УДК 519.21

Т. В. Маловічко (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ВЛАСТИВОСТІ ВІНЕРОВОГО ПРОЦЕСУ ЗІ СКЛЕЮВАННЯМ

The Wiener process with coalescence and its analog are discussed. The existence of an initial distribution with preset final probabilities for this analog is proved and the problem of the existence of such distributions concentrated at a single point or absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure is investigated. The behavior of a semigroup of the Wiener process with coalescence in the two-dimensional case and properties of the Wiener flow with coalescence are studied.

Розглянуто вінерів процес зі склеюванням і його аналог. Доведено існування початкового розподілу із заданими фінальними ймовірностями для останнього процесу та досліджено існування таких розподілів, сконцентрованих в одній точці або абсолютно неперервних відносно міри Лебега. Вивчаються поведінка напівгрупи вінерового процесу зі склеюванням у двовимірному випадку та властивості вінерового потоку зі склеюванням.

Вступ. Нехай W — $\mathbb{R}$-значний вінерів лист на $\mathbb{R}\times[0;1]$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — сферично симетрична невід'ємна функція з властивістю

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)du = 1$$

і для кожного $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1/2}\varphi(\varepsilon^{-1}u)^{-1/2}, \quad u\in\mathbb{R}.$$

У роботі [1] було розглянуто рівняння

$$dx_\varepsilon(u,t) = \int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(u,t)-q)W(dq,dt),$$
$$x_\varepsilon(u,0) = u,$$

розв'язок x_ε якого має дві важливі властивості. Перша властивість полягає в тому, що x_ε є потоком гомеоморфізмів, а друга — в тому, що для кожного $u\in\mathbb{R}$ $\{x_\varepsilon(u,t);\ t\geq 0\}$ є вінеровим процесом.

Нехай для кожного ε

$$\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset [-\varepsilon;\varepsilon].$$

У роботі [1] було доведено, що для довільних точок $u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{R}$ випадковий процес $(x_\varepsilon(u_1,\cdot),\ldots,x_\varepsilon(u_n,\cdot))$ має слабку границю у просторі $C([0;1],\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon\to 0+$. Цей граничний процес будемо називати вінеровим процесом зі склеюванням, оскільки він має такі властивості. Кожна його координата є вінеровим процесом, і кожні дві координати рухаються як незалежні вінерові процеси до моменту їхньої зустрічі, а після цього рухаються разом.

Якщо замість руху n частинок у $\mathbb{R}$ розглядати рух однієї частинки у просторі $\mathbb{R}^n$, то отримаємо процес, який поводиться як вінерів до першого моменту, коли деякі з його координат стають рівними. Після цього моменту він перетворюється на вінерів процес на гіперплощині, де його координати залишаються рівними. Ця процедура триває доти, доки ми не отримаємо одновимірний вінерів процес. З цього моменту розглядуваний процес буде збігатися з цим вінеровим процесом.

Метою даної роботи є дослідження властивостей вінерового процесу зі склеюванням та його більш зручного аналога.

1. Дослідження аналога вінерового процесу зі склеюванням. Нехай задано обмежену область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею та скінченну кількість точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на її межі (для зручності покладемо $A_0 = A_n$). Ці точки розбивають межу ∂Q на n дуг (рис. 1).

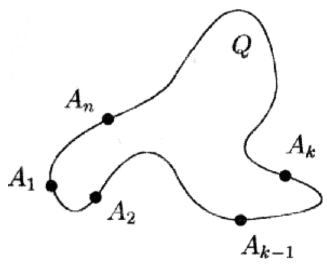

Рис. 1

Розглянемо процес $Y(\cdot) = Y_{(x_0, y_0)}(\cdot)$, який стартує з $(x_0, y_0) \in Q$ та поводиться, як двовимірний вінерів до моменту виходу на межу області. У цей момент процес опиняється на одній із дуг $\breve{A_{k-1}A_k}$ і потім поводиться, як одновимірний вінерів процес на дузі $\breve{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням на кінцях. (Під вінеровим процесом на дузі $\breve{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням на кінцях будемо розуміти процес $h^{-1}(\overline{w}(\cdot))$, де відображення h ставить у відповідність кожній точці M дуги довжину дуги $\breve{A_{k-1}M}$, а $\overline{w}(\cdot)$ — вінерів процес на відрізку $[0; |\breve{A_{k-1}A_k}|]$ з поглинанням на кінцях.)

Більш строго цей процес можна задати таким чином:

$$Y_{(x_0, y_0)}(t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} w(t) + \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{w_\tau \in \breve{A_{k-1}A_k}\}} w_{w(\tau)}^{(k)}(t-\tau),$$

де $w(\cdot)$ — двовимірний вінерів процес, який стартує з точки (x_0, y_0), τ — момент першого виходу $w(\cdot)$ на межу області Q, $w_{(x_k, y_k)}^{(k)}(\cdot)$, $k = \overline{1, n}$, — незалежні вінерові процеси на дугах $\breve{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням в точках A_{k-1} й A_k, які стартують із точок $(x_k, y_k) \in \breve{A_{k-1}A_k}$.

Неважко довести наступне твердження.

Лема 1. *Процес $Y(\cdot)$ є марковським.*

Враховуючи вимірність перехідних імовірностей, можемо розглядати процес $Y(\cdot)$ із випадковим початковим розподілом.

Теорема 1. *Нехай Q — обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з регулярною кусково-гладкою межею, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \partial Q$. Тоді існує початковий розподіл процесу $Y(\cdot)$, при якому $Y(\cdot)$ зупиняється в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з довільними заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.*

Доведення. Нехай для $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\psi_k(x)$ — імовірність того, що процес $Y_x(\cdot)$ зупиниться в точці A_k. Будемо шукати потрібний розподіл у вигляді $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i}$.

Для того щоб $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i}$, де $x_i \in Q$, $i = \overline{1, n}$, задовольняла умови теореми, необхідно і достатньо виконання умови

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_j(x_i) a_i = p_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Нехай

$$\varphi_j(y) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 0, & y \notin \overset{\smile}{A_{j-1}A_j} \cup \overset{\smile}{A_j A_{j+1}}, \\ \dfrac{\left|\overset{\smile}{A_{j-1}y}\right|}{\left|\overset{\smile}{A_{j-1}A_j}\right|}, & y \in \overset{\smile}{A_{j-1}A_j}, \\ \dfrac{\left|\overset{\smile}{yA_{j+1}}\right|}{\left|\overset{\smile}{A_j A_{j+1}}\right|}, & y \in \overset{\smile}{A_j A_{j+1}}. \end{cases}$$

Тоді

$$\psi_j(x) = \mathrm{M}_x \varphi_j(w(\tau)),$$

де τ — момент першого виходу w на межу області Q. З неперервності φ_j на ∂Q випливає, що ψ_j гармонічна в Q. Оскільки за умовою кожна точка межі ∂Q є регулярною, то

$$\lim_{\substack{x \in Q \\ x \to a}} \psi_j(x) = \varphi_j(a)$$

для довільної точки $a \in \partial Q$ [2].

Розглянемо n послідовностей

$$\{x_i^{(k)},\ k \geq 0\}, \quad i = \overline{1,n}; \qquad \forall i \ \ \forall k : \ x_i^{(k)} \in Q, \quad \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = A_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Оскільки за умовою A_i, $i = \overline{1,n}$, регулярні, то

$$\lim_{k \to \infty} \psi_j(x_i^{(k)}) = \varphi_j(A_i) = \delta_{ij}, \qquad i, j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Система

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} a_j = p_j, \qquad j = \overline{1,n},$$

невироджена, оскільки її визначник $\Delta = 1$. Позначимо через $\Delta^{(k)}$ визначник системи

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_j(x_i^{(k)}) a_i^{(k)} = p_j, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Тоді з рівності (2) випливає

$$\lim_{k \to \infty} \Delta^{(k)} = \Delta = 1.$$

Тому

$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \exists!\,(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n: \ \sum_{i=1}^{n} \psi_j(x_i^{(k)}) a_i^{(k)} = p_j, \quad j = \overline{1,n},$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_j(x_i^{(k)}) a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)},$$

$$\forall i : \ \lim_{k \to \infty} a_i^{(k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{\Delta_i^{(k)}}{\Delta^{(k)}} = \frac{\Delta_i}{\Delta} = p_i.$$

Оскільки всі p_i додатні, то

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \ a_i^{(k)} > 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Таким чином, для достатньо великих k міра $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \delta_{x_i^{(k)}}$ задовольняє всі умови теореми.

Теорему доведено.

Позначимо через $\mathcal{P}$ клас імовірнісних мір μ на Q таких, що $Y_\mu(\cdot)$ зупиняється в точках $A_1, \ldots, A_n$ з додатними ймовірностями $p_1, \ldots, p_n$.

З наведеної теореми випливає, що $\mathcal{P}$ містить безліч імовірнісних мір.

Теорема 2. *Клас $\mathcal{P}$ містить міру, абсолютно неперервну відносно міри Лебега.*

Доведення. Як видно з доведення теореми 1,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} (Q \cap B(A_k, \varepsilon_0)) \quad \exists\,!\,(a_1, \ldots, a_n): \ \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k} \in \mathcal{P}.$$

Позначимо

$$G_k = Q \cap B(A_k, \varepsilon_0), \quad k = \overline{1, n}, \quad G = \prod_{k=1}^{n} G_k .$$

При цьому ε_0 виберемо так, щоб множини G_k не перетиналися.

З формул Крамера, неперервності ψ_k, $k = \overline{1, n}$, та неперервності визначника випливає, що

$$a_k(x_1, \ldots, x_n) \in C(G).$$

Нехай також λ_{2n} — $2n$-вимірна міра Лебега, а $C = (\lambda_{2n}(G))^{-1}$.

Розглянемо $f\colon G \to \mathcal{P}$ таку, що

$$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in G: \quad f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x}) \delta_{x_k} .$$

Введемо функцію множин

$$\forall B \in \mathcal{B}(\overline{Q}): \quad \mu(B) = C \int_G f(\vec{x})(B) \lambda_{2n}(d\vec{x}).$$

Тоді

$$\forall B_k \in \mathcal{B}(\overline{Q}), \ k \geq 1, \quad B_i \cap B_j = \varnothing, \quad i \neq j:$$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = C \int_G f(\vec{x}) \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \lambda_{2n}(d\vec{x}) = C \int_G \sum_{k=1}^{\infty} f(\vec{x})(B_k) \lambda_{2n}(d\vec{x}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} C \int_G f(\vec{x})(B_k) \lambda_{2n}(d\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k),$$

тобто μ є σ-адитивною (за побудовою μ є невід'ємною), а також

$$\mu(Q) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right) = C \int_G \sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x}) \mathbb{1}_{\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right)}(x_k) \lambda_{2n}(d\vec{x}) =$$

$$= C \int_G \sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x}) \lambda_{2n}(d\vec{x}) = C \int_G \lambda_{2n}(d\vec{x}) = C \lambda_{2n}(G) = 1.$$

Отже, μ — ймовірнісна міра на Q.

Зауважимо, що μ є абсолютно неперервною відносно λ_2 з щільністю

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{G_k}(x_k) u_k(x_k),$$

де для кожного $k \le n$

$$u_k(x) = C \int_{\prod_{i \neq k} G_i} a_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n.$$

Залишилося показати, що $\mu \in \mathcal{P}$. Для кожного j маємо

$$\int_Q \psi_j(x) d\mu(x) = \int_Q \psi_j(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{G_k}(x) u_k(x) \right) d\lambda_2(x) =$$

$$= C \sum_{k=1}^{n} \int_Q \psi_j(x) \int_{\prod_{i \neq k} G_i} a_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n \, dx =$$

$$= C \sum_{k=1}^{n} \int_G a_k(\vec{x}) \psi_j(x_k) dx_1 \ldots dx \ldots dx_n =$$

$$= C \int_G \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, \ldots, x_n) \psi_j(x_k) \right) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= C \int_G p_j \, dx_1 \ldots dx_n = p_j.$$

Теорему доведено.

Виникає питання: чи не можна вказати точку в області Q, щоб процес $Y(\cdot)$, який стартує з цієї точки, надходив до точок $A_1, \ldots, A_n$ з довільними наперед заданими ймовірностями $p_1, \ldots, p_n$ відповідно.

У загальному випадку відповідь є негативною, про що свідчить наступний контрприклад.

***Приклад* 1.** *Нехай область Q є внутрішністю прямокутника, точки A_1, A_2, A_3, A_4 — вершинами цього прямокутника, а A_5 лежить на стороні A_1A_4, причому $|A_1A_5| < |A_4A_5|$. Тоді не існує такої початкової точки, щоб процес надходив до вказаних точок з рівними ймовірностями, тобто не існує такої точки $x_0 \in Q$, що*

$$\delta_{x_0} \in \mathcal{P} \quad \textit{при} \quad p_1 = \ldots = p_5 = \frac{1}{5}.$$

Доведення. Припустимо супротивне, а саме

$$\exists x_0 \in Q: \quad \psi_k(x_0) = \frac{1}{5}, \quad k = \overline{1, 5}.$$

Крім цього, припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони A_3A_4 менша, ніж відстань від x_0 до A_1A_2.

Нехай D_1 і D_2 — середини сторін A_2A_3 та A_1A_4 відповідно (рис. 2).

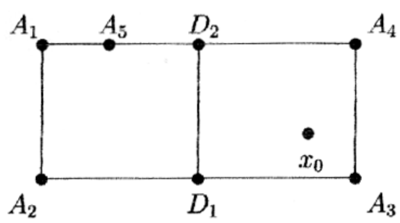

Рис. 2

Позначимо

$$C_1 = \{x \in A_1A_2 : a \le \rho(x, A_2) < b\},$$
$$C_2 = \{x \in A_3A_4 : a \le \rho(x, A_3) < b\}.$$

Для довільного $x \in D_1D_2$ справджується рівність

$$\mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_1\} = \mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_2\}.$$

Тому

$$\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_1\} =$$
$$= \int\limits_{D_1D_2} \mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_1\}\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1x\} =$$
$$= \int\limits_{D_1D_2} \mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_2\}\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1x\} =$$
$$= \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_2 \text{ через } D_1D_2\} <$$
$$< \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } C_2\}.$$

Отже, ймовірність попадання на A_1A_2, а потім в точку A_2 менша за ймовірність попадання на A_3A_4, а потім в точку A_3.

Для довільного $x \in D_1D_2$

$$\mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає на } A_2D_1\} = \mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1A_3\},$$
$$\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } A_2D_1\} =$$
$$= \int\limits_{D_1D_2} \mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає на } A_2D_1\}\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1x\} =$$
$$= \int\limits_{D_1D_2} \mathrm{P}_x\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1A_3\}\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1x\} =$$
$$= \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1A_3 \text{ через } D_1D_2\} <$$
$$< \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1A_3 \text{ раніше, ніж на } D_1D_2\} +$$
$$+ \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1A_3 \text{ через } D_1D_2\} =$$
$$= \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } D_1A_3\}.$$

Аналогічно, ймовірність попадання до $\{x \in A_2A_3 : a \le \rho(x, A_2) < b\}$ менша за ймовірність попадання з x_0 до $\{x \in A_2A_3 : a \le \rho(x, A_3) < b\}$ при $0 \le a < b \le |A_2A_3|/2$.

Отже, ймовірність попадання в точку A_2 через A_2A_3 менша за ймовірність попадання в точку A_3 через A_2A_3.

Звідси випливає, що $\psi_2(x_0) < \psi_3(x_0)$. Прийшли до суперечності.

Аналогічно доводиться, що відстань від точки x_0 до сторони A_3A_4 не може бути більшою за відстань від x_0 до A_1A_2.

Таким чином, оскільки $\psi_2(x_0) = \psi_3(x_0)$, то точка x_0 є рівновіддаленою від сторін A_1A_2 та A_3A_4.

Для кожної точки $x_0 \in D_1D_2$

$$\psi_2(x_0) = \psi_3(x_0),$$
$$\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } A_1A_2\} = \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає на } A_3A_4\}$$

завдяки симетрії вінерового процесу.

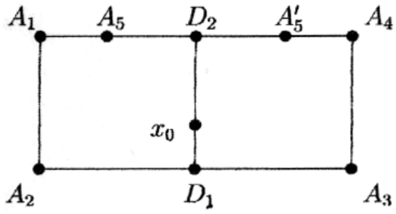

Рис. 3

Виберемо (рис. 3)

$$A_5' \in A_1 A_4 : \quad |A_5' A_4| = |A_1 A_5|,$$

і нехай

$$\varphi(x) = \frac{|A_1 A_5| - x}{|A_1 A_5|}.$$

Тоді

$$\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } A_1 \text{ через } A_1 A_4\} =$$

$$= \int\limits_{[0;|A_1A_5|]} \varphi(x)\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає до } \{y \in A_1 A_5 : \rho(y, A_1) < x\}\} =$$

$$= \int\limits_{[0;|A_1A_5|]} \varphi(x)\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає до } \{y \in A_4 A_5' : \rho(y, A_4) < x\}\} <$$

$$< \int\limits_{[0;|A_4A_5'|]} \frac{|A_4 A_5| - x}{|A_4 A_5|}\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає до } \{y \in A_4 A_5' : \rho(y, A_4) < x\}\} <$$

$$< \int\limits_{[0;|A_4A_5|]} \frac{|A_4 A_5| - x}{|A_4 A_5|}\, d\mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає до } \{y \in A_4 A_5 : \rho(y, A_4) < x\}\} =$$

$$= \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } A_4 \text{ через } A_1 A_4\}.$$

Далі, для довільної точки $x_0 \in D_1 D_2$

$$\begin{aligned} \psi_1(x_0) &= \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } A_1 \text{ через } A_1 A_2\} + \\ &+ \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } A_1 \text{ через } A_1 A_4\} < \\ &< \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } A_4 \text{ через } A_3 A_4\} + \\ &+ \mathrm{P}_{x_0}\{Y(\cdot) \text{ попадає в } A_4 \text{ через } A_1 A_4\} = \\ &= \psi_4(x_0), \end{aligned}$$

тобто

$$\psi_1(x_0) < \psi_4(x_0), \quad x_0 \in D_1 D_2.$$

Таким чином, не існує такої точки $x_0 \in Q$, що

$$\psi_k(x_0) = \frac{1}{5}, \qquad k = \overline{1,5}.$$

Теорему доведено.

Для випадку трьох точок на межі має місце наступний результат.

Теорема 3. *Нехай Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з регулярною кусково-гладкою межею, а A_1, A_2, A_3 — точки на межі Q. Тоді існує така точка $x_0 \in Q$, що при початковому положенні x_0 процес $Y(\cdot)$ зупиняється* *в точках* A_1, A_2, A_3 *з довільними наперед заданими додатними ймовірностями* p_1, p_2, p_3 *такими, що* $\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$.

Доведення. Розглянемо трикутник $\Delta A_1' A_2' A_3'$ в $\mathbb{R}^3$, де $A_1'(1;0;0)$, $A_2'(0;1;0)$, $A_3'(0;0;1)$. Існує неперервне відображення g замикання області Q на $\Delta A_1' A_2' A_3'$ таке, що

$$\forall\, x \in \breve{A_{k-1} A_k} : \quad \frac{|g(x) A_k'|}{|A_{k-1}' A_k'|} = \frac{|x \breve{A_k}|}{|\breve{A_{k-1} A_k}|}, \quad k = \overline{1,3},$$

причому g є бієкцією та зберігає межі.

Позначимо

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad f = \psi \circ g^{-1},$$

де ψ_k має той самий сенс, що і в теоремі 1.

Оскільки

$$\forall\, x \in \breve{A_{k-1} A_k} : \ \psi_{k+1}(x) = 0, \quad \psi_{k-1}(x) = \frac{|x \breve{A_k}|}{|\breve{A_{k-1} A_k}|}, \quad \psi_k(x) = 1 - \frac{|x \breve{A_k}|}{|\breve{A_{k-1} A_k}|},$$

то

$$\forall\, x \in \partial Q : \quad \psi(x) = g(x).$$

Звідси, а також із того, що

$$\psi(x) = f(g(x)),$$

випливає

$$\forall\, y \in \partial(\Delta A_1' A_2' A_3') : \quad f(y) = y.$$

Нехай g_0 — рух, що відображає $\Delta A_1' A_2' A_3'$ на $\Delta A_1'' A_2'' A_3''$, де

$$A_1''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; 0\right), \quad A_2''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; 0\right), \quad A_3''\left(0; \frac{\sqrt{6}}{3}; 0\right),$$

тобто

$$g_0(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$$

(A і $\vec{b}$ можна легко обчислити), і

$$g_1\left((x;y;z)^T\right) = \left((x;y)^T\right), \qquad g_2\left((x;y)^T\right) = \left((x;y;0)^T\right).$$

Далі, нехай $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ і

$$f_0 = g_1 \circ g_0 \circ f \circ g_0^{-1} \circ g_2.$$

Звуження f_0 на $\Delta A_1'' A_2'' A_3''$ є неперервним і взаємно однозначним відображенням цього трикутника на себе, причому

$$\forall\, z \in \partial(\Delta A_1'' A_2'' A_3'') : \quad f_0(z) = z.$$

З останнього факту, а також із того, що $\Delta A_1'' A_2'' A_3''$ є компактом у $\mathbb{R}^2$, а відображення $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ неперервне, випливає [3], що

$$\Delta A_1'' A_2'' A_3'' \subset f_0[\Delta A_1'' A_2'' A_3''].$$

Для довільних додатних чисел p_1, p_2, p_3 таких, що $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, точка $B(p_1, p_2, p_3)$ є внутрішньою точкою для $\Delta A_1' A_2' A_3'$. Тоді з того, що відображення f_0 зберігає межі, випливає

$$\exists z_0 \in \operatorname{int}(\Delta A_1'' A_2'' A_3''): \quad f_0(z_0) = g_1(g_0((p_1; p_2; p_3)^T)).$$

Позначимо

$$y_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} g_0^{-1}(g_2(z_0)) \in \operatorname{int}(\Delta A_1' A_2' A_3'),$$

тоді

$$f(y_0) = f(g_0^{-1}(g_2(z_0))) = g_0^{-1}(g_2(f_0(z_0))) = (p_1; p_2; p_3)^T.$$

Оскільки g є бієкцією та зберігає межі, то

$$\exists x_0 \in Q: \ g(x_0) = y_0.$$

Звідси випливає

$$\psi(x_0) = f(g(x_0)) = f(y_0) = (p_1; p_2; p_3)^T,$$

тобто

$$\exists x_0 \in Q: \ \psi_k(x_0) = p_k, \quad k = \overline{1,3}.$$

Теорему доведено.

2. Поведінка вінерового процесу зі склеюванням. Повернемось до вінерового процесу зі склеюванням. Його можна задати таким чином. Нехай w_1, $w_2, \ldots, w_n$ — незалежні вінерові процеси в $\mathbb{R}$, причому

$$w_1(0) < w_2(0) < \ldots < w_n(0).$$

Розглянемо $X(\cdot) = (X_1(\cdot), \ldots, X_n(\cdot))$, де

$$X_1(t) = w_1(t), \quad t \geq 0,$$

$$\tau_1 = \inf\{t > 0: \ w_2(t) = w_1(t)\},$$

а при $k = \overline{2,n}$

$$X_k(t) = \begin{cases} w_k(t), & t < \tau_{k-1}, \\ X_{k-1}(t), & t \geq \tau_{k-1}, \end{cases}$$

$$\tau_k = \inf\{t > 0: \ w_{k+1}(t) = X_k(t)\}.$$

Формально вінерів процес зі склеюванням задається таким чином. Нехай $W_{u_1,\ldots,u_k}^{(n)}$ — вінерова міра на $\mathbb{R}^n$, що відповідає початковому положенню $(u_1, \ldots, u_n)$, а $\kappa_{u_1,\ldots,u_n}^{(n)}$ — розподіл n-вимірного вінерового процесу зі склеюванням, що стартує із $(u_1, \ldots, u_n)$. Будемо вважати, що $u_1 < \ldots < u_n$.

Розглянемо для довільного $\delta > 0$ у просторі $C([0;1], \mathbb{R}^n)$ множину

$$\mathcal{G}_\delta^{(n)} = \{\vec{f}: f_i(0) = u_i, \ i = 1, \ldots, n, \ \vec{f}(t) \in G_\delta^{(n)}, \ t \in [0;1]\},$$

де $\mathcal{G}_\delta^{(n)} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_j| > 2\delta, \ i \neq j\}$.

Тоді $\kappa_{u_1,\ldots,u_n}^{(n)}(\mathcal{G}^{(n)}) = 1$, де $\mathcal{G}^{(n)}$ — замикання множини $\bigcup_{\delta > 0} \mathcal{G}_\delta^{(n)}$, причому

$$\forall \delta > 0 \ \ \forall A \in \mathcal{B}(C([0;1], \mathbb{R}^n)): \quad \kappa_{u_1,\ldots,u_n}^{(n)}(\mathcal{G}_\delta^{(n)} \cap A) = W_{u_1,\ldots,u_k}^{(n)}(\mathcal{G}_\delta^{(n)} \cap A),$$

а на границі множини $\mathcal{G}^{(n)}$

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n, \quad \forall A_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \in \mathcal{B}(C([0;1], \mathbb{R})):$$

$$\kappa_{u_1,\ldots,u_n}^{(n)}(A) = \kappa_{u_{i_1},\ldots,u_{i_k}}^{(n)}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_k}),$$

де

$$A = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n, \qquad B_j = \begin{cases} A_j, & j \in \{i_1, \ldots, i_k\}, \\ C([0;1], \mathbb{R}), & j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}. \end{cases}$$

При цьому $\kappa_u^{(1)}$ збігається з $W_u^{(1)}$.

Лема 2. *Процес* $X(\cdot)$ *є вінеровим зі склеюванням в* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. По-перше, покажемо, що кожна координата $X_k(\cdot)$ є вінеровим процесом. Для $X_1(\cdot)$ це так за побудовою, причому $X_1(\cdot)$ та $w_2(\cdot)$ є незалежними. Припустимо, що $X_k(\cdot)$ — вінерів процес, не залежний від $w_{k+1}(\cdot)$. Тоді

$$X_{k+1}(t) = w_{k+1}(t)\mathbb{1}_{\{t<\tau_k\}} + X_k(t)\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_k\}}.$$

Двовимірний процес

$$w^{(k)}(\cdot) = \begin{pmatrix} X_k(\cdot) \\ w_{k+1}(\cdot) \end{pmatrix}$$

є вінеровим. А оскільки оператор

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

унітарний, то процес

$$\tilde{w}^{(k)}(\cdot) = Uw^{(k)}(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_k(\cdot) + w_{k+1}(\cdot)\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_k(\cdot) - w_{k+1}(\cdot)\right) \end{pmatrix}$$

також є вінеровим, причому τ_k — момент першого попадання для $\tilde{w}_2^{(k)}(\cdot)$ в 0, а $\tilde{w}_1^{(k)}(\cdot)$ і $\tilde{w}_2^{(k)}(\cdot)$ є незалежними. Тоді

$$X_{k+1}(t) = w_{k+1}(t)\mathbb{1}_{\{t<\tau_k\}} + X_k(t)\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_k\}} =$$

$$= \frac{\tilde{w}_1^{(k)}(t) - \tilde{w}_2^{(k)}(t)}{\sqrt{2}}\mathbb{1}_{\{t<\tau_k\}} + \frac{\tilde{w}_1^{(k)}(t) + \tilde{w}_2^{(k)}(t)}{\sqrt{2}}\mathbb{1}_{\{t\ge\tau_k\}} =$$

$$= \frac{\tilde{w}_1^{(k)}(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\tilde{w}_2^{(k)}(t)\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau_k\}} - \mathbb{1}_{\{t\ge\tau_k\}}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Процес $\tilde{w}_2^{(k)}(\cdot)\left(\mathbb{1}_{\{\cdot<\tau_k\}} - \mathbb{1}_{\{\cdot\ge\tau_k\}}\right)$ утворюється з процесу $\tilde{w}_2^{(k)}(\cdot)$ відбиттям відносно осі абсцис у момент першого попадання в 0. Із строго марковської властивості та симетрії вінерового процесу випливає, що процес

$$\hat{w}_2^{(k)}(\cdot) = \tilde{w}_2^{(k)}(\cdot)\left(\mathbb{1}_{\{\cdot<\tau_k\}} - \mathbb{1}_{\{\cdot\ge\tau_k\}}\right)$$

також є вінеровим. До того ж останній процес не залежить від $\tilde{w}_1^{(k)}(\cdot)$. А оскільки

$$U\hat{w}^{(k)}(\cdot) = U\begin{pmatrix} \tilde{w}_1^{(k)}(\cdot) \\ \hat{w}_2^{(k)}(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{w}_1^{(k)}(\cdot) + \hat{w}_2^{(k)}(\cdot)\right) \\ X_{k+1}(\cdot) \end{pmatrix},$$

то $X_{k+1}(\cdot)$ є вінеровим процесом, не залежним від $w_{k+2}(\cdot)$. За індукцією отримаємо, що $X_k(\cdot)$ — вінерів процес для довільного k.

Безпосередньо з побудови випливає

$$\mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_n}\{X(\cdot)\in\mathcal{G}^{(n)}\} = \mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_n}\{X_1(t)\le X_2(t)\le\ldots\le X_n(t),\ t\in[0;1]\} = 1,$$

$$\forall\,\delta>0\quad \forall A\in\mathcal{B}(C([0;1],\mathbb{R}^n)):\quad \mathrm{P}^{(n)}_{u_1,\ldots,u_n}\{X(\cdot)\in\mathcal{G}^{(n)}_\delta\cap A\} =$$

$$= \mathrm{P}^{(n)}_{u_1,\ldots,u_n}\{(w_1(\cdot),\ldots,w_n(\cdot))\in\mathcal{G}^{(n)}_\delta\cap A\} = W^{(n)}_{u_1,\ldots,u_n}(\mathcal{G}^{(n)}_\delta\cap A),$$

оскільки до моменту першої зустрічі будь-яких координат процес $X(\cdot)$ збігається з n-вимірним вінеровим процесом.

Розглянемо, нарешті, для довільних $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$ процес $\tilde{X}(\cdot) = (\tilde{X}_1(\cdot),\ldots,\tilde{X}_k(\cdot))$, де

$$\tilde{X}_1(t) = X_{i_1}(t),\qquad t\ge 0,$$

$$\tilde{\tau}_1 = \inf\{t>0: X_{i_2}(t) = X_{i_1}(t)\},$$

а при $j=\overline{2,k}$

$$\tilde{X}_j(t) = \begin{cases} X_{i_j}(t), & t<\tilde{\tau}_{j-1},\\ \tilde{X}_{j-1}(t), & t\ge\tilde{\tau}_{j-1},\end{cases}$$

$$\tilde{\tau}_j = \inf\{t>0: X_{i_{j+1}}(t) = \tilde{X}_j(t)\}.$$

Оскільки $X_{i_j}(\cdot)$ є вінеровими процесами, то за такої побудови процес $\tilde{X}(\cdot)$ цілком аналогічний процесу $X(\cdot)$, за винятком розмірності. Для довільних $A_{i_1},\ldots,A_{i_k}\in C([0;1],\mathbb{R})$

$$\mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_n}\{X(\cdot)\in A\} =$$

$$= \mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_n}\{(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})(\cdot)\in(A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n})\} =$$

$$= \mathrm{P}_{u_{i_1},\ldots,u_{i_k}}\{\tilde{X}(\cdot)\in(A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_k})\},$$

де

$$A = B_1\times\ldots\times B_n,\qquad B_j = \begin{cases} A_j, & j\in\{i_1,\ldots,i_k\},\\ C([0;1],\mathbb{R}), & j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}.\end{cases}$$

Отже, $X(\cdot)$ є вінеровим процесом зі склеюванням.

Лему доведено.

Неважко довести наступну лему.

Лема 3. *Процес $X(\cdot)$ є марковським.*

Дослідимо тепер поведінку його напівгрупи у двовимірному випадку при $t\to\to+\infty$.

Нехай $T_t^{(2)}$ — напівгрупа двовимірного вінерового процесу зі склеюванням, а $S(t)$ — напівгрупа одновимірного вінерового процесу. Решту позначень залишимо без змін. Нехай $\hat{w}(\cdot)$ — вінерів процес, не залежний від $X(\cdot)$, і

$$\forall f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}:\quad \tilde{f}(x)\overset{\mathrm{df}}{=} f(x,x).$$

Теорема 4. *Має місце збіжність*

$$\left|T_t^{(2)}f(x_1,x_2) - S_t\tilde{f}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right| \to 0,\qquad t\to+\infty.$$

Якщо виконується умова

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x, x)\,dx \; < \; +\infty,$$

то

$$T_t^{(2)} f(x_1, x_2) \;\to\; 0, \qquad t \to +\infty.$$

Доведення. Маємо

$$\mathrm{P}\{\tau \le t\} \;=\; \mathrm{P}\{\,\tilde{w}_2(\cdot) \text{ попадає в } 0 \text{ до моменту } t\} \;=$$

$$= \; \mathrm{P}_0\left\{\hat{w}(\cdot) \text{ попадає в } \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \text{ до моменту } t\right\} \;=$$

$$= \; \mathrm{P}_0\left\{\max_{s\in[0;t]} \hat{w}(s) \ge \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\right\} \;=\; 2\mathrm{P}_0\left\{\hat{w}(t) \ge \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\right\} \;=$$

$$= \; \mathrm{P}_0\left\{|\,\hat{w}(t)| \ge \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\right\} \;=\; 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-(x_2 - x_1)/\sqrt{2}}^{(x_2 - x_1)/\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2t}\right\} du \;\ge$$

$$\ge \; 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\,\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \;=\; 1 - \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\pi t}} \;\to\; 1, \qquad t \to +\infty.$$

Тому

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{P}\{\tau > t\} \;=\; 0,$$

і для довільної обмеженої функції $f \in C(\mathbb{R}^2)$

$$\left|\mathrm{M}_{x_1,x_2} f(X(t))\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right| \;\le\; \sup_{\vec{u}\in\mathbb{R}^2} f(\vec{u})\,\mathrm{P}\{\tau > t\} \;\to\; 0, \qquad t \to +\infty.$$

Зі строго марковської властивості вінерового процесу випливає

$$\mathrm{M}_{x_1,x_2} f(X(t))\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}} \;=\; \mathrm{M}_{x_1,x_2} f(w_1(t), w_1(t))\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}} \;=$$

$$= \; \mathrm{M}_{x_1,x_2} \mathrm{M}\{\, f(w_1(t), w_1(t))\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}} \,|\, \mathcal{F}_\tau\} \;=\; \mathrm{M}_{x_1,x_2} S_{t-\tau}\tilde{f}(w_1(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}} \;=$$

$$= \; \mathrm{M}_{x_1,x_2} S_{t-\tau}\tilde{f}\left(\frac{\tilde{w}_1(\tau)}{\sqrt{2}}\right)\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}}.$$

Отже, для довільної обмеженої функції $f \in C(\mathbb{R}^2)$

$$\left|T_t^{(2)} f(x_1, x_2) - S_t\tilde{f}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \;=$$

$$= \; \left|\mathrm{M}_{x_1,x_2} f(X(t)) - \mathrm{M}_{(x_1+x_2)/2}\tilde{f}\left(\frac{\hat{w}_1(t)}{\sqrt{2}}\right)\right| \;\le$$

$$\le \; \left|\mathrm{M}_{x_1,x_2} f(X(t)) - \mathrm{M}_{x_1,x_2} f(X(t))\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}}\right| \;+$$

$$+ \; \left|\mathrm{M}_{x_1,x_2} S_{t-\tau}\tilde{f}\left(\frac{\tilde{w}_1(\tau)}{\sqrt{2}}\right)\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}} - \mathrm{M}_{x_1,x_2} f\left(\frac{\tilde{w}_1(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{w}_1(t)}{\sqrt{2}}\right)\right| \;=$$

$$= \; \left|\mathrm{M}_{x_1,x_2} f(X(t))\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right| + \left|\mathrm{M}_{x_1,x_2} f\left(\frac{\tilde{w}_1(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{w}_1(t)}{\sqrt{2}}\right)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right| \;\to\; 0, \qquad t \to +\infty,$$

тобто

$$\left| T_t^{(2)} f(x_1, x_2) - S_t \tilde{f}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right| \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Якщо виконується також умова

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x, x)\,dx < +\infty,$$

то

$$\left| S_t \tilde{f}(x) \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u, u)}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ -\frac{(x-u)^2}{2t} \right\} du \right|^2 \le$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(u, u)\,du \right) \left(\frac{1}{2\pi t} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ -\frac{(x-u)^2}{t} \right\} du \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(u, u)\,du \right) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

і в цьому випадку

$$T_t^{(2)} f(x_1, x_2) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Теорему доведено.

Розглянемо деякі властивості вінерового потоку зі склеюванням, тобто процесу $\{X(u, t),\ u \in \mathbb{R},\ t \in [0; \infty)\}$ в $\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Нехай* $X(\cdot, \cdot)$ — *вінерів потік зі склеюванням. Тоді*

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{|X(u, t)|}{u^{1+\varepsilon}} = 0 \text{ м. н.}, \qquad \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{|X(u, t)|^{1+\varepsilon}} = 0 \text{ м. н.}$$

Доведення. Оскільки при фіксованому u $X(u, \cdot)$ — вінерів процес, що стартує з u, то

$$\mathrm{M} X^2(u, t) = t + u^2.$$

Позначимо

$$u_n^1 = n^{2/\varepsilon}, \qquad \varepsilon_n^1 = \frac{1}{n}, \qquad A_n^1 = \left\{ \frac{|X(u, t)|}{u^{1+\varepsilon}} \ge \varepsilon_n^1 \right\}.$$

Тоді

$$P(A_n^1) = \mathrm{P}\left\{ \left| X(u_n^1, t) \right| \ge \varepsilon_n^1 (u_n^1)^{1+\varepsilon} \right\} \le \frac{\mathrm{M} X^2(u_n^1, t)}{(\varepsilon_n^1)^2 (u_n^1)^{2+2\varepsilon}} = \frac{t + (u_n^1)^2}{(\varepsilon_n^1)^2 (u_n^1)^{2+2\varepsilon}},$$

$$\frac{t + (u_n^1)^2}{(\varepsilon_n^1)^2 (u_n^1)^{2+2\varepsilon}} \sim \frac{1}{(\varepsilon_n^1)^2 (u_n^1)^{2\varepsilon}} = \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty,$$

а тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^1) < +\infty.$$

За лемою Бореля – Кантеллі

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{X(u_n^1, t)}{(u_n^1)^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{м. н..}$$

Далі

$$\forall\, u > 1 \quad \exists k : u \in (u_k^1, u_{k+1}^1],$$

причому з монотонності $X(\cdot, t)$ випливає, що

$$\frac{X(u_k^1,t)}{(u_k^1)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{u_k^1}{u}\right)^{1+\varepsilon} \le \frac{X(u,t)}{u^{1+\varepsilon}} \le \frac{X(u_{k+1}^1,t)}{(u_{k+1}^1)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{u_{k+1}^1}{u}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Тоді

$$\left|\frac{u_{k+1}^1}{u}-1\right| = \frac{u_{k+1}^1-u}{u} \le \frac{u_{k+1}^1-u_k^1}{u_k^1} = \frac{(k+1)^{2/\varepsilon}-k^{2/\varepsilon}}{k^{2/\varepsilon}} \to 0, \quad u\to\infty \ (k\to\infty),$$

тобто

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u_{k+1}^1}{u} = 1.$$

Аналогічно

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u_k^1}{u} = 1.$$

Отже,

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{|X(u,t)|}{u^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Нехай $1+1/\varepsilon<\delta<+\infty$. Позначимо

$$u_n^2 = n^\delta, \quad \beta = \frac{\delta\varepsilon-1-\varepsilon}{\delta}, \quad \varepsilon_n^2 = \frac{1}{(u_n^2)^\beta}, \quad A_n^2 = \left\{\frac{u_n^2}{\left|X(u_n^2,t)\right|^{1+\varepsilon}} \ge \varepsilon_n^2\right\}.$$

Оскільки $\delta\varepsilon-1-\varepsilon>0$, то

$$\varepsilon_n^2 = \frac{1}{n^{\delta\varepsilon-1-\varepsilon}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Внаслідок того, що при фіксованому u $X(u,\cdot)$ — вінерів процес, що стартує з u, маємо

$$P(A_n^2) = \mathrm{P}\left\{\frac{u_n^2}{\left|X(u_n^2,t)\right|^{1+\varepsilon}}\ge\varepsilon_n^2\right\} = \mathrm{P}\left\{\left|X(u_n^2,t)\right| \le \left(\frac{u_n^2}{\varepsilon_n^2}\right)^{1/(1+\varepsilon)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{\left[-\left(u_n^2/\varepsilon_n^2\right)^{1/(1+\varepsilon)};\left(u_n^2/\varepsilon_n^2\right)^{1/(1+\varepsilon)}\right]} e^{-(r-u_n^2)^2/2t}\,dr \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\frac{u_n^2}{\varepsilon_n^2}\right)^{1/(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{\left(\left(u_n^2/\varepsilon_n^2\right)^{1/(1+\varepsilon)}-u_n^2\right)^2}{2t}\right\},$$

оскільки

$$\left(\frac{u_n^2}{\varepsilon_n^2}\right)^{1/(1+\varepsilon)} = (u_n^2)^{1-1/\delta} < u_n^2.$$

Далі

$$P(A_n^2) \le \sqrt{\frac{2}{\pi t}}(u_n^2)^{1-1/\delta}\exp\left\{-\frac{\left((u_n^2)^{1-1/\delta}-u_n^2\right)^2}{2t}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,n^{\delta-1}\exp\left\{-\frac{(1/n-1)^2n^{2\delta}}{2t}\right\}.$$

Зважаючи на те, що при достатньо великих значеннях x

$$e^{-x} < \frac{1}{x},$$

при достатньо великих n отримуємо

$$P(A_n^2) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, n^{\delta-1} \frac{2t}{n^{2\delta}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \sim \frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{1+\delta}}, \quad n \to \infty.$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^2) < +\infty.$$

За лемою Бореля – Кантеллі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{X(u_n^2, t)^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{м. н.},$$

$$\forall\, u > 1 \quad \exists m : u \in (u_m^2, u_{m+1}^2],$$

причому з монотонності $X(\cdot, t)$ випливає, що

$$\frac{(u_{m+1}^2)^{1/(1+\varepsilon)}}{X(u_{m+1}^2, t)} \left(\frac{u}{u_{m+1}^2}\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{u^{1/(1+\varepsilon)}}{X(u, t)} \leq \frac{(u_m^2)^{1/(1+\varepsilon)}}{X(u_m^2, t)} \left(\frac{u}{u_m^2}\right)^{1/(1+\varepsilon)},$$

$$\left|\frac{u}{u_m^2} - 1\right| = \frac{u - u_m^2}{u_m^2} \leq \frac{u_{m+1}^2 - u_m^2}{u_m^2} = \frac{(m+1)^\delta - m^\delta}{m^\delta} \to 0, \quad u \to \infty \quad (m \to \infty),$$

тобто

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{u_m^2} = 1.$$

Аналогічно

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{u_{m+1}^2} = 1.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u^{1/(1+\varepsilon)}}{X(u, t)} = 0 \quad \text{м. н.},$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u}{|X(u, t)|^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Теорему доведено.

Лема 4. *Нехай* $X(\cdot, \cdot)$ — *вінерів потік зі склеюванням. Тоді для довільного* t *і довільного відрізка* $[a; b]$ *з імовірністю* 1 *існує відрізок* $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ $(\alpha < \beta)$ *такий, що*

$$X(\alpha, t) = X(\beta, t).$$

Доведення. Покажемо спочатку, що

$$A = \{\exists [\alpha, \beta] \subset [a; b] : X(\alpha, t) = X(\beta, t)\}$$

є випадковою подією, тобто $A \in \mathcal{F}$. Для цього позначимо

$$B = \bigcup_{r_1 \in \mathbb{Q} \cap [a;b)} \bigcap_{r_2 \in \mathbb{Q} \cap (r_1; b]} \{X(r_1, t) = X(r_2, t)\} =$$

$$= \{\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} : a \leq r_1 < r_2 \leq b,\ X(r_1, t) = X(r_2, t)\}.$$

Тоді $B \in \mathcal{F}$, оскільки

$$\forall r_1, r_2: \quad \{X(r_1, t) = X(r_2, t)\} \in \mathcal{F}.$$

Очевидно, що $B \subset A$.

Далі,

$$\forall \omega \in A \quad \exists \alpha_0, \beta_0: \quad a \le \alpha_0 < \beta_0 \le b, \qquad X(\omega, \alpha_0, t) = X(\omega, \beta_0, t).$$

Оскільки $\alpha_0 < \beta_0$, то

$$\exists \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in \mathbb{Q}: \ \alpha_0 \le \tilde{r}_1 < \tilde{r}_2 \le \beta_0.$$

З монотонності $X(\cdot, t)$ випливає

$$X(\omega, \tilde{r}_1, t) = X(\omega, \tilde{r}_2, t).$$

Таким чином, $\omega \in B$, а тому $A \subset B$.

Отже, $A = B \in \mathcal{F}$.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n рівних відрізків точками u_k, де $a = u_0 < < u_1 < \ldots < u_n = b$. Для довільних n та $k \le n$

$$P(A) \ge \mathrm{P}\{X(u_{k-1}, t) = X(u_k, t)\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{w_{u_{k-1}}(\cdot) \text{ і } w_{u_k}(\cdot) \text{ зустрілися до моменту } t\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\frac{w_{u_k}(\cdot) - w_{u_{k-1}}(\cdot)}{\sqrt{2}} \text{ попадає в } 0 \text{ до моменту } t\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\tilde{w}(\cdot) \text{ попадає в } \frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{2}} \text{ до моменту } t\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\max_{s\in[0;t]} \tilde{w}(s) \ge \frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{2}}\right\} = 2\mathrm{P}\left\{\tilde{w}(t) \ge \frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{2}}\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{|\tilde{w}(t)| \ge \frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{2}}\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\left[-\frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{2}}; \frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{2}}\right]} e^{-u^2/2t}\, du \ge$$

$$\ge 1 - \frac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{\pi t}} = 1 - \frac{b-a}{\sqrt{\pi t}\, n},$$

де $w_{u_{k-1}}(\cdot)$ та $w_{u_k}(\cdot)$ — незалежні вінерові процеси, що стартують з точок u_{k-1} та u_k відповідно, а $\tilde{w}(\cdot)$ — не залежний від них вінерів процес, який стартує з 0.

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{b-a}{\sqrt{\pi t}\, n}\right) = 1,$$

то $P(A) = 1$.

Лему доведено.

1. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Stochastic flows with interaction and random measures. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004.
2. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
3. *Иванов В. В.* Топологическая степень // Математика сегодня. – Киев: Выща шк., 1987. – 231 с.

Одержано 28.10.2004