УДК 517.9

О. М. Станжицький, А. П. Креневич (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ ДИХОТОМІЇ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІТО З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

The conditions of exponential dichotomy in mean square of linear stochastic Ito systems are considered. We prove that a sufficient condition for the exponential dichotomy is the existence of a quadratic form whose derivative is negatively defined by virtue of a system. We also prove the converse theorem.

Вивчаються умови експоненціальної дихотомії в середньому квадратичному систем лінійних стохастичних систем Іто. Доведено, що достатньою умовою експоненціальної дихотомії є існування квадратичної форми, похідна від якої в силу системи від'ємно означена. Також доведено обернену теорему.

1. Вступ. Предметом вивчення даної статті є питання якісної теорії стохастичних диференціальних рівнянь Іто, в якій важливим є поняття експоненціальної дихотомії, оскільки воно містить дослідження як стійкості систем, так і необмеженого росту розв'язків.

У роботі [1] дослідження експоненціальної дихотомії лінійних стохастичних систем Іто пов'язували з існуванням обмежених у середньому квадратичному на додатній півосі розв'язків неоднорідної системи. Отримані результати мають переважно теоретичний характер і, взагалі кажучи, не достатньо ефективні для практичної перевірки дихотомії.

Як відомо (див. [2]), у випадку систем звичайних диференціальних рівнянь зі скінченновимірним простором початкових даних питання дихотомії еквівалентне існуванню квадратичної форми, похідна від якої в силу системи є від'ємно означеною. В роботі [3] наведено умови дихотомії стохастичних систем у термінах квадратичних форм. Ці умови є зручними з практичної точки зору, оскільки методи побудови квадратичних форм, що задовольняють певні умови в силу системи, для стохастичних систем типу Іто досить добре розроблені. Але слід зауважити, що в [3] питання дихотомії розглянуто для систем з детермінованими початковими даними із скінченновимірного простору.

Таким чином, постало питання дихотомії лінійних систем із випадковими початковими даними з простору інтегровних із квадратом випадкових функцій. Як показано в [4], для систем звичайних диференціальних рівнянь нескінченної розмірності існування квадратичної форми, похідна від якої в силу системи є від'ємно означеною, не гарантує дихотомії. Тому в даній роботі наведено умови експоненціальної дихотомії в термінах квадратичних форм для систем стохастичних диференціальних рівнянь із випадковими початковими даними в дещо вужчому сенсі й отримано умови, при яких система експоненціально дихотомічна в сенсі означення, введеного в [1].

Також у роботі отримано обернений результат, а саме, якщо система експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному на додатній півосі, то існує квадратична форма, похідна від якої в силу системи є від'ємно означеною.

Слід зауважити, що перелічені вище проблеми розглядались у роботах [5, 6] для систем стохастичних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx = A(t)xdt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)xdW_i(t), \tag{1}$$

де $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, $A(t)$, $B_i(t)$ — детерміновані, неперервні по t і обмежені на додатній півосі матриці; $W_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, — незалежні в сукупності вінерові процеси, задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, P)$; $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — потік σ-алгебр, таких, що згадані вище вінерові процеси узгоджені з даним потоком та не залежать від $\mathcal{F}_0$. $L_2(s)$ — простір обмежених у середньому квадратичному $\mathcal{F}_s$-вимірних випадкових величин із нормою $\|x(s)\| \equiv \sqrt{M|x(s)|^2}$ при кожному фіксованому $s \leq t$, $L_2 \equiv L_2(0)$.

Тоді, як відомо (див., наприклад, [7, с. 230]), для будь-якого $x_s \in L_2(s)$ система (1) має єдиний сильний розв'язок задачі Коші $x(t, x_s)$ $(x(s, x_s) = x_s)$, визначений при $t \geq s \geq 0$, $\mathcal{F}_t$-вимірний і такий, що має при $t \geq s \geq 0$ скінченний другий момент. Легко переконатися, що цей розв'язок є лінійним по x_s. Тим самим за допомогою (1) визначено сім'ю лінійних операторів $\{U(t,s),\ t \geq s \geq 0\}$ таких, що $\mathcal{F}_s$-вимірному випадковому вектору x_s при $t \geq s$ ставлять у відповідність $\mathcal{F}_t$-вимірний випадковий вектор $x(t, x_s)$. За аналогією із звичайними диференціальними рівняннями оператор $U(t,s)$ будемо називати матрицантом системи (1). При цьому $U(t) \equiv U(t, 0)$.

Наступне означення експоненціальної дихотомії є більш слабким, ніж означення дихотомії, введене в [7, с. 296].

Означення 1. *Систему* (1) *будемо називати експоненціально дихотомічною в середньому квадратичному на півосі, якщо для довільного* $s \geq 0$ *простір* $L_2(s)$ *розкладається в пряму суму підпросторів* $L_2(s) = L_2^-(s) + L_2^+(s)$, *причому*:

a) *для розв'язків* $y(t, x_1^s) = U(t,s)x_1^s$ *системи* (1), *що виходять у момент* $t = s$ *з підпростору* $L_2^-(s)$ $(x_1^s \in L_2^-(s))$, *справедливою є оцінка*

$$\mathrm{M}|y(t, x_1^s)|^2 \leq K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}|y(\tau, x_1^s)|^2, \quad t \geq \tau \geq s; \tag{2}$$

b) *для розв'язків* $z(t, x_2^s) = U(t,s)x_2^s$ *системи* (1), *що виходять у момент* $t = s$ *з підпростору* $L_2^+(s)$ $(x_2^s \in L_2^+(s))$, *справджується оцінка*

$$\mathrm{M}|z(t, x_2^s)|^2 \geq K_1 \exp\{\gamma_1(t-\tau)\}\mathrm{M}|z(\tau, x_2^s)|^2, \quad t \geq \tau \geq t(x_2^s) \geq s. \tag{3}$$

Тут K, K_1, γ, γ_1 *— деякі додатні не залежні від* τ, x_1^s, x_2^s *сталі.*

***Зауваження* 1.** Якщо в оцінці (3) $t(x_2^s) = s$ для всіх $x_2^s \in L_2^+(s)$, то означення 1 рівносильне означенню експоненціальної дихотомії з [7, с. 296].

У роботі у термінах квадратичних форм вивчаються умови експоненціальної дихотомії.

3. Основні результати. Експоненціальну дихотомію системи (1) будемо вивчати за допомогою знакозмінних форм вигляду $V(t,x) = \langle S(t)x, x\rangle$, де $S(t)$ — симетрична обмежена при $t \geq 0$ матриця. Функцію $V(t,x)$ будемо називати функцією Ляпунова системи (1).

Наведена нижче теорема є узагальненням відомого результату з [2, с. 3] для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 1. *Нехай існує симетрична, неперервно диференційовна і обмежена при* $t \geq 0$ *матриця* $S \equiv S(t)$ *така, що матриця*

$$S^* \equiv \frac{dS}{dt} + A^T S + SA + \sum_{i=1}^{m} B_i^T S B_i$$

є від'ємно означеною при $t \geq 0$. *Тоді система* (1) *експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному на додатній півосі в сенсі означення* 1. *Якщо простір* $L_2^+(s)$ — *скінченновимірний, то система експоненціально дихотомічна в сенсі означення з* [7, *с.* 296].

***Зауваження* 2.** Від'ємна означеність матриці $S^*(t)$ означає існування такої сталої $N > 0$, що квадратична форма $\langle S^*(t)x, x\rangle$ задовольняє для всіх $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ нерівність

$$\langle S^*(t)x, x\rangle \leq -N|x|^2.$$

Доведення. Розглянемо матрицант $U(t,s)$ системи (1) ($U(s,s) = E$ — одинична матриця). Як відомо [7, с. 230], такий матрицант завжди існує при $t \geq s$, має другий момент, його визначник із імовірністю 1 відмінний від нуля і розв'язок системи (1) з початковими даними $x(s, x_s) = x_s$ можна подати у вигляді

$$x(t, x_s) = U(t,s)x_s. \tag{4}$$

Без обмежень загальності доведемо, що простір L_2 розкладається в пряму суму підпросторів, для яких виконуються оцінки (2), (3). Далі, проводячи аналогічні міркування, можна показати, що кожен із просторів $L_2(s)$ розкладається в пряму суму підпросторів із відповідними оцінками.

Розглянемо квадратичний функціонал

$$\langle S_t x, x\rangle \equiv \mathrm{M}\langle S(t)x(t,x), x(t,x)\rangle = \mathrm{M}\langle S(t)U(t)x, U(t)x\rangle =$$
$$= \mathrm{M}\langle U^{-1}(t)S(t)U(t)x, x\rangle. \tag{5}$$

Тут $x(t,x)$ — розв'язок системи (1) з початковою умовою $x(0,x) = x$ ($x \in L_2$). Вираз (5) має зміст, оскільки другі моменти розв'язків системи (1) існують. Виражаючи для довільних $t \geq\ s \geq 0$ різницю

$$\langle S(t)x(t,x), x(t,x)\rangle - \langle S(s)x(s,x), x(s,x)\rangle$$

за формулою Іто, одержуємо

$$\langle S(t)x(t,x), x(t,x)\rangle - \langle S(s)x(s,x), x(s,x)\rangle =$$
$$= \int_s^t LV(\tau, x(\tau,x))d\tau + \sum_{i=1}^{m} \int_s^t \left(B_i(\tau)x, \frac{\partial V(\tau, x(\tau,x))}{\partial x}\right) dW_i(\tau). \tag{6}$$

Тут $V(t, x(t,x)) = \langle S(t)x(t,x), x(t,x)\rangle$, а L — твірний оператор марковського процесу як розв'язку системи (1), який згідно з [8, с. 109] має вигляд

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(A(t)x, \frac{\partial}{\partial x}\right)V + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(B_i(s)x, \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V.$$

Із його вигляду та умов теореми випливає, що LV є від'ємно означеною квадратичною формою.

Зауважимо, що на підставі [8, с. 205] точка $x = 0$ є недосяжною для процесу $x(t, x)$ при $x \neq 0$, а тому, взявши в останній формулі від обох частин математичне сподівання, згідно з умовами теореми одержимо

$$\langle S_t x, x\rangle < \langle S_s x, x\rangle \tag{7}$$

для $t \geq s \geq 0$, $x \neq 0$.

Покажемо тепер, що для точок $x \in L_2$ таких, що $\langle S_t x, x\rangle \geq 0$, при $t \geq 0$ справджується оцінка (2), а для точок $x \in L_2$ таких, що $\langle S_t x, x\rangle \leq 0$, при $t \geq 0$ виконується оцінка (3).

Для одержання оцінки (2) покладемо

$$V_\epsilon(t) \equiv \langle S_t x, x\rangle + \epsilon \mathrm{M}|x(t, x)|^2,$$

вважаючи ϵ досить малою додатною сталою. Враховуючи, що математичне сподівання від інтеграла Іто дорівнює нулю (див. [9]), із (6) отримуємо

$$\mathrm{M}(\langle S(t)x(t, x), x(t, x)\rangle - \langle S(s)x(s, x), x(s, x)\rangle) = \int\limits_s^t \mathrm{M}\{LV(\tau, x(\tau, x))\}d\tau.$$

Диференціюючи останню рівність по t, маємо

$$\frac{d}{dt}\langle S_t x, x\rangle = \mathrm{M}\{LV(\tau, x(\tau, x))\} \leq -N\,\mathrm{M}|x(t, x)|^2.$$

Тут N — деяка додатна стала. Остання нерівність випливає з того, що квадратична форма LV є від'ємно означеною.

Очевидно, що

$$L|x|^2 = 2\langle A(t)x, x\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m,n}(b_{j1}^{(i)}x_1 + \ldots + b_{jn}^{(i)}x_n)^2$$

— квадратична форма з деякою обмеженою матрицею $C(t)$, що виражається через матриці $A(t), B_i(t)$ та транспоновані до них. (Індекс (i) означає належність елемента матриці B_i.) Тому

$$|L|x|^2| = |\langle C(t)x, x\rangle| \leq D|x|^2,$$

де $D = \max\limits_{t\geq 0}||C(t)||$.

Отже,

$$V_\epsilon(t) - V_\epsilon(s) = \int\limits_s^t (LV(\tau, x(\tau, x)) + \epsilon \mathrm{M}L|x(\tau, x)|^2)d\tau.$$

Звідси маємо

$$\frac{dV_\epsilon(t)}{dt} \leq -(N - \epsilon D)\,\mathrm{M}|x(t, x)|^2 = -N_1\,\mathrm{M}|x(t, x)|^2. \tag{8}$$

Оскільки, окрім того,

$$V_\epsilon(t) \leq (C_1 + \epsilon)\mathrm{M}|x(t, x)|^2, \tag{9}$$

де $C_1 = \max_{t \geq 0} ||S(t)||$, а

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \leq \frac{(S_t x, x) + \epsilon \mathrm{M}|x(t,x)|^2}{\epsilon} = \frac{V_\epsilon(t)}{\epsilon}, \tag{10}$$

то із нерівності (8) одержуємо

$$\frac{dV_\epsilon(t)}{dt} \leq -N_1 \, \mathrm{M}|x(t,x)|^2 \leq \frac{-N_1}{C_1 + \epsilon} V_\epsilon(t) = -\gamma V_\epsilon(t).$$

Інтегруючи останню нерівність в межах $[s, t]$, отримуємо

$$V_\epsilon(t) \leq V_\epsilon(s) \exp\{-\gamma(t-s)\}$$

при $t \geq s$, або з урахуванням нерівностей (9), (10)

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \leq \frac{V_\epsilon(t)}{\epsilon} \leq V_\epsilon(s) \exp\{-\gamma(t-s)\} \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{C_1}{\epsilon}\right) \exp\{-\gamma(t-s)\} \mathrm{M}|x(s,x)|^2.$$

Остання нерівність і є нерівністю (2), в якій $K = 1 + \dfrac{C_1}{\epsilon}$.

Нехай тепер $x \in L_2$ таке, що $\langle S_t x, x \rangle \leq 0$ при $t \geq 0$. Покажемо, що для таких x виконується оцінка (3). Для цього розглянемо функцію

$$V_\epsilon^1(t) \equiv (S_t x, x) + \epsilon \mathrm{M}|x(t,x)|^2,$$

вважаючи знову ϵ досить малою додатною сталою.

Оскільки за умовами теореми квадратична форма $-LV(t,x)$ є додатно означеною, то аналогічно попередньому одержуємо

$$\frac{dV_\epsilon^1(t)}{dt} \geq N \, \mathrm{M}|x(t,x)|^2 + \epsilon \mathrm{M}\langle C(t)x, x\rangle \geq$$

$$\geq (N - \epsilon D)\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \geq \frac{N_1}{C_1 + \epsilon} V_\epsilon^1(t) = \gamma V_\epsilon^1(t).$$

Інтегруючи останню нерівність, отримуємо оцінку

$$V_\epsilon^1(t) \geq V_\epsilon^1(s) \exp\{\gamma(t-s)\}$$

при $t \geq s$, з якої з урахуванням нерівностей

$$V_\epsilon^1(t) \geq \epsilon \mathrm{M}|x(t,x)|^2$$

і (9) остаточно маємо

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \geq \frac{V_\epsilon^1(t)}{C_1 + \epsilon} \geq \frac{V_\epsilon^1(s)}{C_1 + \epsilon} \exp\{\gamma(t-s)\} \geq$$

$$\geq \frac{\epsilon \mathrm{M}|x(s,x)|^2}{C_1 + \epsilon} \exp\{\gamma(t-s)\} = \frac{1}{\dfrac{C_1}{\epsilon} + 1} \mathrm{M}|x(s,x)|^2 \exp\{\gamma(t-s)\} =$$

$$= K_1 \exp\{\gamma(t-s)\} \, \mathrm{M}|x(s,x)|^2$$

при $t \geq s \geq 0$. Останнє співвідношення і є оцінкою (3), що фігурує в означенні експоненціальної дихотомії.

Покажемо нарешті, що простір L_2 розкладається в пряму суму підпросторів L_2^- та L_2^+. За L_2^- візьмемо множину всіх початкових значень $x \in L_2$ розв'язків системи (1) таких, що вираз $\mathrm{M}|x(t,x)|^2$ обмежений при $t \geq 0$. Враховуючи розв'язок (4) системи (1), легко переконатися, що дана множина є лінійним підпростором у L_2. Для всіх точок цього підпростору виконується нерівність $\langle S_t x, x\rangle \geq 0$. Справді, в протилежному випадку існувала б точка $t_0 \geq 0$ така, що $\langle S_t x, x\rangle < 0$. Тоді з нерівності (7) випливала б оцінка $\langle S_t x, x\rangle < 0$ для $t \geq t_0$. З неї на підставі доведеного вище випливала б нерівність (3) для $t \geq t_0$, що суперечить обмеженості розв'язків, що починаються в L_2^-.

Отже, для будь-якого $x \in L_2^-$ виконується нерівність $\langle S_t x, x\rangle \geq 0$, $t \geq 0$, а тому з доведеного вище випливає, що для будь-якого $x \in L_2^-$ справжується оцінка (2).

Нехай виконується $L_2^+ = (L_2^-)^\perp$ — ортогональне доповнення до L_2^-. Для всіх $x \in L_2^+$ виконується нерівність $\langle S_t x, x\rangle \leq 0$ при $t \geq t(x)$. Справді, в протилежному випадку для деякого ненульового $x \in L_2^+$ вираз $\langle S_t x, x\rangle$ був би додатним для всіх $t \geq 0$. Ця умова веде до виконання для розв'язку $x(t,x)$ $(x(0,x) = x \in L_2^+)$ оцінки (2), звідки випливає обмеженість $\mathrm{M}|x(t,x)|^2$. Останнє означає, що $x \in L_2^-$. Але підпростори перетинаються тільки по нульовому вектору. Отримана суперечність і доводить, що для кожного $x \in L_2^+$ існує скінченний момент часу $t(x)$ такий, що при $t \geq t(x)$ $\langle S_t x, x\rangle < 0$. Тому, проводячи викладки, аналогічні наведеним вище, можна показати, що при $t \geq s \geq t(x)$ для $x \in L_2^+$ справджується оцінка типу (3).

Припустимо, що простір L_2^+ є скінченновимірним. Покажемо виконання оцінки (3) і для $0 \leq s \leq t \leq t(x)$.

Для цього спочатку доведемо, що момент часу $t(x)$ можна вибрати єдиним для всіх $x \in L_2^+$.

Припустимо, що це не так. Тоді можна вказати послідовність чисел $t_n \to \infty$ і послідовність $x_n \in L_2^+$ такі, що $\langle S_{t_n} x_n, x_n\rangle > 0$. Розглянемо послідовність $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{\mathrm{M}|x_n|^2}}$. Очевидно, що $\langle S_{t_n} y_n, y_n\rangle > 0$, а $\mathrm{M}|y_n|^2 = 1$.

З того, що L_2^+ — підпростір, випливає, що $y_n \in L_2^+$ для довільного натурального n. Тоді згідно з викладеним вище для кожного y_n існує скінченний момент часу $t(y_n)$ такий, що $\langle S_{t(y_n)} y_n, y_n\rangle = 0$. Враховуючи припущення про скінченновимірність підпростору L_2^+, з y_n можна виділити збіжну підпослідовність. Без втрати загальності будемо вважати, що сама y_n є збіжною. Позначимо $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Із замкненості підпростору L_2^+ випливає, що $y_0 \in L_2^+$. За викладеним вище для y_0 існує скінченний момент часу $T > 0$ такий, що $\langle S_t y_0, y_0\rangle \leq 0$ при $t \geq T$. Тому розв'язок системи допускає оцінку

$$\mathrm{M}|x(t,y_0)|^2 \geq K_1 \exp\{\gamma(t-T)\}\mathrm{M}|x(T,y_0)|^2.$$

Виберемо t_1 з умови, що

$$K_1 \exp\{\gamma(t_1 - T)\} = 2.$$

Із неперервної залежності в середньому квадратичному від початкових даних і того, що $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, для довільного $\epsilon > 0$ на відрізку $[0, t_1]$ можна вказати номер p такий, що при $n \geq p$ виконується нерівність

$$\sup_{t\in[0,t_1]} \mathrm{M}|x(t,y_0) - x(t,y_n)|^2 < \epsilon. \tag{11}$$

Будемо вважати p таким великим, що $t_n > t_1$ при $n \geq p$. Останнє означає, що $\langle S_{t_1} y_n, y_n \rangle > 0$ при $n \geq p$. Тому при $T \leq t \leq t_1$ для розв'язку $x(t, y_n)$ виконується оцінка

$$\mathrm{M}|x(t, y_n)|^2 \leq K \exp\{-\gamma(t-T)\} \mathrm{M}|x(T, y_n)|^2.$$

Зазначимо, що $K_1 = \dfrac{1}{K}$.

Увівши норму

$$\|x(t, y_0)\|_2 = \sqrt{\mathrm{M}|x(t, y_0)|^2},$$

із (11) отримаємо

$$\|x(t_1, y_0) - x(t_1, y_n)\|_2 < \epsilon^{1/2}. \tag{12}$$

Але

$$\|x(t_1, y_0) - x(t_1, y_n)\|_2 \geq \|x(t_1, y_0)\|_2 - \|x(t_1, y_n)\|_2 \ \geq$$
$$\geq \ K_1^{1/2} \exp\left\{\frac{\gamma}{2}(t_1 - T)\right\} \|x(T, y_n)\|_2 -$$
$$-K^{1/2} \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}(t_1 - T)\right\} \|x(T, y_n)\|_2 \geq$$
$$\geq 2^{\frac{1}{2}} \|x(T, y_0)\|_2 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \|x(T, y_n)\|_2 \geq$$
$$\geq 2^{\frac{1}{2}} \|x(T, y_0)\|_2 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \|x(T, y_0)\|_2 - \frac{\epsilon^{1/2}}{2^{1/2}}.$$

Остання нерівність суперечить (12). Це доводить існування скінченного моменту $T_0 > 0$ такого, що при $t \geq T_0$ виконується нерівність

$$\langle S_t x, x \rangle \leq 0$$

для $x \in L_2^+$, з якої випливає виконання нерівності (3) при $s \geq T_0$.

Доведемо її виконання для всіх $s \geq 0$.

Нехай

$$d\widetilde{x} = \widetilde{A}(t) \widetilde{x} dt \tag{13}$$

— система других моментів, що відповідає системі (1) з початковою умовою $\widetilde{x}(0, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, де $|\tilde{x}_0| = \mathrm{M}|x_0|^2$. Тоді серед розв'язків системи (13) будуть знаходитись другі моменти розв'язків системи (1).

Нехай $\widetilde{U}(t)$ — матриця Коші системи (13) з початковою умовою $\widetilde{U}(0) = E$ (E — одинична матриця).

Оскільки вектор-стовпчики матриці $\widetilde{U}(t)$ — лінійно незалежні розв'язки системи (13), то існує неперервний оператор $\widetilde{U}^{-1}(t)$. Тоді

$$1 = \|\widetilde{U}(t) \widetilde{U}(t)^{-1}\| \leq \|\widetilde{U}(t)\| \|\widetilde{U}(t)^{-1}\|.$$

Звідси випливає

$$\frac{1}{\|\widetilde{U}(t)^{-1}\|} \leq \|\widetilde{U}(t)\| < \infty$$

для $t \in [0, T_0]$. А тому маємо

$$\frac{1}{\|\widetilde{U}(t)^{-1}\|} \geq A$$

при $t \in [0, T_0]$ ($A \geq 0$ — деяка стала). Далі, аналогічно [7, с. 242] легко отримати $|\widetilde{x}(t, \widetilde{x}_0)| \leq n\,\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2$. Тоді

$$|\widetilde{x}(t, \widetilde{x}_0)| = |\widetilde{U}(t)\widetilde{x}_0| = \frac{\|\widetilde{U}^{-1}(t)\| |\widetilde{U}(t)\widetilde{x}_0|}{\|\widetilde{U}^{-1}(t)\|} \geq \frac{|\widetilde{x}_0|}{\|\widetilde{U}^{-1}(t)\|}.$$

Отже,

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq A\,\mathrm{M}|x_0|^2.$$

Тому

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq A\,\mathrm{M}|x_0|^2 \frac{\exp\{\gamma t\}}{\exp\{\gamma t\}} \geq A\,\mathrm{M}|x_0|^2 \frac{\exp\{\gamma t\}}{\exp\{\gamma T_0\}} = B\,\mathrm{M}|x_0|^2 \exp\{\gamma t\} \quad (14)$$

при $t \in [0, T_0]$.

Із лінійності системи (1), використовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана, при $s \geq 0$ можна отримати оцінку

$$\mathrm{M}|x(s, x_0)|^2 \leq A_1 \exp\{\alpha s\} \mathrm{M}|x_0|^2$$

($\alpha > 0$, $A_1 > 0$ — константи, не залежні від s, x_0), з якої на підставі нерівності (14) легко одержуємо нерівність типу (3), дійсну при $s \leq T_0$. Враховуючи її виконання при $s \geq T_0$, можна гарантувати існування константи $K_2 > 0$, не залежної від s, x_0 і такої, що при $t \geq s \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq K_2 \exp\{\gamma_1(t - s)\} \mathrm{M}|x(s, x_0)|^2.$$

Далі, проводячи аналогічні міркування, можна довести, що для довільного $s \geq 0$ простір $L_2(s)$ розкладається в пряму суму підпросторів $L_2^-(s)$ та $L_2^+(s) = (L_2^-(s))^\perp$ таких, що для розв'язків, які в них починаються, виконуються відповідно оцінки (2) та (3).

Теорему 1 доведено.

Для випадку системи звичайних диференціальних рівнянь дихотомія системи гарантує існування квадратичної форми, похідна в силу системи від якої є від'ємно означеною. Даний результат вдалось перенести на випадок системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто у випадку, коли матриці A та B_i, $i = 1, \ldots, m$, — сталі.

Розглянемо систему лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx = Axdt + \sum_{i=1}^{m} B_i x dW_i(t), \quad (15)$$

де A та B_i, $i = 1, \ldots, m$, — сталі невипадкові матриці.

Теорема 2. *Нехай система* (15) *експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному на додатній півосі в сенсі означення* 1. *Тоді існує неперервно диференційовна по t квадратична форма $V(t, x)$ щодо x така, що $LV(t, x)$ є від'ємно означеною при $t \geq 0$ квадратичною формою.*

***Зауваження* 3.** L — твірний оператор марковського процесу, що описується системою (15).

Доведення. Нехай система (15) експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному на додатній півосі. Тоді в кожен момент часу $t \geq 0$ простір $L_2(t)$ розкладається в пряму суму підпросторів $L_2^-(t)$ та $L_2^+(t)$ і існують проектори $P_-(t)$ та $P_+(t)$ відповідно на підпростори $L_2^-(t)$ та $L_2^+(t)$, причому розв'язки, які починаються в підпросторі $L_2^-(t)$, експоненціально спадають до нуля, а ті, що починаються в $L_2^+(t)$, експоненціально зростають до нескінченності, починаючи з деякого моменту. Оскільки R^n є підпростором у $L_2(t)$, з викладеного вище випливає, що простір R^n у кожен момент часу також розкладається в пряму суму підпросторів $R_-(t)$ та $R_+(t)$.

Для доведення теореми зазначимо, що система (15) описує однорідний марковський процес, а тому з теореми 11 з [10, с. 226] випливає, що підпростір $R_-(0)$ — інваріантний, тобто для довільного $t \geq 0$ $R_-(t) = R_-(0)$. Тоді для довільного $t \geq 0$ $R_+(t) = R_+(0)$. Позначимо $R_- \equiv R_-(0)$ і $R_+ \equiv R_+(0)$.

Нехай P_- та P_+ — проектори відповідно на підпростори R_- та R_+. Квадратичну форму $V(t,x)$ будемо шукати у вигляді

$$V(t,x) = \int\limits_t^\infty \mathrm{M}|U(s,t)P_-x|^2 ds - \int\limits_0^t \mathrm{M}|(P_+x)^T \tilde{U}(t,s)|^2 ds, \tag{16}$$

де $x \in \mathbf{R}^n$ — невипадковий вектор, $U(s,t)$, $s \geq t$, — матрицант системи (15), $\tilde{U}(t,s)$, $s \leq t$, — матрицант упереджeного рівняння (див. [7, с. 236]), побудованого за рівнянням (15).

Позначимо $y \equiv P_-x$, $z \equiv P_+x$. З нерівності

$$\mathrm{M}|U(s,t)P_-x|^2 = \mathrm{M}|x(s,y)|^2 \leq K \exp\{-\gamma(s-t)\}\mathrm{M}|y|^2$$

для $s \geq t$ випливає, що перший інтеграл у (16) існує і є скінченним.

Покажемо, що дана квадратична форма неперервно диференційовна по t. Для цього досить довести, що підінтегральні функції будуть неперервні по s та диференційовні по t.

Розглянемо перший інтеграл у співвідношенні (16). Для доведення неперервності розглянемо вираз

$$\mathrm{M}|U(s,t)P_-(t)x - U(s_0,t)P_-(t)x|^2 =$$

$$= \mathrm{M}\left| \int\limits_t^s \left(A(\tau)x(\tau,x)d\tau + \sum_{i=1}^m B_i(\tau)x(\tau,x)dW_i(\tau) \right) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_t^{s_0} \left(A(\tau)x(\tau,x)d\tau + \sum_{i=1}^m B_i(\tau)x(\tau,x)dW_i(\tau) \right) \right|^2 =$$

$$= \mathrm{M}\left| \int\limits_{s_0}^s \left(A(\tau)x(\tau,x)d\tau + \sum_{i=1}^m B_i(\tau)x(\tau,x)dW_i(\tau) \right) \right|^2 \leq$$

$$\leq 2\mathrm{M}\left| \int\limits_{s_0}^s A(\tau)x(\tau,x)d\tau \right|^2 + 2\mathrm{M}\left| \int\limits_{s_0}^s \sum_{i=1}^m B_i(\tau)x(\tau,x)dW_i(\tau) \right|^2 \leq$$

$$\leq \left((s-s_0) \max_{\tau\in[s_0,s]} \|A(\tau)\| + 2\sum_{i=1}^{m} \max_{\tau\in[s_0,s]} ||B_i(\tau)|| \right) \int\limits_{s_0}^{s} \mathrm{M}|x(\tau,x)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq |x|^2 L(s-s_0+1) \int\limits_{s_0}^{s} \mathrm{M}|x(\tau,x)|^2 d\tau.$$

Оскільки підінтегральний вираз є неперервним по τ, то останній вираз прямує до нуля, як тільки $s \to s_0$. Диференційовність по t випливає з леми 6.2 з [8, с. 230].

Неперервність по s та диференційовність по t для другого інтеграла в (16) отримуємо аналогічним чином, використовуючи вигляд упередженого диференціального рівняння.

Оскільки функція $V(t,x)$ як квадратична форма має похідні V_t, V_x, V_{xx}, то з [8, с. 109] випливає, що існує $LV(t,x)$, яка є деякою квадратичною формою, причому $LV(t,x) = \dfrac{d}{dt}\mathrm{M}V(t,x(t))$.

Для знаходження LV розглянемо функцію

$$V_T(t,x) = \int\limits_{t}^{t+T} \mathrm{M}|x(s,y)|^2 ds - \int\limits_{0}^{t} \mathrm{M}|\tilde{x}(s,z)|^2 ds,$$

де $x(s,y)$ — розв'язок рівняння (15), причому $x(t,y) = y$, а $\tilde{x}(s,z)$ — розв'язок відповідного до (15) упередженого рівняння, такого, що $\tilde{x}(t,z) = z$.

Очевидно, що для всіх t, x $V_T(t,x) \to V(t,x)$, $T \to \infty$.

Диференціюючи V_T по t в силу системи (1), отримуємо

$$LV_T(t,x) = \frac{d}{dt}\mathrm{M}V_T(t,x(t)) = \mathrm{M}|x(t+T,y)|^2 - \mathrm{M}|x(t,y)|^2 +$$

$$+ \int\limits_{t}^{t+T} L_t \mathrm{M}|x(s,y)|^2 ds - \mathrm{M}|\tilde{x}(t,z)|^2 - \int\limits_{0}^{t} \tilde{L}_t \mathrm{M}|\tilde{x}(s,z)|^2 ds,$$

де L_t — твірний оператор марковського процесу для диференціального рівняння (15), $\tilde{L}_t$ — твірний оператор марковського процесу для диференціального рівняння упередженого типу.

Далі,

$$L_t \mathrm{M}|x(s,y)|^2 = \frac{d}{dt}\mathrm{M}|x(s,y,t)|^2 =$$

$$= \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\Big\{\mathrm{M}|x(s,x(t+\Delta t,y,t),t+\Delta t)|^2 - \mathrm{M}|x(s,y,t)|^2\Big\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\Big\{\mathrm{M}|U(s,t+\Delta t)U(t+\Delta t,t)y|^2 - \mathrm{M}|U(s,t)y|^2\Big\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\Big\{\mathrm{M}|U(s,t)y|^2 - \mathrm{M}|U(s,t)y|^2\Big\} = 0.$$

Тут $x(s,y,t)$ — розв'язок, що в момент часу t виходить із точки y.

Проводячи аналогічні міркування для упередженого диференціального рівняння, можемо показати, що $\tilde{L}_t \mathrm{M}|\tilde{x}(s,z)|^2 = 0$.

Таким чином, маємо

$$LV_T(t,x) = \mathrm{M}\big|x(t+T,y)\big|^2 - \mathrm{M}\big(|y|^2 + |z|^2\big).$$

Із нерівності $\mathrm{M}|x(t+T,y)|^2 \leq K\exp(-\gamma T)\mathrm{M}|y|^2$ випливає, що вираз $\mathrm{M}|x(t + T,y)|^2$ рівномірно прямує до нуля, якщо $T \to \infty$. Отже, $\dfrac{d}{dt}\mathrm{M}V_T(t,x(t))$ рівномірно збігається при $T \to \infty$, і тоді можна зробити граничний перехід

$$\lim_{T\to\infty}\frac{d}{dt}\mathrm{M}V_T(t,x(t)) = \frac{d}{dt}\lim_{T\to\infty}\mathrm{M}V_T(t,x(t)) = LV(t,x) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\mathrm{M}\big|x(t+T,y)\big|^2 - \mathrm{M}\big(|y|^2+|z|^2\big) = -|x|^2.$$

А це й доводить, що квадратична форма $LV(t,x)$ є від’ємно означеною.

Теорему 2 доведено.

1. *Станжицький О. М., Креневич А. П.* Експоненціальна дихотомія лінійних стохастичних систем Іто // Вісн. Київ ун-ту. Сер. мат., мех. – 2003. – Вип. 9-10. – С. 132 – 138.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
3. *Станжицький О. М.* Дослідження експоненціальної дихотомії стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1545 – 1555.
4. *Massera J. L., Schaffer J. J.* Linear differential equations and functional analisis, III. Lyapunov second method in case of conditional stability // Ann. math. – 1959. – **69**, № 3. – P. 535 – 574.
5. *Царьков Е. Ф., Энгельсон Л. Я.* Функционал Ляпунова для периодических линейных диференциально-функциональных уравнений // Топологические пространства и их отображения. – Рига: Латв. ун-т, 1881. – С. 117 – 136.
6. *Царьков Е. Ф., Янсон В. А.* О построении функции Ляпунова для линейных стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН УССР. – 1982. – № 3. – С. 19 – 21.
7. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
8. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем диференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
10. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.

Одержано 27.07.2004,
після доопрацювання — 11.07.2005