УДК 517.9

**В. С. Мельник**
(Ин-т прикл. системн. анализа НАН Украины и М-ва образования и науки Украины, Киев)

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

Topological methods of the investigation of operator inclusions in Banach spaces are developed. The Kee Fan generalized inequality is proved and critical points of many-valued mappings in topological spaces are investigated.

Розробляються топологічні методи дослідження операторних включень у банахових просторах. Доведено узагальнену нерівність Кі Фаня та досліджено критичні точки багатозначних відображень у топологічних просторах.

Настоящая работа является продолжением [1], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, теорем, формул и т. д.

**3. Обобщенная несимметричная теорема о минимаксе и нули мультиотображений.** Приведенные здесь результаты частично анонсированы в [8].

Пусть $X$ — хаусдорфово топологическое пространство, $Y$ — топологическое векторное пространство, $N$ — выпуклое подмножество в $Y$, $f\colon X\times N\to\mathbf{R}$ — некоторая функция. Кроме того, пусть $\mathcal{B}_c(N;X)$ — совокупность всех строгих полунепрерывных сверху многозначных отображений [9] с компактными значениями (образами).

Для каждого $D\in\mathcal{B}_c(N;X)$ положим

$$f^{\#}(D) \;=\; \sup_{y\in N}\inf_{d\in D} f(d(y),y), \qquad f^{\Diamond}(D) \;=\; \inf_{d\in D}\sup_{y\in N} f(d(y),y),$$

где запись $d\in D$ означает, что $d$ — селектор многозначного отображения $D$ (т. е. $d(y)\in D(y)\ \forall\, y\in N$). Очевидно, выполняется неравенство

$$f^{\#}(D)\;\le\; f^{\Diamond}(D) \qquad \forall\, D\in\mathcal{B}_c(N;X).$$

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *найдется* $y_0\in N$ *такое, что для любого* $\lambda\in\mathbf{R}$ *множество* $\{x\in X\mid f(x,y_0)\le\lambda\}$ *относительно компактно в* $X$;

2) *для любого* $y\in N$ *функция* $X\ni x\mapsto f(x,y)$ *полунепрерывна снизу, а для любого* $x\in X$ *функция* $N\ni y\mapsto f(x,y)$ *вогнута.*

*Тогда существует элемент* $\bar{x}\in X$ *такой, что*

$$\sup_{y\in N} f(\bar{x},y)\;\le\; f^{\#}(D)\;\le\; f^{\Diamond}(D) \qquad \forall\, D\in\mathcal{B}_c(N;X). \tag{15}$$

***Доказательство.*** Пусть $\Xi(N)$ — совокупность всех конечных подмножеств в $N$. В силу теоремы 6.2.6 [10] найдется такой элемент $\bar{x}\in X$, что

$$\sup_{y\in N} f(\bar{x},y) \;=\; \sup_{K\in\Xi(N)}\inf_{x\in X}\sup_{y\in K} f(x,y). \tag{16}$$

Положим $K=\{y_1,\ldots,y_n\}$ и $S_+^n=\left\{\lambda\in\mathbf{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n\lambda_i=1\right\}$. Поскольку $N$ — выпуклое множество, то $K\subset N$, причем $D(\operatorname{co}K)\subset X\quad\forall D\in\mathcal{B}_c(N;X)$. В таком случае

$$\inf_{x\in X}\max_{i=1,\ldots,n} f(x,y_i) \;=\; \inf_{x\in X}\sup_{\lambda\in S_+^n}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x,y_i)\right) \;\le\; \inf_{x\in D(\operatorname{co}K)}\sup_{\lambda\in S_+^n}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x,y_i)\right)\;\le$$

$$\le\; \inf_{\mu\in S_+^n}\sup_{\lambda\in S_+^n}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i f\left(d_i\left(\sum_{j=1}^n\mu_j y_j\right), y_i\right)\right), \tag{17}$$

где $d_i : N \to X$, $1, \ldots, n$, — некоторый фиксированный набор селекторов многозначного отображения $D$.

Рассмотрим функцию $F(\mu, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(d_i\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j\right), y_i\right)\right)$, в которой селекторы $d_i \in D$ выбираются из условия $f(d_i(y), y_i) = \inf_{d \in D} f(d(y), y_i)$ $\forall\, y \in \in N$.

Вследствие полунепрерывности снизу функции $f$ по первому аргументу при фиксированном втором и компактнозначности отображения $D$ такие селекторы существуют.

**Предложение 13.** *Функция* $F(\mu, \lambda)$ *полунепрерывна снизу по* $\mu$ *при фиксированном* $\lambda$.

***Доказательство.*** Докажем вначале, что при каждом $i = 1, \ldots, n$ функция $S_+^n \in \mu \mapsto F_i(\mu) = \lambda_i f\left(d_i\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j\right), y_i\right)$ полунепрерывна снизу.

Справедливо следующее утверждение, имеющее самостоятельное значение.

**Лемма 3.** *Пусть* $X$, $Y$ *— хаусдорфовы топологические пространства и* $G : X \rightrightarrows Y$ *— компактнозначное отображение.*

*Тогда следующие свойства равносильны*:

а) *отображение* $G$ *полунепрерывно сверху в точке* $x_0 \in X$;

б) *для произвольной направленности* $\{x_\alpha\}$, *сходящейся к* $x_0$, *и* $\xi_\alpha \in \in G(x_\alpha)$ *можно выделить такую поднаправленность* $\{\xi_\nu\}$, *что* $\xi_\nu \to \xi_0$ *в* $Y$ *и* $\xi_0 \in G(x_0)$.

***Доказательство.*** Докажем импликацию а) $\Rightarrow$ б).

Пусть отображение $G$ полунепрерывно сверху в точке $x_0$. Рассмотрим произвольную $x_\alpha \to x_0$ в $X$ и $\xi_\alpha \in G(x_\alpha)$. Как известно [9] (утверждение 1.4.8), отображение $G$ полунепрерывно сверху в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда из $x_\alpha \to x_0$ следует, что множество $G(x_0)$ притягивает направленность множеств $\{G(x_\alpha)\}$. Если при этом отображение $G$ не удовлетворяет свойству б), то найдется хотя бы одна направленность $\xi_\alpha \in G(x_\alpha)$, не имеющая поднаправленности, сходящейся в $Y$ к какому-либо элементу из $G(x_0)$. Это означает, что для произвольного $\nu \in G(x_0)$ существует окрестность $\mathcal{N}(\nu)$, которая редко встречается с направленностью $\{\xi_\alpha\}$, т. е. найдется такое $s = = s(\mathcal{N}(\nu))$, что $\{\xi_\alpha\} \cap \mathcal{N}(\nu) = \varnothing$ $\forall\, \alpha \geq s$.

Вследствие компактности $G(x_0)$ совокупность $\{\mathcal{N}(\nu) \mid \nu \in G(x_0)\}$ образует покрытие, из которого можно выделить конечное подпокрытие $\{\mathcal{N}(\nu_k) \mid k = = 1, \ldots, m\}$. При этом если $\alpha \geq \max_{k=1,\ldots,m} s(\mathcal{N}(\nu_k))$, то $\{\xi_\alpha\} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{N}(\nu_k)\right) = \varnothing$, что противоречит притяжению $\{G(x_\alpha)\}$ к множеству $G(x_0)$. Следовательно, произвольная направленность $\xi_\alpha \in G(x_\alpha)$ имеет поднаправленность $\{\xi_\nu\}$, сходящуюся в пространстве $Y$ к элементу $\xi_0$.

Докажем, что $\xi_0 \in G(x_0)$. Если $\xi_0 \notin G(x_0)$, то в силу компактности образа $G(x_0)$ в $Y$ существуют непересекающиеся окрестности $\mathcal{N}(G(x_0))$ и $\mathcal{N}(\xi_0)$. Действительно, для каждого $\xi \in G(x_0)$ существуют непересекающиеся окрестности $\mathcal{N}(\xi)$ и $\mathcal{N}(\xi_0)$ и совокупность $\{\mathcal{N}(\xi) \mid \xi \in G(x_0)\}$ покрывает $G(x_0)$. Пусть $\{\mathcal{N}(\xi_i) \mid i = 1, \ldots, l\}$ — конечное подпокрытие, тогда достаточно положить

$$\mathcal{N}(G(x_0)) = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{N}(\xi_i), \qquad \mathcal{N}(\xi_0) = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{N}_{\xi_i}(\xi_0).$$

Итак, направленность $\{\xi_\alpha\}$ является частой в $\mathcal{N}(\xi_0)$ и не выходит из

$\mathcal{N}(G(x_0))$, начиная с некоторого индекса $\alpha_0$, что противоречиво.

Импликация б) $\Rightarrow$ а) доказана в [9] (утверждение 1.4.11).

Лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство предложения 13. Пусть $\mu^\alpha \to \mu^0$ в $S_+^n$. Рассмотрим $\xi_\alpha \in D(y^\alpha)$, где $y^\alpha = \sum_{j=1}^n \mu_j^\alpha y_j$, $\xi_\alpha = d_i(y^\alpha)$. Тогда $y^\alpha \to y^0 = \sum_{j=1}^n \mu_j^0 y_j$, и в силу леммы 3 найдется такая поднаправленность $\{\xi_\nu\}$, что $\xi_\nu \to \xi_0$ в $X$, причем $\xi_0 \in D(y^0)$. А поскольку функция $f$ полунепрерывна снизу по первому аргументу, то

$$\lambda_i f(\xi_0, y_i) \le \varliminf_{\nu} \lambda_i f\left(d_i\left(\sum_{j=1}^n \mu_j^\nu y_j\right), y_i\right),$$

причем $F_i(\mu^0) \le \lambda_i f(\xi_0, y_i)$. Докажем, что и $\varliminf_\alpha F_i(\mu^\alpha) \ge F_i(\mu^0)$. Обозначим $b = \varliminf_\alpha F_i(\mu^\alpha)$ и допустим противное, т. е. $b < F_i(\mu^0)$. Рассмотрим такую подпоследовательность $\{\mu^\beta\} \subset \{\mu^\alpha\}$, что $b = \lim_\beta F_i(\mu^\beta)$ и, соответственно, $y^\beta = \sum_{j=1}^n \mu_j^\beta y_j$, $\xi_\beta \in D(y^\beta)$.

Согласно условию б) леммы 3, можно указать такие поднаправленности $\{y^{\beta'}\}$, $\{\xi_{\beta'}\}$ направленностей $\{y^\beta\}$, $\{\xi_\beta\}$ соответственно, что $y^{\beta'} \to y^0$ в $N$, $\xi_{\beta'} \to \xi'$ в $X$, причем $\xi' \in D(y^0)$. При этом

$$b = \lim_\beta F_i(\mu^\beta) = \lim_{\beta'} F_i(\mu^{\beta'}) = \lim_{\beta'} \lambda_i f(d_i(y^{\beta'}), y_i) \ge$$

$$\ge \lambda_i f(\xi', y_i) \ge \lambda_i f(d_i(y^0), y_i) = F_i(\mu^0), \qquad \text{где} \quad d_i(y^{\beta'}) = \xi_{\beta'}.$$

Полученное противоречие доказывает полунепрерывность снизу функций $F_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда полунепрерывной снизу будет и функция $S_+^n \ni \mu \mapsto F(\mu, \lambda)$ как конечная сумма полунепрерывных снизу функций.

Предложение 13 доказано.

Для каждого $\mu \in S_+^n$ функция $S_+^n \ni \lambda \mapsto F(\mu, \lambda)$ аффинная, поэтому в силу классического неравенства Ки Фаня для конечномерных пространств

$$\inf_{\mu \in S_+^n} \sup_{\lambda \in S_+^n} F(\mu, \lambda) \le \sup_{\lambda \in S_+^n} F(\lambda, \lambda).$$

С другой стороны, функция $y \mapsto f(x, y)$ вогнута, следовательно, для каждого селектора $d \in D$ имеем

$$F(\lambda, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f\left(d_i\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right), y_i\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \lambda_i f\left(d\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right), y_i\right) \le f\left(d\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right), \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right).$$

Поскольку последнее соотношение справедливо для любого $d \in D$, то

$$F(\lambda, \lambda) \le \inf_{d \in D} f\left(d\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right), \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) \le f^\#(D) \qquad \forall \lambda \in S_+^n.$$

Отсюда находим $\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{y\in K} f(x, y) \le f^{\#}(D)$.

Поскольку последнее неравенство выполняется для любого $K \in \Xi(N)$, с учетом (16) получаем (15).

Теорема доказана.

Каждому $K = \{y_1, \dots, y_N\} \in \Xi(N)$ соответствует отображение $\beta_k : S_+^n \to N$, определяемое по правилу $\beta_k(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$. Конечная топология на $N$ — это финальная топология [9] относительно совокупности отображений $\{\beta_k \mid K \in \Xi(N)\}$. Множество $N$ с конечной топологией будем обозначать через $N_f$, а пространство полунепрерывных сверху отображений из $N_f$ в $X$ с компактными образами — через $\mathcal{B}_c(N_f; X)$.

**Утверждение 1.** *Для того чтобы* $D \in \mathcal{B}_c(N_f; X)$, *необходимо и достаточно, чтобы для произвольного* $K \in \Xi(N)$ *композиция* $D_k = D \circ \beta_k \in \mathcal{B}_c(S_+^n; X)$.

Доказательство вытекает из общих свойств многозначных отображений [9].

Анализируя доказательство теоремы 1, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1. *Тогда существует* $\bar{x} \in X$ *такое, что*

$$\sup_{y\in N} f(\bar{x}, y) \le f^{\#}(D) \le f^{\Diamond}(D) \qquad \forall\, D \in \mathcal{B}_c(N_f; X).$$

***Нули многозначных отображений.*** Пусть $Y$ и $Y^*$ — дуальная пара топологических векторных пространств, $P \subset Y^*$ — замкнутый выпуклый конус, $P^- \subset Y$ — его отрицательный полярный конус (т. е. $P^- = \{y \in Y \mid \langle y, p\rangle_Y \le 0\ \forall\, p \in P\}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y Y^* \times Y \to \mathbf{R}$ — каноническая двойственность), $K$ — компактное пространство.

**Теорема 3.** *Пусть* $F : K \rightrightarrows Y^*$ *— строгое многозначное отображение и выполнены следующие условия*:

1) *отображение* $F$ *—* $P$*-хеминепрерывно сверху, т. е. для любого* $y \in P^-$ *вещественная функция* $K \ni x \mapsto [F(x), y]_+ = \sup\limits_{g\in F} \langle g(x), y\rangle_Y$ *полунепрерывна сверху*;

2) $F(x) + P \in C_V(Y^*) \quad \forall\, x \in K$;

3) *существует* $D \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$ *такое, что* $\sup\limits_{d\in D} [F(d(y)), y]_+ \ge 0 \ \forall\, y \in P^-$.

*Тогда множество* $Z(P) = \{x \in K \mid 0 \in F(x) + P\}$ *непусто и замкнуто.*

***Доказательство.*** Введем на $K \times P^-$ функцию $f(x, y) = -[F(x), y]_+$, которая полунепрерывна снизу по $x$ и вогнута по $y$. В силу теоремы 1 найдется такой элемент $\bar{x} \in K$, для которого $\sup\limits_{y\in P^-} f(\bar{x}, y) \le f^{\#}(D) \quad \forall D \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$.

Следовательно (условие 3), $\inf\limits_{d\in D} f(d(y), y) \le 0$, а значит, $f^{\#}(D) \le 0$, и поэтому $[F(\bar{x}), y]_+ \ge 0 \ \forall\, y \in P^-$.

Замечая, что

$$[P, y]_+ = \begin{cases} 0, & y \in P^-, \\ +\infty, & y \notin P^-, \end{cases}$$

и используя свойства верхних форм, получаем

$$0 \le [F(\bar{x}), y]_+ + [P, y]_+ = [F(\bar{x}) + P, y]_+ \qquad \forall\, y \in Y,$$

откуда (условие 2) $0 \in F(\bar{x}) + P$.

Теорема 3 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 3 *и* $\sup_{x \in K} [F(x), y]_+ \geq$ $\geq 0 \quad \forall y \in P^-$. *Тогда множество* $Z(P)$ *непусто и замкнуто.*

***Доказательство.*** Достаточно рассмотреть „постоянное" многозначное отображение $D: P^- \rightrightarrows K \quad (D(y) = K \ \ \forall y \in P^-)$. На основании леммы 3 нетрудно заключить, что $D \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$.

**Определение 5.** *Точка* $\bar{x} \in K$ *называется* $P$*-критической точкой отображения* $F$, *если она удовлетворяет соотношению* $0 \in F(\bar{x}) + P$.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 3 *и все* $P$*-критические точки в* $K$ *отображения* $F$ *изолированы. Тогда их число конечно.*

***Доказательство.*** Допустим противное, т. е. совокупность $P$-критических точек в $K$ бесконечна. Тогда вследствие компактности $K$ из этой совокупности можно выделить сходящуюся поднаправленность $x_\alpha \to x_0$ в $K$, где $0 \in$ $\in F(x_\alpha) + P$. Отсюда согласно условию 1 находим

$$0 \leq \varliminf_{\alpha} [F(x_\alpha) + P, y]_+ = \varliminf_{\alpha} [F(x_\alpha), y]_+ \leq [F(x_0), y]_+ \qquad \forall y \in P^-,$$

а значит,

$$0 \leq [F(x_0) + P, y]_+ = [F(x_0), y]_+ + [P, y]_+ \qquad \forall y \in Y$$

или (условие 2) $0 \in F(x_0) + P$, т. е. $x_0$ — $P$-критическая точка отображения $F$, причем неизолированная, что противоречит условиям теоремы.

Теорема 4 доказана.

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 3 *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $D_\varepsilon \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$ *такое, что* $\sup_{d \in D_\varepsilon} \left[F(d(y)), y\right]_+ \geq -\varepsilon \quad \forall y \in P^-$.

*Тогда существует, по крайней мере, один элемент* $\bar{x} \in K$ *такой, что* $0 \in$ $\in F(\bar{x}) + P$ *и множество* $Z(P)$ *замкнуто.*

***Доказательство.*** Как и при доказательстве теоремы 3, устанавливается неравенство

$$\sup_{y \in P^-} f(\bar{x}, y) \leq \sup_{y \in P^-} \inf_{d \in D_\varepsilon} f(d(y), y) = f^{\#}(D_\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

где $f(x, y) = -[F(x), y]_+$, а значит, $\sup_{y \in P^-} f(\bar{x}, y) \leq \inf_{\varepsilon > 0} f^{\#}(D_\varepsilon)$. Отсюда, а также из условия (17) получаем оценку

$$\inf_{\varepsilon > 0} \inf_{d \in D_\varepsilon} f(d(y), y) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon = 0 \qquad \forall y \in P^-.$$

Завершается доказательство так же, как и доказательство теоремы 3.

Рассмотрим частный случай, когда $Y$ — рефлексивное банахово пространство, $Y_w$ — пространство $Y$, снабженное слабой топологией, $K$ — замкнутое выпуклое ограниченное подмножество в $Y$ (а значит, и в $Y_w$).

Тогда определено (вообще говоря, многозначное) отображение проектирования $\pi_K : Y \rightrightarrows K$ из $Y$ на $K$ по формуле

$$\pi_K(y) = \left\{ w \in K \mid \|w - y\|_Y = \inf_{v \in K} \|v - y\|_Y \right\}.$$

Очевидно, $\operatorname{dom} \pi_K = Y$ и $\pi_K(y) = y \ \ \forall y \in K$, т. е. $\pi_K$ — многозначная ретракция.

**Лемма 4.** *Отображение* $\pi_K : Y \rightrightarrows K$ *замкнуто выпуклозначное и полунепрерывное сверху из* $Y$ *в* $K \subset Y_w$.

***Доказательство.*** Замкнутость и выпуклость $\pi_K(y)$ $\forall\ y \in Y$ очевидна. Для доказательства полунепрерывности сверху воспользуемся леммой 3, заметив, что $K$ — компактное подмножество в $Y_w$, а отображение $\pi_K$ компактнозначное. Пусть $y_n \to y_0$ в $Y$. Рассмотрим последовательность $\xi_n \in \pi_K(y_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\xi_n \to \xi_0$ слабо в $Y$ (в противном случае следует перейти к подпоследовательности), причем $\xi_0 \in K$. Тогда для любого $w \in K$

$$\|\xi_n - y_n\|_Y = \inf_{v \in K} \|v - y_n\|_Y \le \|w - y_n\|_Y .$$

Переходя здесь к пределу, с учетом слабой полунепрерывности снизу нормы в банаховом пространстве находим

$$\|\xi_0 - y_0\|_Y \le \varliminf_{n\to\infty} \|\xi_n - y_n\|_Y \le \lim_{n\to\infty} \|w - y_n\|_Y = \|w - y_0\|_Y \qquad \forall\, w \in K,$$

или

$$\|\xi_0 - y_0\|_Y \le \inf_{w \in K} \|w - y_0\|_Y ,$$

где $\xi_0 \in K$, т. е. $\xi_0 \in \pi_K(y_0)$. Осталось воспользоваться леммой 3.

***Замечание* 4.** Если $K$ — компакт в $Y$, то отображение $\pi_K : Y \rightrightarrows K$ компактнозначное и полунепрерывное сверху из $Y$ в $K \subset Y$.

**Теорема 6.** *Пусть* $Y$, $Y^*$ *— отделимые локально выпуклые пространства в двойственности,* $P \subset Y$ *— выпуклое множество,* $K$ *— компакт,* $F : K \rightrightarrows Y^*$ *и выполнены следующие условия*:

1) $F : K \to C_V(Y^*)$ *и* $F(x)$ *— равностепенно непрерывное множество в* $Y^*$ [11] *для любого* $x \in K$;

2) *для любого* $y \in P$ *функционал* $K \ni x \mapsto [F(x), y]_+$ *полунепрерывен сверху*;

3) *существует* $D \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$, *для которого*

$$\sup_{d \in D} [F(d(y)), y]_+ \ge 0 \qquad \forall\, y \in P.$$

*Тогда найдется элемент* $\bar{x} \in K$ *такой, что*

$$0 \in F(\bar{x}) + P^-,$$

*где* $P^- = \left\{ w \in Y^* \mid \langle w, y \rangle_Y \le 0 \ \ \forall\, y \in P \right\}$.

Доказательство основано на следующем утверждении, являющемся обобщением леммы 1 [1] на случай локально выпуклых пространств.

**Лемма 5.** *Пусть* $W$ *— локально выпуклое пространство,* $W^*$ *— его топологическое двойственное,* $E \subset W^*$ *— множество, замкнутое в топологии* $\sigma(W^*; W)$, $L : E \to \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \bigcup \{-\infty\}$ *— собственный, полунепрерывный сверху функционал в топологии* $\sigma(W^*; W)$. *Кроме того, пусть либо множество* $E$ *равностепенно непрерывно в* $W^*$, *либо выполнен следующий аналог коэрцитивности*: *для произвольного множества* $U \subset W^*$, *не являющегося равностепенно непрерывным, и* $\lambda \subset \mathbf{R}$ *существует* $w_\lambda \in U$ *такое, что* $L(w_\lambda) \le \lambda$.

*Тогда функционал* $L$ *ограничен сверху на* $E$ *и достигает на* $E$ *верхней* *грани* $l$, *причем множество* $\{w \in E \mid L(w) = l\}$ *компактно в топологии* $\sigma(W^*; W)$.

Следующая теорема является в определенном смысле двойственной к теореме 6.

**Теорема 7.** *Пусть* $Y$ *— отделимое рефлексивное локально выпуклое пространство,* $K$ *— компакт,* $P$ *— выпуклое множество в* $Y^*$ *и имеют место следующие свойства*:

1) $F: K \to C_V(Y)$, $F(x)$ *— ограниченное множество в* $Y$ *для всех* $x \in K$;

2) *для любого* $y \in P$ *функция* $K \ni x \mapsto [F(x), y]_+$ *полунепрерывна сверху*;

3) *для некоторого* $D \in \mathcal{B}_c(P; K)$

$$\sup_{d \in D} [F(d(y)), y]_+ \ \geq \ 0 \qquad \forall\, y \in P.$$

*Тогда включение* $0 \in F(\bar{x}) + P^-$ *имеет решение* $\bar{x} \in K$.

При доказательстве теоремы 7, как и теоремы 6, используется следующий вариант обобщенной теоремы Вейерштрасса.

**Лемма 6.** *Пусть* $E$ *— слабо замкнутое множество в рефлексивном локально выпуклом пространстве* $W$, *функционал* $L: E \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$ *слабо полунепрерывен снизу и выполнено одно из условий*:

а) $E$ *— ограниченное множество в* $W$;

б) *функционал* $L$ *коэрцитивен на* $E$, *т.е. для любого* $\lambda \in \mathbf{R}$ *существует* $y_\lambda \in E$ *такое, что* $L(y_\lambda) \geq \lambda$.

*Тогда функционал* $L$ *ограничен снизу на* $E$, *достигает на* $E$ *своей нижней границы* $l$ *и множество* $\{y \in E \mid L(y) = l\}$ *слабо компактно в* $W$.

***Следствие* 2.** *Пусть* $F: K \rightrightarrows Y$, $P$ *— выпуклый конус в* $Y$ *и справедливы условия*:

1) $F(x) + P \in C_V(Y) \ \ \forall\, x \in K$;

2) *функция* $K \ni x \mapsto [F(x), v]_+$ *полунепрерывна сверху для любого* $v \in P^- = \{z \in Y^* \mid \langle z, v\rangle_Y \leq 0 \ \forall v \in P\}$;

3) *найдется* $D \in \mathcal{B}_c(P^-; K)$ *такое, что* $\sup\limits_{d \in D_\varepsilon} [F(d(v)), v)]_+ \geq 0 \ \ \forall\, v \in P^-$.

*Тогда существует* $\bar{x} \in K$, *для которого* $0 \in F(\bar{x}) + P$.

***Следствие* 3.** *Пусть* $K$ *— компактное подмножество в* $Y$ *(или* $Y_w$*), имеющее многозначную ретракцию* $D \in \mathcal{B}_c(Y; K)$. *Пусть также* $F: K \to C_V(Y^*)$ *— хеминепрерывное сверху отображение и*

$$\sup_{d \in D} [F(d(y)), y]_+ \ \geq \ 0 \qquad \forall\, y \in Y. \tag{18}$$

*Тогда существует элемент* $\bar{x} \in K$ *такой, что* $0 \in F(\bar{x})$.

***Доказательство.*** Достаточно в теореме 2 положить $P = \{0\}$.

Следующее утверждение — многозначный аналог леммы об остром угле.

***Следствие* 4.** *Пусть* $Y$ *— конечномерное пространство,* $F: \overline{B}_r \to C_V(Y)$ *— строгое полунепрерывное сверху отображение,* $\overline{B}_r = \{y \in Y \mid \|y\| \leq r\}$.

*Если при этом*

$$[F(y), y]_+ \ \geq \ 0 \qquad \forall \|y\| \ = \ r, \tag{19}$$

*то существует* $\bar{x} \in \overline{B}_r$, *для которого* $0 \in F(\bar{x})$.

***Доказательство.*** Положим $\delta_r = \{y \in Y \mid \|y\| = r\}$ и рассмотрим многозначное отображение $D: Y \rightrightarrows \delta_r$, определяемое соотношением

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{ry}{\|y\|}, & y \neq 0, \\ \overline{\Gamma}, & y = 0, \end{cases}$$

где $\overline{\Gamma} \subset \delta_r$ — совокупность всех предельных точек последовательностей $\xi_n = \dfrac{ry_n}{\|y_n\|}$ при $y_n \to 0$.

**Лемма 7.** *Отображение* $D$ *принадлежит классу* $\mathcal{B}_c(Y; \overline{B}_r)$.

***Доказательство.*** Очевидно, отображение $D$ замкнутозначно и непрерывно во всех точках $y \neq 0$. Докажем, что при $y = 0$ оно полунепрерывно сверху. Поскольку $\delta_r$ — компакт, то $D(0)$ — компактное подмножество и снова воспользуемся леммой 3. Пусть $y_n \to 0$, тогда $\xi_n = ry_n / \|y\|_n \in \delta_r$ и существует подпоследовательность $\xi_m \to \xi_0$, причем $\xi_0 \in \overline{\Gamma}$, откуда и вытекает полунепрерывность сверху.

Лемма 7 доказана.

Для $y \neq 0$ в силу (19) имеем

$$\frac{r}{\|y\|}\left[F\left(\frac{ry}{\|y\|}\right), y\right]_+ = \left[F\left(\frac{ry}{\|y\|}\right), \frac{ry}{\|y\|}\right]_+ \geq 0,$$

а при $y = 0$ $\sup\limits_{l \in \overline{\Gamma}} [F(l), 0]_+ = 0$ и, таким образом, выполнено условие (17), а значит, существует $\bar{x} \in \overline{B}_r$ такое, что $0 \in F(\bar{x})$.

Следствие 4 доказано.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим симплекс $S_+^n = \left\{x \in \mathbf{R}_+^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$.

***Следствие 5.*** *Пусть* $F : S_+^n \to C_V(\mathbf{R}^n)$ — *строгое хеминепрерывное сверху отображение и*

$$[F(y), y]_+ \geq 0 \qquad y \in S_+^n. \tag{20}$$

*Тогда существует элемент* $\bar{x} \in S_+^n$ *такой, что*

$$0 \leq F(\bar{x}) - \mathbf{R}_+^n. \tag{21}$$

***Доказательство.*** Положим $Y = Y^* = \mathbf{R}^n$, $P = -\mathbf{R}_+^n$, $P^- = \mathbf{R}_+^n$, $K = S_+^n$ и определим многозначное отображение $D : \mathbf{R}_+^n \rightrightarrows S_+^n$ по формуле

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sum_{i=1}^n y_i}, & y \neq 0, \\ \overline{\Gamma}, & y = 0, \end{cases}$$

где множество $\overline{\Gamma} \subset S_+^n$ выбирается по тому же правилу, что и при доказательстве следствия 4. Аналогично доказывается, что $D \in \mathcal{B}_c(\mathbf{R}_+^n; S_+^n)$. Нетрудно убедиться, что из (20) следует условие 3 теоремы 3, а значит, справедливо (21).

***Замечание 5.*** Условие компактности $K$ можно ослабить, заменив его следующим условием: существует $y_0 \in P^-$, при котором $K_0 = \{x \in K \mid [F(x), y_0]_+ \geq 0\}$ — компакт.

**4. Разрешимость операторных включений.** Пусть $V$, $W$ — рефлексивные банаховы пространства, $A : V \rightrightarrows V^*$, $B : W \rightrightarrows W^*$ — многозначные отображения, пространство $X = V \bigcap W$ плотно в $V$ и в $W$, тогда дуальное $X^* = V^* + W^*$. Для $f \in X^*$ и $v \in X$ полагаем $\langle f, v\rangle_X = \langle f_1, v\rangle_V + \langle f_2, v\rangle_W$, где $f = f_1 +$

$+f_2$, $f_1 \in V^*$, $f_2 \in W^*$. Для фиксированного $f \in X^*$ изучаются операторное включение

$$A(y) + B(y) \ni f \tag{22}$$

и вариационное неравенство

$$[A(y), v-y]_+ + \varphi(v) - \varphi(y) \geq \langle f, v-y\rangle_X \qquad \forall\, v \in X, \tag{23}$$

где $\varphi : W \to \mathbf{R}$ — собственная выпуклая функция.

Обозначим через $F(X)$ фильтр конечномерных подпространств в $X$, для $F \in$ $\in F(X)$ $I_F : F \to X$ — оператор вложения, $I_F^* : X^* \to F^*$ — сопряженный оператор. Для каждого $F \in F(X)$ рассмотрим отображение $\mathcal{A}_F : F \rightrightarrows F^*$, порожденное отображением $\mathcal{A} = A + B : X \rightrightarrows X^*$ по правилу $\mathcal{A}_F = I_F^* A I_F$.

**Определение 6.** *Отображение $\mathcal{A} : X \rightrightarrows X^*$ конечномерно локально ограничено, если для любого $F \in F(X)$ и $y_F \in F$ существуют $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\|\mathcal{A}_F(v_F)\|_+ \leq N$, если $\|v_F - y_F\|_+ \leq \varepsilon$.*

**Определение 7.** *Будем говорить, что отображение $A : X \rightrightarrows X^*$ имеет свойство $(\pi)$: если для ограниченного множества $K \subset X$, элемента $v \in X$ и селектора $d(y) \in \overline{\mathrm{co}}\, A(y)$ справедлива оценка $\langle d(y), y - v\rangle_X \leq l$ $\forall\, y \in K$, то найдется $m > 0$ такое, что $\|d(y)\|_{X^*} \leq m$ $\forall\, y \in K$.*

**Теорема 8.** *Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$, $B : W \rightrightarrows W^*$ — $\lambda$-псевдомонотонные конечномерно локально ограниченные отображения, удовлетворяющие условию коэрцитивности*

$$[A(y), y]_+ \geq \gamma_A\big(\|y\|_V\big)\|y\|_V, \tag{24}$$

$$[B(y), y]_+ \geq \gamma_B\big(\|y\|_W\big)\|y\|_W, \tag{25}$$

*где функции $\gamma_A(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $\gamma_B(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ ограничены снизу на отрезке, $\gamma_A(s) \to +\infty$, $\gamma_B(s) \to +\infty$ при $s \to \infty$ и один из операторов ограниченнозначный.*

*Тогда при каждом $f \in X^*$ операторное включение* (22) *имеет слабое решение, т. е. существует $y \in X$ такое, что*

$$[A(y), v]_+ + [B(y), v]_+ \geq \langle f, v\rangle_X \qquad \forall\, v \in X. \tag{26}$$

**Теорема 9.** *Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$, $B : W \rightrightarrows W^*$ — $\lambda_0$-псевдомонотонные совместно $s$-ограниченные отображения, удовлетворяющие условиям* (24), (25), *и одно из них ограниченнозначное, а оператор $\mathcal{A} = A + B : X \rightrightarrows X^*$ имеет свойство $(\pi)$ и конечномерно локально ограничен.*

*Тогда для каждого $f \in X^*$ найдется $r > 0$ такое, что $K_f \cap \overline{B}_r$ непусто и слабо компактно, где $\overline{B}_r$ — замкнутый шар в $X$ радиуса $r$, $K_f = \{y \in X \mid$ $y$ удовлетворяет* (26)$\}$.

***Доказательство теоремы* 8.** Рассмотрим оператор $\mathcal{A} = A + B : X \rightrightarrows X^*$ $(\mathcal{A}(y) = A(y) + B(y),\ y \in X)$.

**Лемма 8.** *Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$, $B : W \rightrightarrows W^*$, тогда справедливо равенство $\mathrm{cl}_{X^*}\mathrm{co}\,\mathcal{A}(y) = \mathrm{cl}_{V^*}\mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{cl}_{W^*}\mathrm{co}\,B(y)$, где $\mathrm{cl}_{X^*}$ — операция замыкания в пространстве $X^*$.*

Как известно, $\mathrm{co}\,\mathcal{A}(y) = \mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{co}\,B(y)$ [7], следовательно, $\mathrm{cl}_{X^*}\,\mathrm{co}\,\mathcal{A}(y) \supset$ $\supset \mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{co}\,B(y)$. Отсюда получаем

$$\mathrm{cl}_{X^*}\,\mathrm{co}\,\mathcal{A}(y) \;\supset\; \mathrm{cl}_{V^*}\,\mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{cl}_{W^*}\,\mathrm{co}\,B(y).$$

Действительно, для произвольных $w \in \mathrm{cl}_{V^*}\mathrm{co}\,A(y)$, $v \in \mathrm{cl}_{W^*}\mathrm{co}\,B(y)$ найдутся $\mathrm{co}\,A(y) \ni w_n \to w$ сильно в $V^*$, $\mathrm{co}\,B(y) \ni v_n \to v$ сильно в $W^*$, значит, $w_n + v_n \in \mathrm{co}\,\mathcal{A}(y)$ и $w_n + v_n \to w + v$ сильно в $X^*$,

$$\|(w_n - w) + (v_n - v)\|_{X^*} \;\le\; \max\left\{\|w_n - w\|_{V^*},\, \|v_n - v\|_{W^*}\right\},$$

т. е. $w + v \in \mathrm{cl}_{X^*}\mathrm{co}\,\mathcal{A}(y)$, что доказывает требуемое вложение. С другой стороны, $\mathrm{co}\,\mathcal{A}(y) \subset \mathrm{cl}_{V^*}\,\mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{cl}_{W^*}\,\mathrm{co}\,B(y)$, и остается доказать, что множество $\mathrm{cl}_{V^*}\,\mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{cl}_{W^*}\,\mathrm{co}\,B(y)$ замкнуто в $X^*$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\xi_n\} \subset \mathrm{cl}_{V^*}\,\mathrm{co}\,A(y) + \mathrm{cl}_{W^*}\,\mathrm{co}\,B(y)$, сильно сходящуюся к $\xi$ в $X^*$. При этом найдется такое представление $\xi_n = w_n + v_n$, что последовательность $\{w_n\} \subset \mathrm{cl}_{V^*}\,\mathrm{co}\,A(y)$ ограничена в $V^*$, а последовательность $\{v_n\} \subset \mathrm{cl}_{W^*}\,\mathrm{co}\,B(y)$ ограничена в $W^*$ в силу ограниченнозначности одного из отображений.

Значит, выделяя подходящие подпоследовательности, имеем $w_m \to w$ слабо в $V^*$, $v_m \to v$ слабо в $W^*$, причем $w \in \mathrm{cl}_{V^*}\mathrm{co}\,A(y)$, $v \in \mathrm{cl}_{W^*}\mathrm{co}\,B(y)$, откуда

$$\langle \xi_m, f\rangle_X \;=\; \langle w_m, f\rangle_V + \langle v_m, f\rangle_W \;\to\; \langle w + v, f\rangle_X \quad \forall f \in X, \quad \text{т.е.} \quad \xi = w + v.$$

Теорема 8 доказана.

**Лемма 9.** *Пусть* $A : V \rightrightarrows V^*$ *и* $B : W \rightrightarrows W^*$ — $\lambda$*-псевдомонотонные отображения. Тогда оператор* $\mathcal{A} = A + B : X \rightrightarrows X^*$ $\lambda$*-псевдомонотонный.*

***Доказательство.*** Пусть $y_n \to y$ слабо в $X$ (а значит, $V$ и $W$), $d_n \in \overline{\mathrm{co}}\,\mathcal{A}(y_n)$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle d_n, y_n - y\rangle_X \;\le\; 0. \tag{27}$$

При этом в силу леммы 8 $d_n = w_n + v_n$, где $w_n \in \overline{\mathrm{co}}\,A(y_n)$, $v_n \in \overline{\mathrm{co}}\,B(y_n)$. Здесь и далее, если это не приводит к недоразумению, $\overline{\mathrm{co}}$ означает замыкание выпуклой оболочки в соответствующем пространстве. Из неравенства (27) находим

$$0 \;\ge\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle w_n, y_n - y\rangle_V \;+\; \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle v_n, y_n - y\rangle_W,$$

откуда, как и при доказательстве предложения 7 [1], приходим к одному из двух соотношений (для соответствующей подпоследовательности)

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\langle w_m, y_m - y\rangle_V \;\le\; 0, \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}}\,\langle v_m, y_m - y\rangle_W \;\le\; 0. \tag{28}$$

При выполнении первого соотношения существуют $\{y_{m_k}\} \subset \{y_m\}$ и $\{w_{m_k}\} \subset \{w_m\}$, для которых

$$\underline{\lim_{m_k\to\infty}}\,\langle w_{m_k}, y_{m_k} - z\rangle_V \;\ge\; [A(y), y - z]_- \qquad \forall z \in V, \tag{29}$$

следовательно, $\langle w_{m_k}, y_{m_k} - y\rangle_V \to 0$ и из (28) вытекает $\overline{\lim_{m_k\to\infty}}\,\langle v_{m_k}, y_{m_k} - y\rangle_W \le 0$. Еще раз переходя к подпоследовательностям и используя $\lambda$-псевдомонотонность оператора $B$, заключаем, что

$$\underline{\lim_{m_{k'}\to\infty}}\,\langle v_{m_{k'}}, y_{m_{k'}} - z\rangle_W \;\ge\; [B(y), y - z]_- \qquad \forall z \in W.$$

Отсюда и из (29) окончательно имеем

$$\varliminf_{m_{k'}\to\infty}\langle d_{m_{k'}}, y_{m_{k'}}-z\rangle_X \geq \varliminf_{m_k\to\infty}\langle w_{m_k}, y_{m_k}-z\rangle_V + \varliminf_{m_{k'}\to\infty}\langle v_{m_{k'}}, y_{m_{k'}}-z\rangle_W \geq$$
$$\geq [A(y), y-z]_- + [B(y), y-z]_- = [\mathscr{A}(y), y-z]_- \quad \forall z\in X.$$

**Лемма 10.** *Пусть* $A: V \rightrightarrows V^*$, $B: W \rightrightarrows W^*$ *— конечномерно локально ограниченные операторы, удовлетворяющие условиям* (24), (25). *Тогда оператор* $\mathscr{A} = A + B : X \rightrightarrows X^*$ *конечномерно локально ограничен и*

$$\|y\|_X^{-1}[\mathscr{A}(y), y]_+ \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|y\|_X \to \infty. \tag{30}$$

***Доказательство.*** Пусть $F(X)$ — упорядоченный по включению фильтр конечномерных подпространств в $X$. Для каждого $F\in F(X)$ рассмотрим $\mathscr{A}_F(y) = I_F^*\mathscr{A}(y)$. При этом $F$ — конечномерное подпространство в $V$ и в $W$, следовательно, $I_{F,V} = I_V \circ I_F : F \to V$, $I_{F,W} = I_W \circ I_F : F\to W$, где $I_V: X\to V$, $I_W: X\to W$ — канонические непрерывные вложения. Тогда, полагая $A_F(y) = I_F^*(I_V^*A(y))$, $B_F(y) = I_F^*(I_W^*B(y))$, имеем $\mathscr{A}_F(y) = A_F(y)+B_F(y)$.

По условию теоремы для любого $y\in F$ существуют $M_V$, $M_W$, $\varepsilon_V$ и $\varepsilon_W$ такие, что $\|A_F(\zeta)\|_+ \leq M_V$, если $\|\zeta - y\|_F \leq \varepsilon_V$, и, соответственно, $\|B_F(\xi)\|_+ \leq M_W$, если $\|\xi - y\|_F \leq \varepsilon_W$. Значит,

$$\|\mathscr{A}_F(\zeta)\|_+ \leq \|A_F(\zeta)\|_+ + \|B_F(\zeta)\|_+ \leq M = M_V + M_W$$

при всех $\zeta$, удовлетворяющих оценке $\|\zeta - y\|_F \leq \min(\varepsilon_V, \varepsilon_W)$.

Здесь учтено то обстоятельство, что нормы на $F$, индуцированные из $X$, $V$ и $W$, эквивалентны, что и доказывает локальную конечномерную ограниченность оператора $\mathscr{A}$.

Докажем свойство (30). Рассмотрим последовательность $\{y_n\}\subset X$ такую, что $\|y_n\|_X = \|y_n\|_V + \|y_n\|_W \to\infty$. При этом возможны три случая:

1. Пусть $\|y_n\|_V\to\infty$, $\|y_n\|_W\leq k$. Тогда $[A(y_n), y_n]_+ \geq \gamma_A(\|y_n\|_V)\|y_n\|_V$ и $\|y_n\|_X^{-1}[A(y_n), y_n]_+ \geq \gamma_A(\|y_n\|_V)\|y_n\|_V\|y_n\|_X^{-1} \to +\infty$, поскольку $\gamma_A(s)\to+\infty$ при $s\to\infty$, а $0 < \|y_n\|_V\|y_n\|_X^{-1} < 1$ при $\|y_n\|_W\leq k$. В этом случае

$$\|y_n\|_X^{-1}[B(y_n), y_n]_+ \geq \gamma_B(\|y_n\|_W)\|y_n\|_W\|y_n\|_X^{-1} \to 0,$$

так как функция $\gamma_B(\|y_n\|_W)$ ограничена снизу.

Следовательно,

$$\|y_n\|_X^{-1}[\mathscr{A}(y_n), y_n]_+ = \|y_n\|_X^{-1}[A(y_n), y_n]_+ + \|y_n\|_X^{-1}[B(y_n), y_n]_+ \to +\infty$$

при $\|y_n\|_V\to\infty$, $\|y_n\|_W\leq k$.

2. Случай $\|y_n\|_W\to\infty$, $\|y_n\|_V\leq k$ исследуется аналогично.

3. Рассмотрим наконец случай, когда $\|y_n\|_V\to\infty$ и $\|y_n\|_W\to\infty$. Тогда

$$\|y_n\|_X^{-1}[\mathscr{A}(y_n), y_n]_+ \geq \gamma_A(\|y_n\|_V)\|y_n\|_V\left(\|y_n\|_V + \|y_n\|_W\right)^{-1} +$$
$$+ \gamma_B(\|y_n\|_W)\|y_n\|_W\left(\|y_n\|_V + \|y_n\|_W\right)^{-1}. \tag{31}$$

Очевидно, $\|y_n\|_V\|y_n\|_X^{-1} > 0$, $\|y_n\|_W\|y_n\|_X^{-1} > 0$, и если один из пределов, например $\|y_n\|_W\|y_n\|_X^{-1}$, стремится к нулю при $n\to\infty$, то $\|y_n\|_X^{-1}\|y_n\|_V = 1 - \|y_n\|_X^{-1}\|y_n\|_W \to 1$ и из (31) получаем (30).

Лемма 10 доказана.

***Замечание 6.*** Лемму 10 можно уточнить. Отображение $\mathscr{A} = A + B$:

$X \rightrightarrows X^*$ конечномерно локально ограничено тогда и только тогда, когда конечномерно локально ограничены $A : V \rightrightarrows V^*$ и $B : W \rightrightarrows W^*$.

Таким образом, задача (26) сводится к нахождению $y \in X$, при котором

$$[\mathcal{A}(y), v]_+ \geq \langle f, v \rangle_X, \tag{32}$$

где $\mathcal{A} : X \rightrightarrows X^*$ — конечномерно локально ограниченное $\lambda$-псевдомонотонное отображение, удовлетворяющее условию коэрцитивности (30).

Обозначим $K_f = \{ y \in X \mid [\mathcal{A}(y), v]_+ \geq \langle f, v \rangle_X,\ v \in X \}$, $\overline{B}_r$ — замкнутый шар в $X$ радиуса $r$.

**Утверждение 2.** *Пусть* $\mathcal{A} : X \rightrightarrows X^*$ — *конечномерно локально ограниченное* $\lambda$*-псевдомонотонное отображение и справедливо* (30). *Тогда для каждого* $f \in X^*$ *найдется* $r > 0$ *такое, что множество* $K_f \cap \overline{B}_r$ *непусто и слабо компактно.*

***Доказательство.*** Для каждого $F \in F(X)$ положим $\overline{\mathcal{A}}_F = \overline{I_F^* \overline{\mathrm{co}} \mathcal{A}} : F \rightrightarrows F^*$ и заметим, что $\overline{\mathcal{A}}_F(x) \in C_V(F^*)$ $\forall\, x \in F$. Последнее вытекает из следующего утверждения [4].

**Лемма 11.** *Пусть* $\mathcal{A} : X \rightrightarrows X^*$ — *некоторое отображение. Тогда для каждого* $F \in F(x)$ *справедливо равенство* $\overline{\mathrm{co}}\, I_F^* \mathcal{A}(x) = I_F^* \overline{\mathrm{co}} \mathcal{A}(x)$ $\forall\, x \in F$.

Рассмотрим функцию $\gamma : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, определяемую соотношением $\gamma(r) = \inf\limits_{\|y\|_X = r} \|y\|_X^{-1} [\mathcal{A}(y), y]_+$. В силу условия (30) нетрудно убедиться, что $\gamma(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, причем $[\mathcal{A}(y) - f, y]_+ \geq \big(\gamma(\|y\|_X) - \|f\|_{X^*}\big)\|y\|_X$, значит, найдется $r > 0$ такое, что

$$[\mathcal{A}(y) - f, y]_+ \geq 0 \qquad \forall\, y \in \partial B_r. \tag{33}$$

Аналогично доказательству леммы 1 [4] можно показать, что для любого $F \in F(x)$ $\overline{\mathcal{A}}_F : F \rightrightarrows F^*$ — полунепрерывное сверху отображение.

Положим $\overline{B}_{r,F} = F \cap \overline{B}_r$, тогда для любого $x \in \partial B_{r,F}$ имеет место оценка

$$[\overline{\mathcal{A}}_F(x) - f_F, x]_+ \geq 0, \tag{34}$$

где $f_F = I_F^* f$. Действительно, используя (33), получаем

$$[\overline{\mathcal{A}}_F(x) - f_F, x]_+ = \sup_{d_F \in \overline{\mathcal{A}}_F(x)} \langle d_F - f_F, x \rangle_F = \sup_{d \in \overline{\mathrm{co}} \mathcal{A}(x)} \langle d - f, x \rangle_X [A(x) - f, x]_+ \geq 0.$$

Здесь $d_F = I_F^* d$, $d \in \overline{\mathrm{co}} \mathcal{A}(x)$.

Отсюда с учетом свойств верхних и нижних форм и леммы 10 заключаем, что $\overline{\mathcal{A}}_F : F \rightrightarrows F^*$ — полунепрерывное сверху отображение. Значит, выполнены все условия многозначного аналога леммы об остром угле (следствие 4), из которой следует существование $y_F \in \overline{B}_{r,F}$, для которого $\overline{\mathcal{A}}_F(y_F) \ni f_F$, что эквивалентно неравенству

$$[A(y_F), x]_+ \geq \langle f, x \rangle_X \qquad \forall\, x \in F. \tag{35}$$

Далее, с некоторыми техническими модификациями доказательство утверждения завершается так же, как соответствующая часть доказательства теоремы 1 [4].

Для каждого $F_0 \in F(X)$ определим

$$G_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \{ y_F \in \overline{B}_{r,F} \mid [\mathcal{A}_F(y_F), x]_+ \geq \langle f_F, x \rangle_F \ \ \forall x \in F \}.$$

Очевидно, $G_{F_0} \neq \varnothing$ и содержится в $\overline{B}_r$, который в силу теоремы Банаха – Алаоглу является слабо компактным множеством. Рассмотрим семейство непустых подмножеств $\{G_F \mid F \in F(X)\}$ и $\{\overline{G}_F^w \mid F \in F(X)\}$, где $\overline{G}_F^w$ — слабое замыкание множества $G_F$ в $X$.

Для каждого конечного набора $F_1, \ldots, F_n \in F(X)$ и $F \in F(X)$ таких, что $\bigcup_{i=1} F_i \subset F$, имеем $G_F \subset \bigcap_{i=1}^n G_{F_i} \neq \varnothing$. Значит, семейство $\{G_F \mid F \in F(X)\}$, и тем более $\{\overline{G}_F^w \mid F \in F(X)\}$, является центрированным семейством в слабом компакте $\overline{B}_r$, поэтому [6] $\bigcap_{F \in F(X)} \overline{G}_F^w \neq \varnothing$. Рассмотрим $y_0 \in \bigcap_{F \in F(X)} \overline{G}_F^w$ и выберем $F_0 \in F(X)$ так, чтобы $y_0 \in F_0$. Тогда найдется последовательность $y_n \in \in F_n \supset F_0$ $(y_n \in \overline{B}_r)$, $F_n \in F(X)$, слабо сходящаяся к $y_0$ в $X$, а также $d_n' \in \in \overline{\mathscr{A}}_{F_n}(y_n)$, $d_n' = f_n = I_{F_n}^* f$. В таком случае

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X = \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n', y_n - y_0 \rangle_{F_n} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle f_n, y_n - y_0 \rangle_{F_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle f, y_n - y_0 \rangle_X = 0,$$

где $d_n \in \overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}(y_n)$, $d_n' = I_{F_n}^* d_n$, так как $I_{F_n}^* \overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}(y_n) = \overline{\mathrm{co}}\, I_{F_n}^* \mathscr{A}(y_n) = \overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}_{F_n}(y_n)$.

А поскольку оператор $\mathscr{A}: X \rightrightarrows X^*$ $\lambda$-псевдомонотонный, найдутся подпоследовательности $\{y_m\}$ и $\{d_m\}$, для которых

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v \rangle_X \geq [\mathscr{A}(y_0), y_0 - v]_- \quad \forall v \in X. \tag{36}$$

С другой стороны, для произвольного $v \in X$ найдутся $F \in F(X)$ и $m_0$ такие, что $v \in F$, $y_m \in F_m \supset F$ $\forall m \geq m_0$. Тогда

$$\langle d_m, y_m - v \rangle_X = \langle d_m', y_m - v \rangle_{F_m} = \langle f_m, y_m - v \rangle_{F_m} = \langle f, y_m - v \rangle_X \quad \forall m \geq m_0,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v \rangle_X = \langle f, y_0 - y \rangle_X.$$

Отсюда и из (36) получаем

$$\langle f, y_0 - v \rangle_X \geq \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v \rangle_X \geq [\mathscr{A}(y_0), y_0 - v]_- \quad \forall v \in X,$$

что эквивалентно неравенству

$$[\mathscr{A}(y_0), w]_+ \geq \langle f, w \rangle_X \quad \forall w \in X,$$

т. е. $K_f \cap \overline{B}_r \neq \varnothing$.

Пусть теперь $\{y_n\} \subset K_f \cap \overline{B}_r$ — произвольная последовательность. Она ограничена и можем считать, что $y_n \to y_0$ слабо в X (иначе следует перейти к подпоследовательности), причем

$$[\mathscr{A}(y_n), w]_+ \geq \langle f, w \rangle_X \quad \forall w \in X,$$

что эквивалентно включению $\overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}(y_n) \ni f$. Значит, при каждом $n = 1, 2, \ldots$ найдется $d_n \in \overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}(y_n)$ такое, что $d_n = f$. Отсюда непосредственно заключаем, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \leq 0$, и согласно $\lambda$-псевдомонотонности оператора $\mathscr{A}$ существуют $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ и $\{d_m\} \subset \{d_n\}$ такие, что

$$\langle f, y_0 - y \rangle_X = \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle d_m, y_m - v \rangle_X \geq [\mathscr{A}(y_0), y_0 - v]_- \quad \forall v \in X,$$

т. е. $[\mathcal{A}(y_0), w]_+ \ \geq \ \langle f, w\rangle_X \quad \forall w \in X \Rightarrow y_0 \in K_f \bigcap \overline{B}_r$.

Лемма 11 доказана.

Поскольку $[\mathcal{A}(y), v]_+ = [A(y), v]_+ + [B(y), v]_+$, теорема 8 доказана.

***Замечание* 7.** Теорема 9 доказывается аналогично.

Анализируя доказательство теоремы 8, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 10.** *Пусть* $A : V \rightrightarrows V^*$, $B : W \rightrightarrows W^*$ — $\lambda$*-псевдомонотонные отображения, удовлетворяющие условиям* (24), (25), *и при каждом* $F \in F(X)$ *конечномерные отображения* $\overline{A}_F : F \rightrightarrows F^*$, $\overline{B}_F : F \rightrightarrows F^*$ *полунепрерывны сверху. Тогда справедливо утверждение теоремы* 8.

***Доказательство.*** Достаточно заметить, что для каждого $F \in F(X)$ в силу равенства $\mathcal{A}_F(y) = A_F(y) + B_F(y)$ (см. доказательство леммы 10) оператор $\overline{\mathrm{co}}\,\mathcal{A}_F$ является полунепрерывным сверху.

**Утверждение 3.** *Пусть* $A : X \rightrightarrows X^*$ — *конечномерно локально ограниченный* $\lambda$*-псевдомонотонный оператор, справедливо* (30), *отображение* $B : X \rightrightarrows X^*$ *удовлетворяет условиям* а), б) *предложения* 7 *и*

$$[B(y_1), y_1 - y_2]_+ \ \geq \ [B(y_2), y_1 - y_2]_- \qquad \forall\, y_1, y_2 \in X. \tag{37}$$

*Тогда оператор* $C = A + B$ *удовлетворяет всем условиям утверждения* 2.

***Доказательство.*** Аналогично предложению 7 [1] доказывается, что $C$ — $\lambda$-псевдомонотонный оператор, конечномерно локально ограниченный в силу ограниченности $B$.

Остается установить его коэрцитивность. С учетом (37) получаем

$$[C(y), y]_+ = [A(y), y]_+ + [B(y), y]_+ \ \geq \ [A(y), y]_+ - \|B(0)\|_- \|y\|_X.$$

Поскольку $\|B(0)\|_-$ — конечное число, из полученного соотношения находим $\|y\|_X^{-1}[C(y), y]_+ \to +\infty$ при $\|y\|_X \to \infty$.

Утверждение доказано.

***Замечание* 8.** Утверждение 3 остается в силе, если отображения $A : X \rightrightarrows X^*$, $B : X \rightrightarrows X^*$ удовлетворяют условиям предложения 8 [1] и выполняется неравенство (37).

Изучим вариационное неравенство с многозначными отображениями вида

$$[A(y), v - y]_+ + [B(y), v - y]_+ + \varphi(v) - \varphi(y) \ \geq \ \langle f, v - y\rangle_X \qquad \forall\, v \in X, \tag{38}$$

где $A : V \rightrightarrows V^*$, $B : W \rightrightarrows W^*$, $\varphi : X \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал, $f \in X^*$.

**Теорема 11.** *Пусть операторы* $A$, $B$ *удовлетворяют условиям теоремы* 8 (*или* 9), $\varphi : X \to \mathbf{R}$ — *выпуклый полунепрерывный снизу функционал. Тогда для любого* $f \in X^*$ *вариационное неравенство* (38) *имеет, по крайней мере, одно решение.*

***Доказательство.*** В условиях теоремы функционал $\varphi$ порождает строгое субдифференциальное отображение $\partial\varphi : X \rightrightarrows X^*$, которое полунепрерывно сверху, монотонно и имеет замкнутые выпуклые ограниченные значения в $X^*$ [12]. Следовательно, $\partial\varphi : X \rightrightarrows X^*$ — $\lambda$-псевдомонотонное конечномерно локально ограниченное отображение.

Наряду с (38) рассмотрим операторное включение

$$\overline{\mathrm{co}}\, A(y) + \overline{\mathrm{co}}\, B(y) + \partial\varphi(y) \ \ni f. \tag{39}$$

Включение (39) эквивалентно вариационному неравенству (38) [4]. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что оператор

$$\mathscr{A} = \overline{\mathrm{co}}\, A + \overline{\mathrm{co}}\, B + \partial\varphi$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 8 (или 9), из которой вытекает разрешимость (39).

Теорема 11 доказана.

Теперь рассмотрим неравенство (38), в котором $B = 0$, а функционал $\varphi : W \to \mathbf{R}$, т. е.

$$[A(y), v - y]_+ + \varphi(v) - \varphi(y) \geq \langle f, v - y \rangle_X \qquad \forall\, v \in X. \tag{40}$$

**Теорема 12.** *Пусть оператор* $A : V \rightrightarrows V^*$ *удовлетворяет условиям теоремы* 8 (*или* 9), $\varphi : W \to \mathbf{R}$ — *выпуклый полунепрерывный снизу на* $W$ *функционал, причем*

$$\varphi(y) \geq \gamma_\varphi\big(\|y\|_W\big)\|y\|_W, \tag{41}$$

*где* $\gamma_\varphi(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ — *ограниченная снизу на отрезках функция и* $\gamma_\varphi(s) \to +\infty$ *при* $s \to \infty$.

*Тогда вариационное неравенство* (40) *имеет решение* $y \in X = V \bigcap W$.

***Доказательство.*** При каждом $y \in W$ субдифференциал $\partial\varphi(y)$ — непустое замкнутое выпуклое ограниченное множество в $W^*$, а отображение $\partial\varphi : W \rightrightarrows W^*$ — монотонное локально ограниченное полунепрерывное сверху. Рассмотрим ассоциативное с (40) операторное включение

$$\overline{\mathrm{co}}\, A(y) + \partial\varphi(y) \ni f.$$

Отображение $\mathscr{A} = \overline{\mathrm{co}}\, A + \partial\varphi : X \rightrightarrows X^*$ $\lambda$-псевдомонотонное и, согласно оценке (41), а также естественному неравенству

$$\varphi(0) + [\partial\varphi(y), y]_+ \geq \varphi(y),$$

при $\|y\|_W \to \infty$ получаем

$$\|y\|_W^{-1}[\partial\varphi(y), y]_+ \geq \gamma_\varphi\big(\|y\|_W\big) - \|y\|_W^{-1}\varphi(0) \to +\infty,$$

т. е. оператор $\mathscr{A}$ коэрцитивен на $X$ и выполнены все условия теоремы 8. Для условий теоремы 9 рассуждения аналогичны.

***Пример.*** Пусть $\Omega$ — ограниченное открытое множество в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с регулярной границей $\partial\Omega$ [2], функция $h : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для всех $s \in \mathbf{R}$ функция $\Omega \ni x \mapsto h(x, s)$ измерима;

2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\mathbf{R} \in s \mapsto h(x, s)$ выпукла и полунепрерывна снизу;

3) существуют функции $g_0, g_1 \in L_1(\Omega)$ и число $\alpha \geq 0$ такие, что для всех $s \in \mathbf{R}$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы оценки

$$g_0(x) \leq h(x, s) \leq g_1(x) + \alpha|s|^p, \tag{42}$$

где $1 < p < \infty$.

В банаховом пространстве $L_p(\Omega)$ суммируемых со степенью $p$ функций рассмотрим интегральный функционал

$$\varphi(y) = \int_\Omega h(x, y(x))\,dx.$$

**Лемма 12.** *Пусть выполнены условия* 1 – 3. *Тогда* $\varphi : L_p(\Omega) \to \mathbf{R}$ — *выпуклый полунепрерывный снизу функционал,* $\mathrm{dom}\,\varphi = L_p(\Omega)$, *причем*

$$\partial\varphi(y) = \big\{\xi \in L_q(\Omega) \,\big|\, \xi(x) \in \partial_s h(x, y(x)) \text{ п.в.}\big\},$$

*где* $p^{-1}+q^{-1} = 1$, $\partial_s h(x, s)$ *— субдифференциал функции* $h(x, s)$ *по второму аргументу.*

***Доказательство.*** Выпуклость очевидна, а полунепрерывность снизу следует из нижней оценки (42) и леммы Лебега – Фату. Из верхней оценки (42) получаем $\operatorname{dom}\varphi = L_p(\Omega)$. Как известно, сопряженный функционал имеет вид

$$\varphi^*(\xi) = \int_\Omega h^*(x, \xi(x))dx,$$

где $\xi \in L_q(\Omega)$, $h^*(x, s) = \sup_{t\in\mathbf{R}} \{ts - h(x, s)\}$.

Соотношение $\xi \in \partial\varphi(y)$ эквивалентно равенству

$$\varphi(y) + \varphi^*(\xi) = \int_\Omega y(x)\xi(x)dx$$

или

$$\int_\Omega \Big[h(x, y(x)) + h^*(x, \xi(x)) - y(x)\xi(x)\Big]dx = 0.$$

Поскольку подынтегральное выражение неотрицательное, то

$$h(x, y(x)) + h^*(x, \xi(x)) = y(x)\xi(x) \quad \text{п. в.},$$

что эквивалентно включению $\xi(x) \in \partial_s h(x, y(x))$ п. в.

Таким образом, доказано вложение

$$\partial\varphi(y) \subset \{\xi \in L_q(\Omega) \big| \, \xi(x) \in \partial_s h(x, y(x)) \text{ п. в.}\} = N.$$

Если же $\xi \in N$, то, очевидно,

$$\varphi(y) + \varphi^*(\xi) = \langle \xi, y \rangle,$$

откуда $\xi \in \partial\varphi(y)$.

Лемма 12 доказана.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами $\alpha_i$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$,

$$D^\alpha y(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} y(x), \qquad D^k y = \Big\{D^\alpha y \Big| \, |\alpha| = k\Big\}.$$

Обозначим через $M_1$, $M_2$ число различных мультииндексов $\alpha$, $\beta$ длины, не большей чем $m$ и $m-1$ соответственно, $W_p^m(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих $L_p(\Omega)$, обобщенные частные производные которых до порядка $m$ включительно также принадлежат $L_p(\Omega)$, $\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ — подпространство пространства $W_p^m(\Omega)$, являющееся замыканием гладких финитных функций в $W_p^m(\Omega)$.

Рассмотрим семейство $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ вещественных функций $\big(|\alpha| \le m\big)$, определенных в $\Omega \times \mathbf{R}^{M_2} \times \mathbf{R}^{M_1}$ и удовлетворяющих следующим условиям [3]:

а) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\mathbf{R}^{M_2} \times \mathbf{R}^{M_1} \ni (\eta, \xi) \mapsto A_\alpha(x, \eta, \xi)$ непрерывна и для всех $\eta$, $\xi$ функция $\Omega \ni x \mapsto A_\alpha(x, \eta, \xi)$ измерима;

б) существуют функция $l \in L_q(\Omega)$ и константа $c > 0$ такие, что

$$|A_\alpha(x, \eta, \xi)| \le C\Big(\|\eta\|^{p-1} + \|\xi\|^{p-1} + l(x)\Big) \quad \text{п. в. для} \quad x \in \Omega;$$

в) для почти всех $x \in \Omega$ и произвольных ограниченных $\|\eta\|$

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\xi_\alpha \frac{1}{\|\xi\| + \|\xi\|^{p-1}} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|\xi\| \to \infty;$$

г) для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\eta$

$$\sum_{|\alpha|=m} \left(A_\alpha(x, \eta, \xi') - A_\alpha(x, \eta, \xi'')\right)\left(\xi'_\alpha - \xi''_\alpha\right) > 0 \quad \text{при} \quad \xi' \neq \xi''.$$

Положим $\delta y = \{y, Dy, \ldots, D^{m-1}y\}$, тогда для любых $y, w \in W_p^m(\Omega)$ определена форма

$$a(y, w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta y, D^m y) D^\alpha w\, dx.$$

Пусть $V$ — замкнутое векторное подпространство в $W_p^m(\Omega)$ такое, что

$$\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega).$$

Рассмотрим многозначное отображение $A : V \rightrightarrows V^*$, порожденное формулой

$$\langle A(y), w\rangle_V = \left\{a(y, w) + \int_\Omega \xi w\, dx \mid \xi \in \partial\varphi(y)\right\} = \langle A_1(y), w\rangle_V + \langle A_2(y), w\rangle_V.$$

При выполнении условий 1 – 3 и а) – г) отображение $A = A_1 + A_2 : V \rightrightarrows V^*$ является $\lambda$-псевдомонотонным.

**Теорема 13.** *Пусть выполнены условия* 1 – 3 *и* а) – г), $f \in V^*$ *и* $\|y\|_V^{-1} a(y, y) \to +\infty$ *при* $\|y\|_V \to \infty$.

*Тогда включение*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \partial y, D^m y) + \partial_s h(x, y) \ni f$$

*имеет обобщенное решение* $y \in V$.

При предположениях 1 – 3, а) – г) выполнены все условия теоремы 8.


1. *Мельник В. С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 184 – 194.
2. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
4. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513 – 1523.
5. *Melnik V. S., Vakulenko A. N.* On topological method in the theory of operator inclusions with dencely defined mapping in Banach spaces // Nonlinear Boundary Value Problems. – 2000. – **10**. – P. 125 – 142.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 357 с.
7. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
8. *Мельник В. С.* Узагальнена нерівність Кі Фаня і нулі багатозначних відображень // Допов. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 15 – 19.
9. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – Киев: Наук. думка, 1999. – 630 с.
10. *Обэн Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 359 с.
12. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Про властивості субдиференціальних відображень у просторах Фреше // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1385 – 1394.


Получено 31.10.2005