1}{1-b_1}xy = 0. \tag{4.9}$$

Условие ограниченности $a > 0$ будет выполнено, если будет выполняться неравенство $b_1^2 < 1$, а условие неисчезания выполняется при $a_1 > 1$. Поэтому ограниченная кривая (1.5) получится только в случае, когда имеются четыре точки пересечения и две связные компоненты эллипса B вне окружности A, в которых происходит процесс. Мы можем рассматривать процесс Понселе только в одной компоненте, параметризуя лишь ее. Заметим, что точки пересечения эллипса и окружности попадают под рассмотрение и переходят в вершины кривой (1.5), равно как и точки на B, в которых эллипса B касаются общие с окружностью касательные (вершины — крайние точки кривой, неподвижные под действием одной из инволюций I_1 или I_2; у ограниченной аналитической кривой C, выпуклой относительно характеристик, их ровно четыре).

Параметры a_i и b_i в уравнениях эллипсов

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1, \qquad \frac{\xi^2}{a_2^2} + \frac{\eta^2}{b_2^2} = 1$$

можно и дальше изменять растяжением. Например, можно добиться равенства $a_1 = b_1 = 1$, переводя B в единичный круг. В этом случае точки x_n изоморфны распределению спинов в периодической модели классической XY-цепочки [18]. Другой возможный выбор $a_2^2 - a_1^2 = b_2^2 - b_1^2$ соответствует конфокальным квадрикам; в этом случае проблема Понселе эквивалентна эллиптическому упругому биллиарду [15], связанному со спектральными задачами. Отметим, что задача о существовании бицентрического многоугольника приводит к неограниченной кривой (1.5) с параметром $a < 0$. Чтобы находиться в рамках предположений Джона [5], мы опускаем этот случай из рассмотрения, осознавая, однако, что его исследование можно провести тем же способом.

Переход от отображения Понселе к отображению Джона и обратно получит бóльшую прозрачность, если рассмотреть преобразование $V: (x, y) \to (u, v)$, заданное формулами $u = x + y$, $v = xy$. Это преобразование переводит биссектрису $x = y$ в параболу $D = \{(u, v) \,|\, v = u^2/4\}$, причем левая $x \le y$ и правая $x \ge$ $\ge y$ полуплоскости диффеоморфно отображаются на внешность D^- параболы D и точки, симметричные относительно диагонали $x = y$, имеют один образ, т. е. происходит склейка и изгиб. При отображении V пучок вертикальных прямых $x = x_0$ переходит в пучок E прямых $v = x_0 u - x_0^2$, огибающей которого является парабола D. Пучок горизонтальных прямых $y = y_0$ переходит в тот же пучок E прямых, прямые $x = c$ и $y = c$ имеют один образ. Кривая Эйлера – Бакстера (1.5) переходит в квадрику $v^2 + au^2 + 2(b - a)v + 1 = 0$ или

$$(v + b - a)^2 + au^2 = (b - a)^2 - 1. \tag{4.10}$$

Из последнего уравнения видно, что условием ограниченности кривой (4.10) является условие $a > 0$, а условием неисчезания — условие $(b - a)^2 > 1$. Поэтому условием ограниченности кривой (1.5) является условие $a > 0$, поскольку $V^{-1}(D)$ — ограниченное множество, когда D — ограниченно. Для неисчезания кривой (1.5) к условию неисчезания кривой (4.10) $(b - a)^2 > 1$ надо добавить условие невключения кривой (4.10) в область D^+ — внутренность параболы D. Расчеты показывают, что условие неисчезания кривой (1.5) при условии $a > 0$ имеет вид $(|b| - a)^2 > 1$.

Любая прямая пучка E касательна к параболе D, и если она пересекает эллипс (4.10), то отображение Понселе, построенное по эллипсу и параболе, переводит одну точку этого пересечения в другую, а эту другую — в точку пересечения второй касательной к параболе. Точка, через которую проходит общая с параболой касательная, имеет прообразом при отображении V некоторую вершину кривой (1.5), т. е. крайнюю точку для семейств характеристик — сверху, снизу, справа или слева, всего гладкая кривая с выпуклой относительно характеристик областью имеет четыре вершины. Если эллипс и парабола не пересекаются, то таких общих касательных — четыре. Если пересечение состоит из двух точек, то общих касательных — две, но каждая точка пересечения эллипса (4.10) с параболой D также имеет прообразом при отображении V некоторую вершину кривой C. Аналогично при пересечении, состоящем из четырех точек, каждая из них является образом некоторой вершины.

5. Условие периодичности. Уравнение кривой (1.4) содержит 8 параметров. Проективные преобразования комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$

$$x \to \frac{\xi_1 x + \eta_1}{\mu_1 x + \nu_1}, \quad y \to \frac{\xi_2 x + \eta_2}{\mu_2 x + \nu_2} \tag{5.1}$$

не меняют вида уравнения кривой (1.4) и содержат 6 свободных параметров, поэтому кривую (1.4) в общем положении таким преобразованием можно свести к кривой в форме (1.5) Эйлера – Бакстера [14, 15]: $F(x, y) = x^2y^2 + 1 + a(x^2 +$ $+ y^2) + 2bxy = 0$, где a, b — 2 оставшихся свободных (комплексных) параметра.

В случае вещественных преобразований (5.1) могут появиться минусы перед

y^2 и 1. Ниже мы ограничимся исследованием случая вещественной кривой вида (1.5), т. е. полагаем коэффициенты a и b вещественными. Кроме того, имея в виду связь с граничными задачами в вещественной ограниченной области, будем предполагать, что выполнены условие ограниченности $a > 0$ всей кривой C и условие неисчезания $(|b| - a)^2 > 1$. В этих предположениях график кривой представляет собой два овала во втором и четвертом квадранте при $b < 0$ и в первом и третьем — при $b > 0$, симметричные относительно начала координат. При этом граничные задачи можно рассматривать только в одном из них. При преобразовании V из предыдущего пункта оба овала переходят в эллипс (4.10) или, точнее, в его внешнюю по отношению к параболе D часть. Случаи -1 и $-y^2$ в уравнении (1.5) требуют изменений в следующих ниже формулах и будут исследованы позже. В случае $a < 0$ также может появиться ограниченный овал возле начала координат в качестве связной компоненты вещественной кривой вместе с двумя бесконечными ветвями, но и этот случай мы здесь не рассматриваем.

Кривая (1.5) играет важную роль в получении теорем сложения для эллиптических функций [28]. Она также естественно появляется в подходе Бакстера в 8-вершинной модели в статистической механике [14]. Следуя [14], параметризуем кривую (1.5) посредством эллиптических функций Якоби с некоторым комплексным параметром t:

$$x = \varphi(t) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t; k), \qquad y = \varphi(t+\eta) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t+\eta; k), \tag{5.2}$$

где параметры k, η определяются из соотношений

$$k + k^{-1} = \frac{b^2 - 1 - a^2}{a}, \qquad 1 + ka\,\mathrm{sn}^2(\eta; k) = 0. \tag{5.3}$$

Анализ этих соотношений на вещественность проведем ниже, а сейчас получим формулы для отображения Джона. Заметим, что каждому заданному $x = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t; k)$ соответствуют две точки на C с этим x и значениями y, соответствующими двум значениям η: $y_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t+\eta; k)$ и $y_2 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t-\eta; k)$ вследствие симметрии относительно перестановки $x \leftrightarrow y$. Эти значения $y_{1,2}$ соответствуют двум точкам пересечения вертикальных характеристик с кривой (1.5), поэтому отображения I_1, I_2 и отображение Джона действуют по правилам $I_1 : (x, y_2) \to (x, y_1)$, $I_2 : (x_2, y) \to (x_1, y)$, $T = I_2 I_1 : t \to t + 2\eta$. Теперь можно найти точки орбиты M_n динамической системы Джона:

$$M_n = \left(\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t + 2n\eta; k), \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(t + (2n+1)\eta; k)\right). \tag{5.4}$$

Условие периодичности (для некоторой точки $(I_2 I_1)^N M = M$) имеет вид

$$2\eta N = 4Km_1 + 2iK'm_2 \tag{5.5}$$

с некоторыми целыми m_1, m_2, где четверть-периоды K, K' можно найти через эллиптический интеграл Лежандра из п. 2: $K = K(k)$, $K' = K(k')$, $k' = (1 - k^2)^{1/2}$. Заметим, что условие типа (5.5) появилось, например, в работе [18] при изучении классических периодических XY-спиновых цепочек.

Вернемся к соотношениям (5.2), (5.3). В предположении $a > 0$ из первого равенства (5.3) и условия неисчезания получим вещественность и положительность k и можем выбрать $k < 1$, т. е. имеем стандартную ситуацию. Отметим, что мы использовали условие неисчезания в виде $b^2 > (a+1)^2$. Вторая его часть $b^2 < (a-1)^2$, приводящая к случаю $k < 0$, не дает вещественной кривой. Из второго равенства (5.3) получим, что $\mathrm{sn}(\eta, k)$ является чисто мнимым. Это означает, что $\eta = 2mK + \theta i$ с некоторым целым m и вещественным θ (см. [29]). При этом x должно быть вещественным, значит, $t = nK'i + \tau$ либо $t =$

$= (2n+1)K + i\tau$ с некоторым целым n и вещественным τ. Но y также должно быть вещественным, значит, $t + \eta = K' n_1 i + \tau_1$ либо $t + \eta = (2n_1 + 1)K + i\tau_1$ с некоторым целым n_1 и вещественным τ_1. Складывая выражения для t и η, получаем, что возможен лишь вариант со вторыми формулами для t и $t+\eta$: $\tau_1 = \theta + \tau$. Итак, мы вынуждены полагать, что параметр t пробегает комплексные значения $t = \pm K' + i\tau$, при этом значения x, y в параметризации (5.2) вещественны при вещественном τ, а знак перед K определяет ветвь кривой. Функция φ теперь принимает вид $\varphi(t) = \sqrt{k}/\operatorname{dn}(\tau, k')$, а условие периодичности (5.5) запишется в виде $(m = m_2)$

$$\frac{\theta}{K'} = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}, \tag{5.6}$$

где число θ удовлетворяет равенству $\operatorname{sc}(\theta, k') = 1/\sqrt{ak}$.

В частности, мы получили, что при условии периодичности (5.6) каждая точка $M \in C$ является периодической того же периода N и никакая точка не является периодической в противном случае. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Отображение Джона на кривой* (1.5) *периодично тогда и только тогда, когда выполнено условие* (5.6).

Заметим, что минимальное натуральное число N со свойством (5.6) является периодом отображения Джона T, а число m характеризует число целых поворотов при отображении T^N.

6. Единственность решения задачи Дирихле. Сконструируем явное нетривиальное решение однородной задачи Дирихле (1.1), (1.3) в области, ограниченной кривой (1.5), при условии периодичности PJ) в форме (5.6). Для этого воспользуемся следующими фактами. Рассматриваемая симметричная относительно биссектрисы $x = y$ кривая C описывается параметрически уравнениями (5.2). Как следует из [30], для эллиптического синуса справедливы формулы мультипликативности:

$$\operatorname{sn}(2mz) = \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z\, S_m^1(\operatorname{sn}^2 z), \qquad \operatorname{sn}\big((2m+1)z\big) = \operatorname{sn} z\, S_m^2(\operatorname{sn}^2 z),$$

где $S_m^1(\zeta)$, $S_m^2(\zeta)$ — семейства рациональных функций (комплексной) переменной ζ. Поэтому функция $\varphi(z)$ из предыдущего пункта имеет свойства мультипликативности:

$$\begin{gathered}\varphi(mz) = G_m\big(\varphi(z)\big) := \sqrt{S_m(\varphi(z))}, \qquad m = 2, 4, 6, \ldots, \\ \varphi(mz) = R_m\big(\varphi(z)\big), \qquad m = 1, 3, \ldots,\end{gathered} \tag{6.1}$$

где $S_m(z)$, $R_m(z)$ — семейства рациональных функций.

В п. 5 мы видели, что отображение Джона T осуществляет сдвиг параметра на 2η. Решение задачи (1.1), (1.3) будем записывать в виде

$$u_n(x, y) = f_n(x) + g_n(y), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если выполнено условие периодичности* (5.5) *с некоторыми целыми m и N, то для каждого натурального n существует нетривиальное решение однородной задачи Дирихле* (1.1), (1.3) *вида* (6.2), *где*

$$f_n(x) = G_{2Nn}(x), \qquad g_n(y) = -G_{2Nn}(y), \tag{6.3}$$

а $G_n(z)$ — функции, определенные равенством (6.1).

Доказательство. Поскольку рациональные функции $R_n(z)$ не постоянны, функция $u(x, y) = f_n(x) + g_n(y) = G_{2Nn}(x) - G_{2Nn}(y)$ — ненулевая в области Ω и является решением уравнения (1.1). Проверим условие Дирихле $u(x, y) = 0$ на кривой C. Действительно, при условии периодичности для каждого t имеем

$$f_n(x(t)) + g_n(y(t)) = G_{2Nn}(x(t)) - G_{2Nn}(y(t)) =$$
$$= \varphi(2nNt) - \varphi(2nNt - 2nN\eta) = 0,$$

где использованы условие периодичности (5.5), свойство мультипликативности (6.1) и то, что число K — четверть-период функции φ. Заметим еще, что в силу ограниченности и гладкости функции φ функции $G_{2Nn}(x)$, $G_{2Nn}(y)$ ограничены и поэтому гладки.

Теорема доказана.

Напомним теперь, что согласно утверждению Джона в непериодическом случае задача Дирихле (1.1), (1.3) имеет только тривиальное решение (см. пп. 1.1). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2. *Условие периодичности* (5.6) *необходимо и достаточно для неединственности решения задачи Дирихле* (1.1), (1.2).

7. Связь с другими граничными задачами и обобщенной проблемой моментов. В работах [31, 32] было получено условие связи следов решения задачи Коши в ограниченной области для уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами, которым мы воспользуемся. С целью более компактных формулировок введем векторы $\tilde{a}^1 = (1, 0)$, $\tilde{a}^2 = (0, 1)$.

Рассмотрим переопределенную граничную задачу в некоторой ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$:

$$Lu = u''_{x_1x_2} = 0, \tag{7.1}$$

$$u'_s\big|_{\partial\Omega} = \gamma, \qquad u'_{\nu_*}\big|_{\partial\Omega} = \kappa \tag{7.2}$$

в соболевском пространстве $H^m(\Omega)$, $m \geq 3$, где ν_* — вектор конормали и производная по конормали имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\nu_*} = l(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu} - \frac{1}{2k}[l(\nu(s))]'_s\frac{\partial}{\partial s},$$

$l(\xi) = \xi_1\xi_2$ — символ оператора L, k — кривизна, s — натуральный параметр на $\partial\Omega$. Имеют место следующие утверждения [31, 32].

Утверждение 7.1. *Если функция* $u \in H^m(\Omega)$ *при* $m \geq 3$ *является решением задачи* (7.2) *для уравнения* (7.1), *то функции* $\gamma \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ *удовлетворяют условию*

$$\forall Q \in \mathbb{R}[z],\ j = 1, 2{:}\quad \int\limits_{\partial\Omega}\left[\kappa - (-1)^j\frac{\gamma}{2}\right]Q(x(s)\cdot\tilde{a}^j)\,ds = 0, \tag{7.3}$$

где $x(s)$ — *точка на* $\partial\Omega$, *которое можно представить в виде* (1.7).

***Следствие* 7.1.** *Для каждого решения* $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 2$, *уравнения* (1.1) *выполняется равенство Жуковского*

$$\int\limits_{\partial\Omega}\kappa\,ds = 0. \tag{7.4}$$

Утверждение 7.2. *Обратно, если функции* $\gamma \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ *и* $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ *удовлетворяют условию* (7.3), *то существует единственное с точностью до аддитивной постоянной решение и задачи* (7.2) *для уравнения* (7.1), *принадлежащее пространству* $H^{m-1-\varepsilon}(\Omega)$ *для каждого* $\varepsilon > 0$. *Отобра-*

жение $H^m(\partial\Omega)\times H^m(\partial\Omega)/\{\mathrm{const}\}\ni\{(\gamma,\kappa)$ *со свойством* $(7.4)\}\to u\in$ $\in H^{m-1-0}(\Omega)$ *является непрерывным.*

Рассмотрим теперь задачу (1.7) о неопределенности проблемы моментов (1.8), которую запишем в следующем виде:

на заданной кривой C существует функция $\alpha(x)$ такая, что

$$\forall N\in\mathbb{Z}_+,\ j=1,2:\ \int_C \alpha(x)(x\cdot\tilde{a}^j)^N ds = 0. \tag{7.5}$$

(Соответствующая проблема моментов типа (1.8) превратится в обычную тригонометрическую, если считать, что C — единичная окружность, и заменить $x(s)^N=\cos^N(s)$ и $y(s)^N=\sin^N(s)$ на $\cos Ns$ и $\sin Ns$ соответственно, либо взять векторы $\tilde{a}^1=(1,i)$, $\tilde{a}^2=(1,-i)$.)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.1. *Пусть* $l\ge k\ge 3$ *и имеются три набора утверждений*:

1_k) *однородная проблема моментов* (7.5) (*или* (1.7)) *имеет нетривиальное решение* $\alpha\in H^{k-3/2}(\partial\Omega)$;

2_k) *задача Дирихле* $u\big|_{\partial\Omega}=0$ *для уравнения* (7.1) *имеет нетривиальное решение* $u\in H^k(\Omega)$;

3_k) *задача Неймана* $u'_{\nu_*}\big|_{\partial\Omega}=0$ *для уравнения* (7.1) *имеет непостоянное решением* $u\in H^k(\Omega)$.

Тогда $1_l)\Rightarrow 2_{l-q})$, $1_l)\Rightarrow 3_{l-q})$, $2_l)\Rightarrow 1_l)$, $3_l)\Rightarrow 1_l)$, *где* $q=1+\varepsilon$ *с любым* $\varepsilon>0$.

Доказательство. $1)\Rightarrow 2)$. Используя пару $\gamma=0$, $\kappa=2\alpha$, с помощью утверждения 7.2 строим решение $u\in H^{l-q}(\partial\Omega)$.

$2)\Rightarrow 1)$. Положим $\alpha=\kappa$ и применим утверждение 7.1.

Импликации $1)\Rightarrow 3)$ и $3)\Rightarrow 1)$ аналогичны.

Доказательство теоремы завершено.

Таким образом, условие периодичности (5.6) необходимо и достаточно для нетривиальной разрешимости однородной задачи Неймана (1.1), (1.6) и является также критерием свойства неопределенности (1.7) проблемы моментов (1.8) на $C=\partial\Omega$ в соболевской шкале пространств $H^k(\partial\Omega)$, $k\ge 3$.

8. Детерминантный критерий Кэли. Знаменитый английский математик А. Кэли дал следующий замечательный критерий периодичности задачи Понселе. Пусть A, B — две произвольные коники, участвующие в процессе Понселе, как в п. 2, M_C и M_D — 3×3-матрицы, описывающие эти коники (т. е. соответствующие им квадратичные формы) в проективных координатах x_0, x_1, x_2. Например, если коника A — единичная окружность $x^2+y^2=1$, а коника B — концентрическая окружность радиуса R, то квадратичными формами для A, B являются

$$x_1^2+x_2^2-x_0^2 \quad\text{и}\quad x_1^2+x_2^2-R^2x_0^2. \tag{8.1}$$

Соответствующие матрицы M_B, M_A — диагональны: $M_A=\mathrm{diag}(1,1,-1)$, $M_B=$ $=\mathrm{diag}(1,1,-R^2)$. Вычислим характеристический определитель

$$F(z)=\det(M_B-zM_A). \tag{8.2}$$

Ясно, что $F(z)$ — кубический полином. Этот полином инвариантен относительно преобразований подобия $B\to S^{-1}M_BS$, $A\to S^{-1}M_AS$. Известно, что две квадратичные формы могут быть приведены к диагональному виду одним невырожденным преобразованием подобия. При этом корни z_i, $i=1,2,3$, полинома

$F(z)$ имеют простой смысл. Если матрица M_A приводится к диагональной форме тождественной матрицы (т. е. $M_A = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$), то z_1, z_2, z_3 — диагональные элементы (собственные значения) матрицы M_B.

Для получения критерия Кэли необходимо найти коэффициенты разложения в ряд Тейлора корня из полинома $F(z)$:

$$\sqrt{F(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots , \tag{8.3}$$

а затем составить из них определители ганкелева типа

$$H_p^{(1)} = \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \ldots & c_{p+1} \\ c_4 & c_5 & \ldots & c_{p+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots & c_{2p-1} \end{vmatrix}, \quad p = 2, 3, 4 \ldots , \tag{8.4}$$

$$H_p^{(2)} = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{p+1} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{p+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots & c_{2p} \end{vmatrix}, \quad p = 1, 2, 3 \ldots . \tag{8.5}$$

Критерий Кэли [17] утверждает: орбиты отображения Понселе периодичны с периодом N тогда и только тогда, когда $H_p^{(1)} = 0$ для $N = 2p$ и $H_p^{(2)} = 0$ для $N = 2p + 1$. Современное доказательство критерия Кэли можно найти в работе [20].

Рассмотрим в качестве иллюстрации пример двух окружностей (8.1) радиусов 1 и R. Очевидно, что в этом случае

$$F(z) = (z-1)^2 (zR^2 - 1). \tag{8.6}$$

Первые нетривиальные тейлоровские коэффициенты корня $\sqrt{F(z)}$ суть $c_2 = R^2(R^2-4)/8$ и $c_3 = R^4(R^2-2)/16$. В этом случае равенство $c_2 = 0$ означает $R = 2$, что соответствует трехточечной орбите и правильному (бицентрическому) треугольнику, а равенство $c_3 = 0$ означает $R = 2^{1/2}$, что соответствует четырехточечной орбите и (бицентрическому) квадрату.

9. Связь между проблемой Понселе и уравнением Пелля – Абеля. Разрешимость уравнения Пелля – Абеля

$$P(t)^2 - R(t)Q(t)^2 = L^2 \tag{9.1}$$

с полиномом четного порядка, как отмечалось в п. 3, имеет несколько различных эквивалентных формулировок [26]. В работе [27] получен новый критерий разрешимости, данный в алгебраической форме, который мы сформулируем для случая полинома четвертого порядка $R = t^4 + d_1 t^3 + \ldots + d_4$. Разложим корень $\sqrt{R}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$\sqrt{R} = \sum_{j=-m}^{\infty} C_j t^{-j} \tag{9.2}$$

и составим определитель ганкелева типа

$$\Gamma_k = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_k \\ C_2 & C_3 & \ldots & C_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_k & C_{k+1} & \ldots & C_{2k-1} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots . \tag{9.3}$$

Критерий Малышева [27] утверждает: уравнение Пелля – Абеля (3.1) с полиномом R четвертого порядка имеет решениями полиномы P и Q порядков $k+2$ и k тогда и только тогда, когда $\Gamma_k = 0$.

Наше наблюдение заключается в следующем. Пусть λ_1 — один из корней полинома $R(t)$. Во-первых, рассмотрим уравнение Пелля – Абеля (3.1) с полиномом R четвертого порядка и выполним сдвиг параметра $t \to t + \lambda_1$ (т. е. $t \to \to \tilde{t} + \lambda_1$). Разрешимость уравнения Пелля – Абеля (3.1) от этого не изменится. Применим теперь критерий Малышева к полученному уравнению. Пусть коэффициенты C_j — коэффициенты разложения в ряд Лорана корня $\sqrt{R(t + \lambda_1)}$, тогда равенство $\Gamma_k = 0$ необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (3.1) с заданными степенями полиномов P, Q. Во-вторых, в исходной постановке выполним замену переменной $s = 1/(t - \lambda_1)$, $t = \lambda_1 + 1/s$. Тогда получим

$$R = \frac{F(s)}{s^4} \tag{9.4}$$

с некоторым полиномом $F(s)$ третьего порядка, и поэтому $\sqrt{R} = \sqrt{F(s)}/s^2$. Заметим, что можно восстановить полином R по F обратным преобразованием. Разложение (8.3) корня $\sqrt{F(s)}$ дает нам разложение $\sqrt{F(s)}/s^2 = c_0/s^2 + c_1/s + + c_2 + \ldots + c_n s^{n-2} + \ldots$, которое после обратной замены запишется в виде

$$\sqrt{R(t + \lambda_1)} = c_0 t^2 + c_1 t + c_2 + \frac{c_3}{t} + \ldots + \frac{c_n}{t^{n-2}} \ldots .$$

Как видно, $C_1 = c_3$, $C_2 = c_4, \ldots$ и определитель (8.4) совпадает с определителем (9.3), т. е. критерий Кэли для случая четного периода с полиномом F совпадает с критерием Малышева для уравнения (9.1) с полиномом R. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 9.1. *Уравнение* (9.1) *с полиномом R четвертой степени разрешимо тогда и только тогда, когда периодична с четным периодом проблема Понселе на кониках A и B, которые порождают по формуле* (8.2) *полином F третьей степени, связанный с полиномом R формулой* (9.4).

Пусть дан полином четвертого порядка $R = t(z_1 t - 1)(z_2 t - 1)(z_3 t - 1)$, тогда $F(z) = z^4 R(1/z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ — полином третьего порядка. Полином $F = \det(B - zA)$ порожден двумя квадратичными формами с матрицами $A = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$, $B = \operatorname{diag}(z_1, z_2, z_3)$, построенными по квадратичным формам $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$ и $z_1 x_1^2 + z_2 x_2^2 + z_3 x_0^2$ коник $x^2 + y^2 = 1$ и $z_1 x^2 + z_2 y^2 + z_3 = 0$. Пусть, например, $-1 < z_1/z_3 < 0$ и $z_2/z_3 < -1$. Тогда по формуле (4.9) можно записать уравнение ограниченной кривой (и тем самым, постановку задачи Дирихле (1.3)), а затем по формулам, приведенным в п. 5, найти числа k, k', K' и θ. Согласно теореме 9.1 разрешимость уравнения Пелля – Абеля (9.1) с таким полиномом R эквивалентна периодичности задачи Понселе для этих коник и согласно теоремам 4.1 и 5.1 эквивалентна условию (5.6).

1. *Hadamard J.* Equations aux derivees partielles // L'Enseignment Math. – 1936. – **36**. – P. 25 – 42.
2. *Huber A.* Erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Cleichung $U_{xy} = f(x, y)$ // Monatsh. Math. und Phys. – 1932. – **39**. – P. 79 – 100.
3. *Bourgin D., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**. – P. 851 – 858.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984.
5. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. – 1941. – **63**. – P. 141 – 154.

6. *Александрян Р. А.* О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге // Докл. АН СССР. – 1950. – **73**, № 5.
7. *Александрян Р. А.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1960. – **9**. – С. 455 – 505.
8. *Акопян Г. С.* О полноте системы собственных вектор-полиномов линейного пучка дифференциальных операторов в эллипсоидальных областях // Докл. АН АрмССР. – 1988. – **86**, № 4. – С. 147 – 152.
9. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21 – 86.
10. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965.
11. *Зеленяк Т. И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1970.
12. *Фокин М. В.* О сингулярном спектре в задаче С. Л. Соболева // Мат. анализ и дифференц. уравнения. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1992. – С. 11 – 15.
13. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.
14. *Baxter R.* Exactly solvable models in statistical mechanics. – London: Acad. Press, 1982.
15. *Веселов А. П.* Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы // Функц. анализ и его прил. – 1988. – **22**. – С. 1 – 13.
16. *Francoise J. P., Ragnisco O.* An iterative process on quartics and integrable symplectic maps // Symmetries and Integrability of Difference Equations / Eds P. A. Clarkson and F. W. Nijhoff. – Cambridge Univ. Press, 1998.
17. *Berger M.* Géométrie. – Paris: CEDIC, 1978.
18. *Грановский Я. И., Жеданов А. С.* Интегрируемость классической *XY*-цепочки // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – **44**. – С. 237 – 239.
19. *Poncelet J. V.* Traite des proprietes projectives des figures: ouvrage utile a qui s'occupent des applications de la geometrie descriptive et d'operations geometriques sur le terrain. – 2nd ed. – Paris: Gauthier-Villars, 1865 – 1866. – Vols 1, 2.
20. *Griffiths P., Harris J.* On a Cayley's explicit solution to Poncelet's porism // Enseign. math. – 1978. – **24**, № 2. – P. 31 – 40.
21. *Kerawala S. M.* Poncelet porism in two circles // Bull. Calcutta Math. Soc. – 1947. – **39**. – P. 85 – 105.
22. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1978.
23. *Abel N. H.* Über die Integration der Differential-Formel $\rho\, dx / \sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind // Z. reine und angew. Math. – 1826. – **1**. – S. 185 – 231.
24. *Голубев В. В.* Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций // Научное наследие П. Л. Чебышева. Математика. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – С. 88 – 121.
25. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.
26. *Содин Л. М., Юдицкий П. М.* Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси // Алгебра и анализ. – 1991. – **4**, вып. 2. – С. 1 – 61.
27. *Малышев В. А.* Уравнение Абеля // Там же. – 2001. – **13**, вып. 6. – С. 1 – 55.
28. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970.
29. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967.
30. *Уиттеккер Е. Т., Ватсон Г.Н.* Курс современного анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 2. – 516 с.
31. *Бурский В. П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1476 – 1483.
32. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002.

Получено 26.10.2005