УДК 517.925.51, 517.911.5

**А. Л. Зуев** (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк;
Техн. ун-т Ильменау, Германия)

# ЧАСТИЧНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

We consider the problem of partial asymptotic stability with respect to a continuous functional for a class of abstract dynamical processes with multivalued solutions on a metric space. This class of processes includes finite- and infinite-dimensional dynamical systems, differential inclusions, and delay equations. We prove a generalization of the Barbashin – Krasovskii theorem and the LaSalle inbvariance principle under the condition of the existence of a continuous Lyapunov functional. In the case of the existence of a differentiable Lyapunov functional, we obtain sufficient conditions for the partial stability of continuous semigroups in a Banach space.

Розглядається задача про часткову асимптотичну стійкість по відношенню до неперервного функціонала для класу абстрактних динамічних процесів із багатозначними розв'язками на метричному просторі. Вказаний клас процесів містить скінченно- та нескінченновимірні динамічні системи, диференціальні включення, рівняння із загаюванням. Доведено узагальнення теореми Барбашина – Красовського та принципу інваріантності ЛаСалля в умовах існування неперервного функціонала Ляпунова. У випадку існування диференційовного функціонала Ляпунова отримано достатні умови часткової стійкості неперервних напівгруп у банаховому просторі.

**Введение.** Задача стабилизации нелинейных бесконечномерных динамических систем занимает важное место в современной теории управления [1, 2]. Такие динамические системы возникают, в частности, при математическом моделировании процессов с запаздываниями, движения роботов-манипуляторов с гибкими звеньями, спутников с упругими антеннами и панелями солнечных батарей. Необходимость решения проблем стабилизации и отслеживания программных траекторий этих систем стимулирует развитие методов теории устойчивости в бесконечномерных пространствах. Известно, что для ряда важных классов механических систем асимптотическая стабилизация невозможна, и естественно возникает постановка задачи об устойчивости *по части переменных* [3], которая изучена в основном для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих свойство единственности решений задачи Коши. С другой стороны, использование негладких и даже разрывных законов управления расширяет класс стабилизируемых систем, одновременно приводя к потере единственности решений (см. [4]). В связи с этим возникает необходимость исследования асимптотических свойств пучков траекторий в абстрактной постановке.

Целью данной статьи является развитие метода функционалов типа Ляпунова для описания частичной асимптотической устойчивости абстрактных динамических процессов.

**1. Частичная асимптотическая устойчивость многозначных динамических процессов.** Пусть $X$ — метрическое пространство, снабженное расстоянием $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Обозначим через $\kappa$ множество всех функций $x : \mathbb{R}^+ \to X$, а через $2^\kappa$ множество всех подмножеств $\kappa$.

**Определение 1.** *Отображение* $\pi : X \to 2^\kappa$ *называется многозначной* $D$-*системой на* $X$, *если*:

* Частично поддержана Международным центром теоретической физики им. Абдуса Салама (Триест, Италия) и фондом Александра фон Гумбольта (Германия).

© А. Л. ЗУЕВ, 2006

*$A_1)$ $\pi(x_0) \neq \varnothing$ для всех $x_0 \in X$;*

*$A_2)$ любой элемент $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ характеризуется свойством $x(0) = x_0$;*

*$A_3)$ для любых $x_0 \in X$, $s \in \mathbb{R}^+$, $x(\cdot) \in \pi(x_0)$, $z(\cdot) \in \pi(x(s))$ выполнены условия $u(\cdot) \in \pi(x(s))$ и $v(\cdot) \in \pi(x_0)$, где $u(t) = x(t+s)$,*

$$v(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq s, \\ z(t-s), & t > s; \end{cases}$$

*$A_4)$ для любых $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует такое $\delta(x_0, \varepsilon, T) > 0$, что из $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \delta$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ следует*

$$\inf_{x(\cdot)\in\pi(x_0)} \left( \sup_{t\in[0,T]} \rho(\tilde{x}(t), x(t)) \right) < \varepsilon;$$

*$A_5)$ для каждых $x_0 \in X$, $T > 0$ и последовательности $\{x_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty} \subset \pi(x_0)$ найдется $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ такое, что*

$$\liminf_{n\to\infty} \left( \sup_{t\in[0,T]} \rho(x_n(t), x(t)) \right) = 0.$$

*Элементы $x(t)$ множества $\pi(x_0)$ будем называть решениями задачи Коши для $\pi$ с начальным условием $x(0) = x_0$.*

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введенное выше отображение $\pi(x_0)$ будет состоять из всех решений задачи Коши, определенных на $\mathbb{R}^+$. Предположения $\mathrm{A}_1$ и $\mathrm{A}_2$ постулируют существование решений, предположение $\mathrm{A}_3$ означает, что положительный сдвиг траектории является траекторией (групповое свойство). Условия $\mathrm{A}_4$ и $\mathrm{A}_5$ обеспечивают регулярность решений без предположения об их единственности.

**Определение 2.** *Пусть $x(\cdot) \in \pi(x_0)$. Элемент $q \in X$ называется $\omega$-предельной точкой для $x$, если найдется такая последовательность $t_n \to +\infty$, что $x(t_n) \to q$ при $n \to \infty$. Множество всех таких предельных точек будем обозначать через $\Omega(x)$ и называть $\omega$-предельным множеством для $x$.*

**Определение 3.** *Множество $F \subset X$ называется полуинвариантным для $\pi$, если для каждого $x_0 \in F$ имеется по крайней мере одно решение $x(\cdot) \in \pi(x_0)$, характеризующееся свойством $x(t) \in F$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$.*

**Определение 4.** *Будем говорить, что $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ является предкомпактным, если $\bigcup_{t\geq 0}\{x(t)\}$ содержится в некотором (секвенциально) компактном подмножестве $X$.*

Важным свойством в качественной теории дифференциальных уравнений является инвариантность предельных множеств. Следующая лемма распространяет этот результат на класс многозначных $D$-систем на метрическом пространстве.

**Лемма 1.** *Пусть $\pi$ — многозначная $D$-система и $x(\cdot) \in \pi(x_0)$. Если $x$ предкомпактно, то предельное множество $\Omega(x)$ непусто и полуинвариантно.*

***Доказательство.*** Из предкомпактности $x$ следует, что для любой последовательности $t_n \to +\infty$ соответствующая последовательность $\{x(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку, значит, $\Omega(x) \neq \varnothing$.

Покажем, что для любых $T > 0$ и $x_0^* \in \Omega(x)$ существует функция $\xi(\cdot) \in \pi(x_0^*)$, удовлетворяющая условию $\xi(t) \in \Omega(x)$ при всех $t \in [0, T]$. Поскольку $x_0^* \in \Omega(x)$, найдется такая последовательность $t_n \to +\infty$, что $x(t_n) \to x_0^*$ при $n \to \infty$. Построим последовательность $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty} \subset \kappa$: $\phi_n(t) = x(t_n + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда $\phi_n(\cdot) \in \pi(x(t_n))$ в силу предположения $\mathrm{A}_3$. Пусть $\{\phi_{n(k)}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию $\rho(\phi_{n(k)}(0), x_0^*) < \delta_k$, где числа $\delta_k = \delta(x_0^*, 1/k, T) > 0$ выбраны так же, как в условии $\mathrm{A}_4$. Согласно условию $\mathrm{A}_4$, существует последовательность $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \subset \pi(x_0^*)$ такая, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \rho(\phi_{n(k)}(t), \psi_k(t)) < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Тогда из условия $\mathrm{A}_5$ следует существование такого $\xi(\cdot) \in \pi(x_0^*)$ и последовательности $\{\psi_{k(m)}(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{m\to\infty} \left( \sup_{t\in[0,T]} \rho(\psi_{k(m)}, \xi(t)) \right) = 0.$$

Отсюда с использованием (1) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \left( \sup_{t\in[0,T]} \rho(\phi_{n(k(m))}, \xi(t)) \right) = 0.$$

Поскольку каждое решение $\phi_n(\cdot)$ является сдвигом $x(\cdot)$, каждое значение $\xi(t)$, $0 \le t \le T$, принадлежит $\Omega(x)$.

Для завершения доказательства применим описанное выше построение для каждой из точек $x_i^* = \xi_{i-1}(T)$, где $\xi_0(\cdot) = \xi(\cdot)$. В результате получим систему функций $\xi_i(\cdot) \in \pi(\xi_{i-1}(T))$, имеющую свойство $\xi_i(t) \in \Omega(x)$ при всех $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \ldots$ .

Тогда из условия $\mathrm{A}_3$ следует, что функции $x^*(t) = \xi_{[t/T]}(\{t/T\}T)$ лежат во множестве $\pi(x_0^*)$, где $[t/T]$ и $\{t/T\}$ обозначают соответственно целую и дробную части $t/T$. Кроме того, $x^*(t) \in \Omega(x)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$.

Лемма доказана.

Предельное множество решений динамической системы можно охарактеризовать в терминах функции Ляпунова с помощью принципа инвариантности ЛаСалля, который справедлив для широкого класса абстрактных систем на пространствах Фреше [5, 6]. Докажем аналогичное утверждение для многозначных $D$-систем в смысле определения 1.

**Лемма 2.** *Пусть $\pi$ — многозначная $D$-система, $x(\cdot) \in \pi(x_0)$. Предположим, что имеется непрерывный функционал $V : X \to \mathbb{R}$, характеризующийся свойством*

$$\xi_0 \in X, \quad \xi(\cdot) \in \pi(\xi_0) \;\Rightarrow\; V(\xi(t)) \quad \textit{не возрастает по} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

*Тогда если $x(\cdot)$ предкомпактно, то*

$$\Omega(x) \subset \{p \in X \,|\, V(\xi(t)) = c, \;\; \xi(\cdot) \in \pi(p),\, t \in \mathbb{R}^+\} \tag{2}$$

*при некоторой константе $c$.*

***Доказательство.*** Из предкомпактности $\bigcup_{t\geq 0}\{x(t)\}$ и непрерывности $V$ следует, что $\Omega(x)\neq\varnothing$ и $V(x(t))$ ограничена на $\mathbb{R}^+$. Поскольку $V(x(t))$ не возрастает, существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(x(t)) = c \neq -\infty.$$

Согласно непрерывности $V$ получаем $V(x^*)=c$ для всех $x^*\in\Omega(x)$. Это означает, что $\Omega(x)$ — подмножество $\{p\in X\,\big|\, V(p)=c\}$. Отсюда в силу полуинвариантности $\Omega(x)$ (лемма 1) заключаем, что для любого $p\in\Omega(x)$ существует $\xi(\cdot)\in\pi(p)$, имеющее свойство $\xi(t)\in\Omega(x)$. Отсюда следует, что $V(\xi(t))=c$ при всех $t\in\mathbb{R}^+$.

Лемма доказана.

Применим доказанный выше принцип инвариантности для анализа частичной асимптотической устойчивости абстрактных систем. Будем называть элемент $x_0\in\in X$ *особой точкой* системы $\pi$, если функция $x(t)\equiv x_0$ принадлежит $\pi(x_0)$.

**Определение 5.** *Пусть $\pi$ — многозначная $D$-система на $X$ и $y: X\to\mathbb{R}^+$. Особая точка $x_0$ системы $\pi$ называется асимптотически устойчивой по отношению к $y$, если*:

i) *для прозвольного заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $\rho(\tilde x_0,x_0)<\delta$ следует $y(\tilde x(t))<\varepsilon$ при всех $\tilde x(\cdot)\in\pi(\tilde x_0)$, $t\in\mathbb{R}^+$*;

ii) *существует такое $\Delta>0$, что из $\rho(\tilde x_0,x_0)<\Delta$ вытекает*

$$\lim_{t\to\infty} y(\tilde x(t)) = 0. \tag{3}$$

Для формулировки условий частичной устойчивости введем класс функций Хана $\mathcal{K}$, состоящий из всех непрерывных строго возрастающих функций $\alpha:\mathbb{R}^+\to\to\mathbb{R}^+$, имеющих свойство $\alpha(0)=0$.

**Теорема 1.** *Пусть $\pi$ — многозначная $D$-система на метрическом пространстве $X$ и $x_0$ — ее особая точка. Предположим, что имеются непрерывные функционалы $y$, $V: X\to\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие следующим условиям*:

$C_1$) *существуют функции $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{K}$, имеющие свойство*

$$\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\rho(x_0,x)) \quad \forall x\in X; \tag{4}$$

$C_2$) *для любых $\tilde x_0\in X$, $\tilde x(\cdot)\in\pi(\tilde x_0)$ функция $V(\tilde x(t))$ не возрастает на $\mathbb{R}^+$*;

$C_3$) *найдется такое $\Delta>0$, что из неравенства $\rho(\tilde x_0,x_0)<\Delta$, $\tilde x(\cdot)\in\pi(\tilde x_0)$, следует предкомпактность $\tilde x(\cdot)$*;

$C_4$) *множество*

$$M_1 = \{p\in X\,\big|\; V(\tilde x(t))\equiv \mathrm{const}, \quad \tilde x(\cdot)\in\pi(p)\} \tag{5}$$

*содержится в*

$$\operatorname{Ker} y = \{p\in X|\; y(p)=0\}.$$

*Тогда особая точка $x_0$ асимптотически устойчива по отношению к $y$.*

***Доказательство.*** Докажем сначала свойство i) из определения 5, распространяя теорему В. В. Румянцева [3] (теорема 5.1). Затем воспользуемся леммой 2 для доказательства свойства ii).

Из условия $\mathrm{C}_2$ следует, что $V(\tilde x(t))\leq V(\tilde x_0)$ для всех $\tilde x_0\in X$, $\tilde x(\cdot)\in\pi(\tilde x_0)$, $t\in\mathbb{R}^+$. Отсюда с учетом (4) получаем

$$y(\tilde{x}(t)) \leq {\alpha_1}^{-1} \left(\alpha_2(\rho(\tilde{x}_0, x_0))\right), \tag{6}$$

где функция ${\alpha_1}^{-1}(\tau)$ определена и строго возрастает при достаточно малых $\tau > 0$, поскольку $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$. Следовательно, функция

$$\gamma(\delta) = {\alpha_1}^{-1} \left(\alpha_2(\delta)\right)$$

непрерывна, неотрицательна и строго возрастает на некотором полуинтервале $[0, \delta^*)$, $0 < \delta^* \leq +\infty$. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \delta^*)$, что $\gamma(\delta) \leq \varepsilon$. Отсюда заключаем, что при $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \varepsilon$ из условия (6) следует

$$y(\tilde{x}(t)) \leq \gamma(\rho(\tilde{x}_0, x_0))$$

при всех $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Для завершения доказательства достаточно показать существование предела (3). Пусть число $\Delta$ выбрано, как в условии $\mathrm{C}_3$, и $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$. Тогда в силу леммы 2 при любом $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{x}_0$ множество $\Omega(\tilde{x}) \neq \varnothing$ содержится в (5). Из условия $\mathrm{C}_4$ следует

$$\Omega(\tilde{x}) \subset \operatorname{Ker} y. \tag{7}$$

Для доказательства (3) предположим противное: пусть при некоторых $\varepsilon > 0$, $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$, имеет место неравенство

$$y(\tilde{x}(t_n)) > \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Поскольку $\tilde{x}(\cdot)$ предкомпактно, найдется подпоследовательность $\{t_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, имеющая свойство $\tilde{x}(t_{n(k)}) \to x^* \in \Omega(\tilde{x})$ при $k \to \infty$. Тогда в силу (7) $y(x^*) = 0$ . Из непрерывности $y$ следует

$$|y(\tilde{x}(t_{n(k)})) - y(x^*)| = y(\tilde{x}(t_{n(k)})) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Полученное соотношение противоречит (8). Таким образом, если $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$, то

$$\lim_{t \to +\infty} y(\tilde{x}(t)) = 0$$

при всех $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений теорема 1 устанавливает достаточные условия асимптотической устойчивости по части переменных в смысле А. М. Ляпунова и В. В. Румянцева. Действительно, пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция и $f(0) = 0$. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k)$, где $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$, $m + k = n$. Решение $x_0(t) \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = f(x) \tag{9}$$

асимптотически устойчиво по переменным $(y_1, \ldots, y_m)$ [3], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое решение $x(t)$ системы (9) с начальными условиями $\|x(0)\| < \delta$ определено на $\mathbb{R}^+$, $\|y(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$ и $\|y(t)\| \to 0$ при

$t \to +\infty$. Здесь $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. Если выполнено предположение о продолжимости решений, то отображение $x_0 \mapsto \pi(x_0)$ является многозначной $D$-системой на $\mathbb{R}^n$, где $\pi(x_0)$ содержит все решения задачи Коши для (9) с $x(0) = x_0$, $t \in \mathbb{R}^+$. В самом деле, предположения $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_3$ очевидным образом выполнены для автономной системы (9). Свойства $\mathrm{A}_4$ и $\mathrm{A}_5$ следуют из теоремы 2.4 [7, с. 15] для непрерывной функции $f$. Следовательно, асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (9) по переменным $(y_1, \ldots, y_m)$ эквивалентна устойчивости в смысле определения 5 по отношению к функционалу

$$\bar{y}(x) = \sqrt{{y_1}^2 + \ldots + {y_m}^2}.$$

Если имеется дифференцируемая функция Ляпунова $V$ и система (9) характеризуется свойством единственности решений, то теорема 1 сводится к теореме Ризито – Румянцева [3] (теоремы 19.1, 19.2). В этом случае предположение о предкомпактности $\mathrm{C}_3$ следует из устойчивости по переменным $(y_1, \ldots, y_m)$ и ограниченности по $(z_1, \ldots, z_k)$, что может быть охарактеризовано с помощью теоремы 39.1 в [3]. При $m = n$ утверждение теоремы 1 эквивалентно теореме Барбашина – Красовского [8].

**2. Устойчивость нелинейных полугрупп.** В предыдущем пункте доказан общий результат о частичной асимптотической устойчивости без предположений об единственности решений задачи Коши и дифференцируемости функционала Ляпунова. С точки зрения возможных приложений этого результата особого внимания заслуживает случай динамических систем, описываемых абстрактными дифференциальными уравнениями.

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть $E$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $X$ — замкнутое подмножество $E$, содержащее некоторый шар $B_R = \big\{x \in E \,\big|\, \|x\| \leq R\big\}$ радиуса $R > 0$. Тогда $X$ — метрическое пространство относительно расстояния $\rho(a,b) = \|a - b\|$. Пусть $F$ — замкнутый плотно-определенный (нелинейный) оператор из $D(F) \subset X$ в $E$. Для начальных условий $x_0 \in X$ рассмотрим абстрактную задачу Коши [1] (гл. 5.2), [9] (гл. 4):

$$\frac{dx(t)}{dt} = Fx(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad x(0) = x_0. \tag{10}$$

Будем предполагать, что оператор $F$ генерирует *непрерывную полугруппу нелинейных операторов* на $X$.

**Определение 6** [10] (гл. 1), [11] (гл. 2.8)**.** *Непрерывной полугруппой нелинейных операторов на $X$ называется однопараметрическое семейство отображений $\{S(t) \,|\, t \in \mathbb{R}^+\}$ из $X$ в $X$, имеющее свойства*:

i) $S(0)x = x$ *для всех* $x \in X$;

ii) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ *для всех* $t, s \geq 0$, $x \in X$;

iii) *отображение* $(t,x) \mapsto S(t)x$ *непрерывно в* $\mathbb{R}^+ \times X$.

*Полугруппа* $\{S(t)\}$ *называется* $\omega$*-квазисжимающей* [12] (*гл.* 4), *если*

$$\|S(t)x_1 - S(t)x_2\| \leq e^{\omega t}\|x_1 - x_2\| \quad \forall t \geq 0,\ x_1, x_2 \in X.$$

Поскольку $F$ — инфинитезимальный генератор непрерывной полугруппы $\{S(t)\}$, задача Коши (10) корректна, и ее обобщенные решения запишутся в виде

$$x(t) = S(t)x_0, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad x_0 \in X.$$

Таким образом, каждому $x_0$ можно поставить в соответствие одноэлементное множество $\pi(x_0) = \{S(\cdot)x_0\}$. Легко проверить, что определенное таким образом отображение $\pi : X \to 2^{\mathcal{K}}$ является многозначной $D$-системой в смысле определения 1. (Предположение $\mathrm{A}_5$ удовлетворяется в силу единственности решений, а предположение $\mathrm{A}_4$ следует из непрерывности отображения $(t, x) \mapsto S(t)x$.)

Пусть $V : E \to \mathbb{R}$ — дифференцируемый по Фреше функционал. Тогда $V(S(t)x_0)$ дифференцируема на каждом классическом решении задачи (10). Производную по времени от $V$ в силу (10) можно записать так:

$$\dot{V}(x(t)) = [\nabla V(x(t)), Fx(t)], \tag{11}$$

где $[\cdot, \cdot] : E^* \times E \to \mathbb{R}$ обозначает двойственное спаривание $E^*$ и $E$, т. е. $[\nabla V(x), \xi]$ — значение линейного функционала $\nabla V(x) \in E^*$ в точке $\xi \in E$.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть $F$ — инфинитезимальный генератор непрерывной полугруппы $\{S(t)\}$ нелинейных операторов на $X$, $F(0) = 0$, и $y : X \to \mathbb{R}^+$ — непрерывный функционал. Предположим, что существует дифференцируемый по Фреше функционал $V : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям*:

i) *для некоторых функций $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство*

$$\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad x \in X;$$

ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ *при всех* $x \in D(F)$;

iii) *существует такое $\Delta > 0$, что при любом $\|x_0\| < \Delta$ соответствующее множество*

$$\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)x_0\}$$

*предкомпактно в* $X$;

iv) $\operatorname{Ker} y = \{x \in X \mid y(x) = 0\}$ *инвариантно для* (10), *т. е. если* $y(S(\tau)x_0) = 0$, $\tau \geq 0$, *то* $y(S(t)x_0) = 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}^+$;

v) *множество*

$$M = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}} \setminus \operatorname{Ker} y$$

*не содержит целых полутраекторий системы* (10), *определенных для* $t \in \mathbb{R}^+$.

*Тогда особая точка $x_0 = 0$ системы* (10) *асимптотически устойчива по отношению к $y$.*

***Доказательство.*** Отображение $x_0 \in X \mapsto \pi(x_0) = \{S(\cdot)x_0\}$ задает многозначную $D$-систему на $X$, которая имеет особую точку $x = 0$ в силу предположения $F(0) = 0$. Легко видеть, что из предположений i), iii) вытекают условия $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_3$ теоремы 1.

Докажем теперь, что условие ii) обеспечивает невозрастание $V(x(t))$ на любом обобщенном решении (10) при $x_0 \in X$, $t \in \mathbb{R}^+$. Если $x_0 \in D(F)$, то $x(t) = S(t)x_0$ является классическим решением и $\dot{V}(x(t))$, определяемая формулой (11), существует при всех $t \geq 0$. Тогда неравенство $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ обеспечивает невозрастание $V(x(t))$ на классических решениях при $t \in \mathbb{R}^+$. Для произвольных $x_0 \in X \setminus D(F)$, $T > 0$ обобщенное решение $S(t)x_0$, $0 \leq t \leq T$, аппроксимируется классическими решениями по норме в $L^\infty([0, T]; E)$ в силу предположения $\mathrm{A}_4$. Отсюда, поскольку значения $V$ не возрастают на классических решениях и функционал $V$ непрерывен, получаем, что $V(S(t)x_0)$ не возрастает на $\mathbb{R}^+$ при каждом $x_0 \in X$.

Для завершения доказательства покажем, что условие $\mathrm{C}_4$ выполняется при данных предположениях. Если в формуле (5) $p \in M_1$, то $\dfrac{d}{dt}V(S(t)p) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Следовательно,

$$M_1 \subset M_0 = \overline{\{x \in D(F) \,|\, \dot{V}(x) = 0\}}.$$

(В определении $M_0$ взято замыкание множества, поскольку формула (11) задает $\dot{V}$ только на $D(F)$.) Полуинвариантность $M_1$ означает, что

$$M_1 \subset \left\{x \in M_0 \,\middle|\, S(t)x \in M_0, \quad t \in \mathbb{R}^+\right\}. \tag{12}$$

Предположим, что правая часть формулы (12) содержит некоторый элемент $x$. Тогда из условия iv) следует либо $S(t)x \in \operatorname{Ker} y$, либо $S(t)x \notin \operatorname{Ker} y$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Но последний из приведенных случаев невозможен из-за условия v). Таким образом, любой элемент $x \in M_1$ принадлежит также и $\operatorname{Ker} y$, что доказывает свойство $\mathrm{C}_4$.

Теорема доказана.

Очевидно, в частном случае $y(x) = \|x\|$ теорема 2 дает достаточные условия сильной асимптотической устойчивости особой точки $x = 0$.

***Замечание*** **2.** Если оператор $F$ линеен, то определение 6 эквивалентно определению $C_0$-полугруппы линейных ограниченных операторов, и предположения теоремы 2 относительно непрерывности $\{S(t)\}$ могут быть проверены с помощью теорем Хилле – Иосиды и Люмера – Филлипса [9] (гл. 1). В нелинейном случае можно воспользоваться связью между $\omega$-аккретивными генераторами $F$ и квазисжимающими полугруппами [12]. Для класса монотонных операторов $F$ условие предкомпактности траекторий iii) может быть проверено с помощью результата статьи [13]. Для управляемых систем, допускающих функционал Ляпунова со знакопостоянной нижней границей производных, теорема 2 может быть применена при анализе устойчивости с использованием законов управления, предложенных в работе [14].

Предложенная в статье многозначная теория использована для характеризации частичной асимптотической устойчивости задачи (10) в предположении единственности ее решений. Несомненный интерес представляет исследование более широкого класса объектов — эволюционных включений, рассмотренных в работах [12, 15]. Этот круг задач будет изучен в дальнейшем.

1. *Fattorini H. O.* Infinite dimensional optimization and control theory. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. – 798 p.
2. *Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O.* Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications. – London: Springer, 1999. – 403 p.
3. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
4. *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Sontag E. D., Subbotin A. I.* Asymptotic controllability implies feedback stabilizaton // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1997. – **42**. – P. 1394 – 1407.
5. *Шестаков А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
6. *LaSalle J. P.* Stability theory and invariance principles // Dynam. Systems: Int. Symp. Dynam. Systems (Providence, 1974) / Eds L. Cesari, J. K. Hale, J. P. LaSalle. – New York: Acad. Press, 1976. – Vol. 1. – P. 211 – 222.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

8. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453 – 456.
9. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
10. *Ladyzhenskaya O.* Attractors for semigroups and evolution equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
11. *Lakshmikantham V., Leela S.* Nonlinear differential equations in abstract spaces. – Oxford: Pergamon Press, 1981.
12. *Barbu V.* Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. – San Diego, CA: Acad. Press, 1992. – 476 p.
13. *Dafermos C. M., Slemrod M.* Asymptotic behavior of nonlinear contraction semi-groups // J. Funct. Anal. – 1973. – **13**. – P. 97 – 106.
14. *Зуев А. Л.* Стабилизация неавтономных систем по части переменных с помощью управляемых функций Ляпунова // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 4. – С. 25 – 34.
15. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.

Получено 29.06.2004