УДК 519.21

І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т технол. та дизайну),
А. М. Плічко (Кіровоград. пед. ун-т)

ОДНА МОМЕНТНА ОЦІНКА ДЛЯ СУПРЕМУМУ НОРМОВАНИХ СУМ У ЗАКОНІ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

For a sequence of independent random elements in a Banach space, an upper bound is obtained for the moments of supremum of normed sums in the law of iterated logarithm by using the estimation of moments in the law of large numbers. An example of their application to the law of iterated logarithm in Banach lattices is given.

Для послідовності незалежних випадкових елементів банахового простору знайдено оцінку зверху моментів супремуму нормованих сум у законі повторного логарифма через оцінку моментів у законі великих чисел. Наведено приклад застосування їх до закону повторного логарифма в банахових ґратках.

1. Вступ. Кажуть, що банахів простір B *має тип* 2, якщо існує така стала $C = C(B)$, що для будь-якого скінченного набору елементів $(x_i) \subset B$

$$\mathbf{E}\left\|\sum \varepsilon_i x_i\right\|^2 \leq C \sum \|x_i\|^2,$$

де ε_i, $i \geq 1$, — симетричні незалежні випадкові величини (н. в. в.) Бернуллі. Нехай B — банахів простір типу 2, $x_i \in B$. У праці [1] встановлено таку оцінку:

$$\mathbf{E}\left(\sup_{n\geq 1}\frac{\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|}{\chi(n)}\right)^2 \leq C \sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2}{n}, \tag{1}$$

де $C = C(B)$, $\chi(t) = (2tLL(t))^{1/2}$, $L(t) = \max(1, \ln(t))$, $t > 0$ (щоправда, в [1] нерівність (1) не записана в явному вигляді, але вона легко випливає з леми 2 вказаної праці).

У праці [2] цю оцінку було використано при доведенні порядкового закону повторного логарифма (ЗПЛ) і дещо підсилено для $B = R^1$. А саме, в ній показано, що

$$\mathbf{E}\left(\sup_{n\geq 1}\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|}{\chi(n)}\right)^q \leq C_q\,\mathbf{E}\left(\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}{n}\right)^{q/2}, \tag{2}$$

де $q > 0$, а (ξ_i) — послідовність н. в. в. в R^1 з $\mathbf{E}\xi_i = 0$.

Слід зазначити, що задача оцінювання моментів величини

$$\sup_{n\geq 1}\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|}{d_n},$$

де $d_n > 0$, відома досить давно. Її вивчали у зв'язку з дослідженням законів великих чисел та закону повторного логарифма (див. [1, 3–6]).

У відповідь на деякі зауваження рецензента підкреслимо один цікавий історичний аспект у ЗПЛ.

Нехай ймовірнісний простір — це відрізок $[0,1]$ з мірою Лебега, $\nu_n(x)$ — n-цифра у двійковому розкладі числа x,

$$\kappa_n = \kappa_n(x) = 2\nu_n(x) - 1.$$

Тоді майже напевно (м. н.)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \kappa_i}{\chi(n)} = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \kappa_i}{\chi(n)} = -1.$$

У такому вигляді ЗПЛ уперше встановив О. Я. Хінчин у 1924 р. Це була відповідь на проблему теорії чисел, яку раніше вивчали ряд авторів (Хаусдорф, Харді і Літтлвуд).

Наступний важливий крок був зроблений А. М. Колмогоровим, який узагальнив ЗПЛ на широкий клас послідовностей н. в. в.

Таким чином, 80 років тому ЗПЛ було перенесено з теорії чисел у теорії ймовірностей. Цей факт, як і роль ЗПЛ, недооцінюється. На думку авторів, ЗПЛ Хінчина — це фундаментальний закон, який має загальноматематичне значення.

У першій частині роботи показано, що оцінки, подібні до (1) і (2), мають місце для широкого класу нормуючих констант. У другій частині наведено приклад застосування одержаних моментних оцінок до порядкового ЗПЛ у банахових ґратках.

Нагадаємо відповідні означення.

Підмножина A банахової ґратки B називається *обмеженою за порядком*, якщо існують елементи y і z такі, що $y \le x \le z$ для всіх $x \in A$. Банахова ґратка B називається *σ-повною*, якщо для будь-якої обмеженої за порядком послідовності $x_n \in B$ існують точні верхня і нижня межі. У σ-повній банаховій ґратці для обмеженої за порядком послідовності (x_n) існують *верхня і нижня* (*порядкові*) *границі*, які визначаються рівностями

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_m (\sup_{n\ge m} x_n) \quad \text{та} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_m (\inf_{n\ge m} x_n)$$

відповідно (див. [7, с. 504]). Кожна сепарабельна σ-повна банахова ґратка ізоморфна деякому банаховому ідеальному просторові (БІП) [8, с. 25]. Цей ізоморфізм зберігає як порядок, так і верхні (нижні) межі і дозволяє зводити доведення багатьох результатів для абстрактних банахових ґраток до окремого випадку БІП. Для послідовності випадкових елементів (в. е.) X_i в сепарабельній банаховій ґратці $\sup_{i<n} X_i$ й $\inf_{i<n} X_i$ будуть борелівськими в. е. і згідно з наведеним вище означенням можна розглядати $\limsup_{n\to\infty} X_n$ та $\liminf_{n\to\infty} X_n$. Важливим прикладом σ-повної ґратки буде q-вгнута банахова ґратка (це випливає, наприклад, з [8, с. 6]). Нагадаємо її означення. Нехай $1 \le q < \infty$. Банахова ґратка B називається *q-вгнутою*, якщо існує така стала $D_q = D_q(B)$, що для будь-якого скінченного набору елементів $(x_i) \subset B$ виконується нерівність

$$\left(\sum \|x_i\|^q\right)^{1/q} \le D_q \left\| \left(\sum |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|.$$

Далі нам буде потрібним поняття середнього ψ-відхилення в. в., а також його узагальнення на в. е. у банаховій ґратці. Нагадаємо відповідне означення (докладніше див. [2]). Парна опукла додатна при $t \ne 0$ неперервна функція $\psi(t)$, визначена на R^1, називається *N-функцією* [9, с. 149], якщо $\lim_{t\to 0} t^{-1}\psi(t) = 0$, а $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\psi(t) = +\infty$. Для кожної N-функції $\psi(t)$ *доповнювальна N-функція* визначається рівністю

$$\psi^*(t) = \sup_{s\in R^1} (st - \psi(s)).$$

Нехай в. е. X набуває значень у сепарабельній банаховій ґратці B, а $\psi(t)$ — N-функція. Його *середнім ψ-відхиленням* називається точна верхня межа

$$\mathfrak{S}_\psi X = \sup(x \in K_\psi(X)),$$

де $K_\psi(X) = \big\{\mathbf{E}(\eta X) : \eta — \text{в. в.}, \mathbf{E}\psi^*(\eta) \le 1\big\}$, а $\mathbf{E}X$ — інтеграл Петтіса.

Зокрема, *середнє відхилення степеня* p, $1 < p < \infty$, в. е. X означимо формулою $\mathfrak{S}_p X = \sup(x \in K_p(X))$, де $K_p(X) = \{\mathbf{E}(\eta X) : \mathbf{E}|\eta|^q \le 1\}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, а *середнє квадратичне відхилення* — просто $\mathfrak{S}X$. Для в. в. у просторі R^1 це поняття збігається з класичним поняттям середнього відхилення степеня p, а для БІП на вимірному просторі (T, Λ, μ) – з поточковим відхиленням $(\mathbf{E}|X(t)|^p)^{1/p}$, $t \in T$, коли $\mathbf{E}X = 0$.

Нехай X — в. е., заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ зі значеннями в сепарабельній банаховій ґратці B з $\mathbf{E}X = 0$, (X_i) — послідовність його незалежних копій і (b_i) — числова послідовність. Покладемо $S_n = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ і $v_n = \sum_{i=1}^n b_i^2$. Природним узагальненням ЗПЛ у R^1 на банахові ґратки є співвідношення

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\chi(v_n)} = \mathfrak{S}X, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\chi(v_n)} = -\mathfrak{S}X \quad \text{м. н.} \tag{3}$$

Рівності (3) називають *порядковим ЗПЛ* у банаховій ґратці B. Випадок $b_i = 1$ розглядався у статті [2].

Будемо використовувати означення та позначення, які стосуються банахових ґраток і в. е. у банахових просторах, з [8 – 10]; при цьому обмежуватимемося сепарабельними просторами для уникнення ускладнень з питанням про вимірність суми та супремуму двох в. е.

2. Оцінки моментів супремуму нормованих сум.

Теорема 1. *Нехай B — сепарабельний банахів простір типу 2, (X_i) — послідовність незалежних випадкових елементів у B з $\mathbf{E}X_i = 0$, (d_n) — послідовність додатних чисел, $d_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ і $q \ge 1$. Тоді*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge 1} \frac{\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\|}{\chi(d_n)}\right)^q \le C\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge 1} \frac{\sum_{i=1}^n \|X_i\|^2}{d_n}\right)^{q/2}, \tag{4}$$

де стала $C = C(B)$, можливо, також залежить від q та послідовності (d_n), але не залежить від (X_i).

Сформулюємо одну допоміжну лему про повноту деяких нормованих просторів, що необхідна при доведенні теореми 1. Доведення леми стандартне, і ми наводимо його лише для повноти викладу.

Нехай B — довільний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$, (c_n) — фіксована послідовність додатних чисел, а $q \ge 1$. На лінійному просторі послідовностей (x_i), $x_i \in B$, введемо норми

$$\|(x_i)\|_0 = \sup_{n\geq 1} \left\| c_n \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|,$$
$$\|(x_i)\|_1 = \sup_{n\geq 1} \left(c_n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \quad \text{і} \quad \|(x_i)\|_2 = \left(\mathbf{E} \sup_{n\geq 1} \left\| c_n \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \tag{5}$$

(те, що для величин $\|\cdot\|_0 - \|\cdot\|_2$ виконуються всі властивості норми, перевіряється безпосередньо). Розглянемо нормовані простори $B_j = \{(x_i) : \|(x_i)\|_j < \infty\}$, $j = 0, 1, 2$.

Лема 1. *Простори* $(B_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 0, 1, 2$, *банахові.*

Доведення. *Простір* B_0. Фахівцям з банахових просторів B_0, звичайно ж, нагадує розтягуючу модель. Доведення його повноти проведемо за традиційною схемою. Нехай $\mathbf{x}_m = (x_1^m, x_2^m, \ldots)$ — фундаментальна послідовність елементів B_0. З означення норми $\|\cdot\|_0$ видно, що для будь-якого i послідовність (x_i^m) фундаментальна в B. Отже, існує границя $\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i$. Окрім того, для $\mathbf{x} = (x_i)$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|_0 = \sup_{n\geq 1} c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^m) \right\| = \sup_{n\geq 1} \lim_{k\to\infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^m) \right\| \leq$$
$$\leq \sup_{k\geq m} \sup_{n\geq 1} c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^m) \right\| = \sup_{k\geq m} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\|_0 \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Звідси випливає також, що $\|\mathbf{x}\|_0 < \infty$, а отже, $\mathbf{x} \in B_0$. Таким чином, простір B_0 є банаховим.

Простір B_1. Розглянемо послідовність просторів $B^1, B^2, \ldots$; елемент $x^n \in B^n$ має вигляд $x^n = (x_1^n, \ldots, x_n^n)$, $x_i^n \in B$, а норма вводиться формулою $\|x^n\| = \left(c_n \sum_{i=1}^{n} \|x_i^n\|^2 \right)^{1/2}$. Візьмемо простір $l_\infty(B^n)$, що складається з (обмежених) послідовностей $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots)$ з нормою $\|\mathbf{x}\| = \sup_n \|x^n\|$. Оскільки кожен простір B^n банахів, то й $l_\infty(B^n)$ є банаховим. Простір B_1 буде його „діагоналлю”, тобто складатиметься з послідовностей $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots)$, у яких $x_1^1 = x_1^2 = x_1^3 = \ldots$, $x_2^2 = x_2^3 = x_2^4 = \ldots$ і т. д. Зрозуміло, що границею послідовності „діагональних” елементів може бути лише „діагональний” елемент. Отже, підпростір B_1 є замкненим, а тому повний.

Простір B_2. Для ймовірнісного простору $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ розглянемо простір $L_q(B_0)$ вектор-функцій $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots)$ з Ω в B_0 з нормою $\|X\|_q = \left(\int_\Omega \|X(\omega)\|_0^q d\mathbf{P} \right)^{1/q}$. Він банахів, оскільки, як було показано вище, B_0 є банаховим (див., наприклад, [11, с. 92]). Простір B_2 буде підпростором простору $L_q(B_0)$, складеним з вектор-функцій $X(\omega) = (\varepsilon_1(\omega)x_1, \varepsilon_2(\omega)x_2, \ldots)$, у яких всі компоненти незалежні. Його замкненість перевіряється так. Очевидно, що граничним елементом для послідовності $X_m = (\varepsilon_i x_i^m)$ в нормі $\|\cdot\|_q$ може бути лише елемент вигляду $X = (\varepsilon_i x_i)$. Якщо $\|X_m - X\|_q \to 0$, то $\varepsilon_i^m \to \varepsilon_i$ за ймовірністю для кожного i. Тепер, якщо ε_i^m, $i \geq 1$, незалежні для кожного m, то й граничні в. в. ε_i, $i \geq 1$, теж незалежні. Таким чином, підпростір B_2 є замкненим, а тому повний.

Основою теореми 1 є наступне узагальнення леми Піз’є.

Лема 2. *Нехай B — банахів простір типу 2, (d_n) — послідовність додатних чисел, $d_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ і $q \geq 1$. Тоді для будь-якої послідовності $(x_i) \subset B$*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{n\geq 1} \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|}{\chi(d_n)}\right)^q \leq C\left(\sup_{n\geq 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}{d_n}\right)^{q/2},$$

де стала $C = C(B)$ така ж, як і в теоремі 1.

Доведення. На лінійному просторі послідовностей (x_i), $x_i \in B$, введемо норми (5), тільки замість c_n у першому випадку фігуруватиме $\dfrac{1}{d_n}$, а в другому — $\dfrac{1}{\chi(d_n)}$. Отримаємо (повні, за лемою 1) простори B_1 і B_2.

Покажемо, що з умови

$$\|(x_i)\|_1 < \infty \tag{6}$$

випливає

$$\|(x_i)\|_2 < \infty. \tag{7}$$

Припустимо спочатку, що $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 = \infty$, і скористаємося нерівністю

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|}{\chi\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)} \leq C(B) \quad \text{м. н.} \tag{8}$$

Для $B = R^1$ цю нерівність було встановлено у роботі [12] з $C(B) = 1$. Узагальнення на банахові простори типу 2 можна знайти в [13] (наслідок 1); точніше, в [13] доведено нерівність

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|}{\chi\left(\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|^2\right)} \leq \sqrt{e}.$$

Для отримання звідси нерівності (8) потрібно скористатися типом 2 простору B. З нерівностей (8) та (6) маємо

$$\sup_{n\geq 1} \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|}{\chi(d_n)} < \infty \quad \text{м. н.} \tag{9}$$

Тому [10, с. 159] нерівність (7) еквівалентна умові

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{\|x_n\|}{\chi\left(d_n\right)}\right)^q < \infty.$$

Звідси робимо висновок: імплікація (6) $\Rightarrow$ (7) буде справедливою, якщо виконується остання нерівність. А її дістаємо із таких оцінок:

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{\|x_n\|}{\chi\left(d_n\right)}\right)^q \leq \sup_{n\geq 1}\left(\frac{\|x_n\|^2}{d_n}\right)^{q/2} \leq \|(x_i)\|_1^q < \infty. \tag{10}$$

У випадку, коли $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ збігається за нормою B м. н. Звичайно, тоді виконуватиметься нерівність (9), оскільки за даними умовами $\chi\left(d_n\right) \to \infty$. А далі слід повторити ланцюжок нерівностей (10).

Координатні функціонали, точніше функціонали вигляду $(0,\ldots,0,f_i,0,\ldots)$, $f_i \in B^*$, неперервні в обох нормах $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Тому існує відокремлена локально опукла топологія, слабкіша за обидві ці норми. Залишилося скористатися лемою 3.3 з [14, с. 24], згідно з якою природне вкладення $B_1 \to B_2$ буде обмеженим.

***Доведення теореми* 1.** Для симетричних в. е. (X_i) нерівність (4) випливає з леми 2 та теореми Фубіні. Загальний випадок зводиться до симетричного за допомогою стандартної процедури симетризації: беремо $X_i^{(s)} = X_i - X_i'$, де (X_i') — незалежна копія (X_i). Тоді

$$\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\|}{\chi(d_n)}\right)^q \le \mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\left\|\sum_{i=1}^n X_i^{(s)}\right\|}{\chi(d_n)}\right)^q \le$$

$$\le C\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{1}{d_n}\sum_{i=1}^n\|(X_i-X_i')\|^2\right)^{q/2} \le C_1\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{1}{d_n}\sum_{i=1}^n\|X_i\|^2\right)^{q/2},$$

де $C_1 = C_1(q,(d_n))$ (використано відому нерівність для в. е. Y з $\mathbf{E}Y = 0:$

$$\mathbf{E}\|Y\|^q \le \mathbf{E}\|Y - Y'\|^q,$$

де Y' — незалежна копія Y [11, с. 222]).

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай сепарабельна банахова ґратка B буде p-вгнутою при деякому $1 \le p < \infty$, (X_i) — послідовність незалежних випадкових елементів у B з $\mathbf{E}X_i = 0$, (d_n) — послідовність додатних чисел, $d_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ і $q \ge 1$. Тоді*

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|}{\chi(d_n)}\right\|^q \le C\,\mathbf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n|X_i|^2}{d_n}\right)^{1/2}\right\|^q, \tag{11}$$

де $C = C(q,B,(d_n))$.

Доведення. Розглянемо лише випадок $X_i = \varepsilon_i x_i$, де ε_i, $i \ge 1$, — симетричні незалежні в. в. Бернуллі, а $x_i \in B$. Перехід звідси до загального випадку повторює перехід від леми 2 до теореми 1.

Нехай спочатку B — p-вгнутий БІП і $p \le q$. Тоді B буде і q-вгнутим [8, с. 49]. Далі скористаємося нерівністю

$$(\mathbf{E}\|Y\|^q)^{1/q} \le D_q\|(\mathbf{E}|Y|^q)^{1/q}\|, \tag{12}$$

де Y — в. е. зі значеннями в q-вгнутому БІП [15].

З (12) та леми 2 в R^1 одержуємо

$$\left(\mathbf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{\left|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i x_i\right|}{\chi(d_n)}\right\|^q\right)^{1/q} \le D_q\left\|\left(\mathbf{E}\sup_{n\ge1}\left|\frac{\sum_{i=1}^n\varepsilon_i x_i}{\chi(d_n)}\right|^q\right)^{1/q}\right\| \le$$

$$\le C(q,B)\left\|\sup_{n\ge1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}{d_n}\right)^{1/2}\right\|,$$

тобто для цього випадку оцінку (11) встановлено.

Випадок $p > q$ безпосередньо випливає з нерівності $(\mathbf{E}\|Y\|^q)^{1/q} \le (\mathbf{E}\|Y\|^p)^{1/p}$ і попередніх оцінок, доведених для p. Перехід до абстрактних q-вгнутих банахових ґраток здійснюється за допомогою згадуваного ізоморфізму між банаховими ґратками та БІП [8, с. 25].

Наслідок доведено.

***Зауваження* 1.** 1. Нерівності (1), (2) та (4) нагадують класичну нерівність Хінчина. Щоправда, на відміну від останньої протилежна нерівність в (1), (2), (4) у загальному випадку не виконується, яку б константу C ми не взяли. Справді, покладемо в нерівності (1) для дійсної прямої :

$$x_i = \chi(2^{2n}) \quad \text{при} \quad i = 2^{2n} \quad \text{і} \quad x_i = 0 \quad \text{при} \quad i \ne 2^{2n}.$$

Тоді елементарними обчисленнями отримуємо

$$\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right|}{\chi(n)}\right)^2 \le \left(\sup_{n\ge1}\frac{\sum_{i=1}^n \chi(2^{2i})}{\chi(2^{2n})}\right)^2 \le 4,$$

$$\sup_{n\ge1}\frac{\sum_1^n x_i^2}{n} = \infty.$$

2. Для дійсної прямої, коли $q > 2$, $d_n = n$, $X_i = \xi_i$ — незалежні копії в. в. ξ і $\mathbf{E}\xi = 0$, з результатів [6] маємо

$$\mathfrak{S}_q|\xi| \le \left[\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|}{\chi(n)}\right)^q\right]^{1/q} \le C\mathfrak{S}_q|\xi|,$$

$$\mathfrak{S}_q|\xi| \le \left[\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\sum_{i=1}^n {\xi_i}^2}{n}\right)^{q/2}\right]^{1/q} \le C\mathfrak{S}_q|\xi|\,.$$

Таким чином, для даного випадку оцінка (4) в певному розумінні буде точною.

3. Якщо в умовах п. 2 покласти $q = 2$, то при $\hat{\psi}(t) = \dfrac{|t|^2\ln(1+|t|^2)}{LL(1+t^2)}$

$$\mathfrak{S}_{\hat{\psi}}|\xi| \le C_1\left[\mathbf{E}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|}{\chi(n)}\right)^2\right]^{1/2} \le C_2\mathfrak{S}_{\hat{\psi}}|\xi|,$$

а при $\psi(t) = |t|\ln(1+|t|)$

$$\mathfrak{S}_\psi(\xi^2) \le C_1\mathbf{E}\sup_{n\ge1}\frac{\sum_{i=1}^n {\xi_i}^2}{n} \le C_2\mathfrak{S}_\psi(\xi^2)$$

(див. [6]), тобто у цьому випадку (4) — досить груба оцінка зверху.

4. У зв'язку з п. 1 виникає питання: чи не можна посилити нерівність (4), замінивши у правій частині d_n на $d_n f(n)$, де $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$? Наступний приклад показує, що це не так у просторі R^1. Зафіксуємо натуральне m, візьмемо $q = 1$, $d_n = n$ і покладемо $\xi_i = \varepsilon_i a_i$, де

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \le m, \\ 1 & \text{при } i > m. \end{cases}$$

Тоді для квадрата правої частини (4) маємо оцінку зверху

$$\sup_{n\ge 1} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{nf(n)} = \sup_{n\ge m} \frac{n-m}{nf(n)} \le \frac{1}{f(m)}. \tag{13}$$

Запишемо відповідну оцінку знизу для лівої частини:

$$\mathbf{E} \sup_{n\ge 1} \frac{\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\right|}{\chi(n)} = \mathbf{E} \sup_{n>m} \frac{\left|\sum_{i=m+1}^n \varepsilon_i a_i\right|}{\chi(n)} \ge$$

$$\ge \mathbf{E} \sup_{n>2m} \frac{\left|\sum_{i=m+1}^n \varepsilon_i a_i\right|}{\chi(n-m)} \frac{\chi(n-m)}{\chi(n)} \ge \frac{1}{2} - \delta \tag{14}$$

при деякому $\delta > 0$. Остання нерівність виконується, оскільки при достатньо великому m і $n > 2m$

$$\frac{\chi(n-m)}{\chi(n)} \ge \frac{1}{2} - \delta,$$

а згідно з ЗПЛ для $k = n - m$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\left|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i\right|}{\chi(k)} = 1.$$

Разом оцінки (13), (14) дають негативну відповідь на поставлене питання.

5. Було б цікаво оцінити сталу C в нерівності (4). Прості міркування показують, що її можна брати залежною лише від константи типу 2 простору B і від q та (d_n).

3. Порядковий закон повторного логарифма для зважених сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Спочатку наведемо дві допоміжні леми. Перша стосується одного важливого класу функцій. Кажуть, що функція $\psi(x)$ *задовольняє умову* (ID) (див. [16]), якщо:

вона строго зростає на $[0, \infty)$ і

$$\sup_{t>0} \frac{\psi\,(t+1)}{\psi\,(t)} < \infty\ ;$$

$\psi^{-1}(t)$ при $t \ge 1$ абсолютно неперервна, а для її похідної $\gamma(t)$

$$\gamma\,(st) \le C s^{\theta} \gamma\,(t)$$

при $t \ge 0$, $s \ge 1$ і деяких скінченних θ і $C > 0$.

Наприклад, функції t^{α} та $e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, задовольняють умову (ID) при $\theta = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ і $\theta = 0$ відповідно (якщо функція $\psi(t)$ опукла, то можна взяти $\theta = 0$; див. [16]).

Лема 3 [16]**.** *Нехай* (ξ_i) — *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим математичним сподіванням і* $P\,(n, \varepsilon)$:= $:= \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right| > n\varepsilon\right\}$. *Якщо для послідовності* (n_k)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{\psi(\lambda k)}=1 \quad \textit{при деякому} \quad \lambda>0,$$

а функція $\psi(t)$ *задовольняє умову* (ID), *то еквівалентними є співвідношення*:

1) $\forall\varepsilon>0 \sum\limits_k P(n_k,\varepsilon)<\infty$,

2) $\mathbf{E}h(\xi_i)<\infty$, *де* $h(t)=\displaystyle\int_0^t s\gamma(s)ds$.

Нехай $v_n=\sum_{i=1}^n b_i^2$, послідовність (b_n) задовольняє умову

$$b_n^2\uparrow, \qquad \frac{v_n}{b_n^2}\uparrow \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{15}$$

а індекси $m_n\uparrow\infty$ вибрано так, що при деяких $1<q<Q$

$$q\le\frac{v_{m_{n+1}}}{v_{m_n}}\le Q \tag{16}$$

(такі індекси за умови (15) завжди існують, див. [17, с. 330]).

Наступна лема є певним уточненням результату Гапошкіна [18] на зважені суми однаково розподілених н. в. в.

Лема 4. *Для послідовності* (ξ_n) *незалежних копій випадкової величини* ξ *з* $\mathbf{E}\xi=a$, *послідовності* (b_n), *яка задовольняє умову* (15), m_n, *визначених згідно з* (16), *і* $\overline{m}_n=m_n-m_{n-1}$ *є еквівалентними такі співвідношення*:

i) $\sum_n \mathbf{P}\left\{\left|\dfrac{1}{\overline{m}_n}\sum_{i=1}^{\overline{m}_n}\xi_i-a\right|>\varepsilon\right\}<\infty\ \forall\varepsilon>0$;

ii) $\dfrac{1}{\overline{m}_n}\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n}\xi_i\to a$ *м. н.*;

iii) $\dfrac{1}{v_n}\sum_{i=1}^n b_i^2\xi_i\to a$ *м. н.*

Доведення. Еквівалентність співвідношень i) та ii) добре відома [17, с. 330].

Доведемо еквівалентність ii) $\Leftrightarrow$ iii) (нам, власне, буде потрібна імплікація ii) $\Rightarrow$ iii)). З результатів [18] в наших припущеннях маємо: при $n\to\infty$

$$\frac{1}{\overline{m}_n}\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n}\xi_i-\alpha_n\to 0 \quad \text{м. н.} \tag{17}$$

при деяких невипадкових α_n тоді й тільки тоді, коли при деяких невипадкових β_n

$$\frac{1}{v_n}\sum_{i=1}^n b_i^2\xi_i-\beta_n\to 0 \quad \text{м. н.} \tag{18}$$

Нехай виконується співвідношення ii). Тоді виконується (17), а отже, й (18) з деякими β_n. Якщо $\beta_n\nrightarrow a$, то існує підпослідовність $\beta_{n_k}\to a+\delta$, $\delta\ne 0$ (δ може дорівнювати й ∞).

Нагадаємо, що послідовність в. в. (ζ_n) називається *одностайно абсолютно інтегровною*, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall n:\mathbf{P}(A)<\delta\Rightarrow\displaystyle\int_A|\zeta_n(\omega)|d\mathbf{P}<\varepsilon$. Легко перевірити, що послідовність $\dfrac{1}{v_{n_k}}\sum_{i=1}^{n_k}b_i^2\xi_i$ одностайно абсолютно інтегровна, тому за теоремою Віталі [19, с. 144]

$$a = \mathbf{E}\left(\frac{1}{v_{n_k}}\sum_{i=1}^{n_k} b_i^2 \xi_i\right) \to a + \delta,$$

а це неможливо. Отже співвідношення iii) виконується.

Доведення імплікації iii) $\Rightarrow$ ii) практично без змін повторює попередні міркування.

Лему доведено.

Тепер можна перейти до формулювання теореми про порядковий ЗПЛ.

Нехай X — в. е. у банаховій ґратці B. Будемо припускати, що існують в. в. $\tau \in L_2(\Omega)$ та елемент $u \in B_+$, для яких

$$|X| \leq \tau u \quad \text{м. н.} \tag{19}$$

Згідно з [2], ця умова достатня для існування середнього квадратичного відхилення $\mathfrak{S}X$.

На послідовність (b_n) накладемо такі обмеження:

$$b_n^2 = o\left(\frac{v_n}{LL\,(v_n)}\right) \tag{20}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{m}_n}{\psi\,(n)} = 1 \tag{21}$$

для деякої функції $\psi(x)$, що задовольняє умову (ID) (див. лему 3), де послідовність $(\bar{m}_n)$ визначена у лемі 4.

Теорема 2. *Нехай сепарабельна банахова ґратка B буде q-вгнутою при деякому $q < \infty$, симетричний випадковий елемент X в B задовольняє умову* (19) *і X_n, $n \geq 1$, — його незалежні копії. Крім цього, нехай послідовність (b_n) задовольняє умови* (15), (20), (21) *і*

$$\mathbf{E}h\left(\tau^2\right) < \infty \tag{22}$$

для функції

$$h\,(t) = \int_0^t s\left(\psi^{-1}(s)\right)' ds.$$

Тоді виконується ЗПЛ (3).

Зауваження 2. Умову (22) в загальному випадку не можна послабити. Дійсно, в R^1 для $b_i = 1$, $v_n = n$, $\bar{m}_{n+1} = m_n = 2^n$, $\psi(t) = 2^t$ маємо $h(t) = \dfrac{t}{\ln 2}$, і нерівність (22) означає, що $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$. Таким чином, ми отримали теорему Хартмана – Вінтнера [17, с. 381]. Добре відомо, що для цього класичного випадку умова $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$ буде і необхідною.

Доведення теореми 2. З'ясуємо лише першу рівність у ЗПЛ (3) (друга доводиться аналогічно). Враховуючи вже згадуваний порядковий ізоморфізм між банаховими ґратками та БІП [8, с. 25], обмежимося випадком коли B — БІП на вимірному просторі (T, Λ, μ). Більш того, можемо вважати $\mu(T) = 1$. Тоді $X = (X(t), t \in T) \in B$ м. н., а $\mathfrak{S}X = (\sigma(t), t \in T) \in B$. Покладемо для $m \geq 1$

$$U_m = \left(U_m(t) = \sup_{n \geq m} \frac{S_n(t)}{\chi(v_n)},\ t \in T \right).$$

Досить показати, що

$$\|U_1\| < \infty \quad \text{м. н.} \tag{23}$$

і

$$\mu\{t \in T : \lim_{m \to \infty} U_m(t) = \sigma(t)\} = 1 \quad \text{м. н.} \tag{24}$$

Співвідношення (23), (24) забезпечують виконання загальних умов порядкової збіжності у БІП [9, с. 368].

Спочатку доведемо нерівність (23). В. е. X симетричний, тому його можна зобразити у вигляді $X = \varepsilon \hat{X}$, де ε і $\hat{X}$ незалежні, $\hat{X}$ — копія X, ε — симетрична в. в. Бернуллі. Співвідношення (23) буде виконуватись, коли ми покажемо, що

$$\mathbf{E}_{\hat{X}} \|U_1\|^q < \infty \quad \text{м. н.}, \tag{25}$$

де через $\mathbf{E}_{\hat{X}}(\eta)$ позначено математичне сподівання в. в. η при фіксованій послідовності $(\hat{X}_i)$. Доведемо нерівність (25). При цьому скористаємося наслідком 1 і врахуємо (19):

$$\left(\|U_1(t)\|^q\right)^{1/q} \leq C \mathbf{E}_{\hat{X}} \left\| \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \hat{X}_i^2(t) \right)^{1/2} \right\| \leq$$

$$\leq C \left\| \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \hat{X}_i^2(t) \right)^{1/2} \right\| \leq$$

$$\leq C \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tau_i^2 \right)^{1/2} \|u\| \quad \text{м. н.}, \tag{26}$$

де τ_i — незалежні копії в. в. τ з умови (19).

За умовами (21), (22) та лемою 3

$$\sum_n \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{\overline{m}_n} \sum_{i=1}^{\overline{m}_n} \tau_i^2 - \mathbf{E}\tau^2 \right| > \varepsilon \right\} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

а згідно з лемою 4 ця нерівність еквівалентна співвідношенню

$$\frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tau_i^2 \to \mathbf{E}\tau^2 \quad \text{м. н.}$$

Звідси

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tau_i^2 < \infty \quad \text{м. н.}$$

Ця нерівність разом з оцінкою (26) дають нерівність (25).

Покажемо, що умова (24) також виконується. Для цього доведемо, що майже скрізь на T виконується ЗПЛ в R^1 :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(t)}{\chi\left(v_n\right)} = \sigma(t) \quad \text{м. н.} \tag{27}$$

Тоді з (27) та теореми Фубіні безпосередньо дістаємо умову (24).

Зафіксуємо $t \in T$. Оскільки b_n^2 зростає, а в. в. $X_n(t)$ однаково розподілені, то

$$b_n^2 X_n^2\left(t\right) \nrightarrow 0,$$

отже,

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 X_i^2(t) = \infty \quad \text{м. н.}$$

і аналогічно до (8) маємо (див. також [12])

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n\left(t\right)|}{\chi\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 X_i^2\left(t\right)\right)} \leq 1 \quad \text{м. н.} \tag{28}$$

За нерівністю (19) майже скрізь на T $|X_i(t)| \leq \tau_i u(t)$ м. н. Тому для в. в. $X_i(t)$ виконується умова (22). Тоді, як і для τ_i, з лем 3, 4 при $n \to \infty$ одержуємо

$$\frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 X_i^2(t) \to \sigma^2(t) \quad \text{м. н.}$$

Із останнього співвідношення з урахуванням (28) маємо

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(t)|}{\chi\left(v_n\right)} \leq \sigma(t) \quad \text{м. н.} \tag{29}$$

Далі, позначивши через $I(A)$ в. в., що дорівнює 1 при $\omega \in A$ і 0 у протилежному випадку, використаємо рівність

$$\forall \varepsilon > 0\colon \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \mathbf{E}\left(X_i^2\left(t\right) I\left\{b_i^2 X_i^2\left(t\right) > \varepsilon \frac{v_i}{LL\left(v_i\right)}\right\}\right) = 0,$$

яка є наслідком умови (20) та однакової розподіленості в. в. $X_i(t)$. Відомо [20], що з цієї рівності випливає оцінка знизу в ЗПЛ:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(t)|}{\chi\left(v_n\right)} \geq \sigma(t) \quad \text{м. н.}$$

Останнє співвідношення і (29) означають, що рівність (27), а разом з нею і ЗПЛ (3) справджуються.

Теорему доведено.

З теореми 2 та відомих результатів про закон великих чисел і ЗПЛ в R^1 одержуємо ряд наслідків, в яких даються прості достатні умови для виконання ЗПЛ (3). Слід звернути увагу на те, що в частинах i) й ii) вимога симетричності в. е. X замінюється умовою $\mathbf{E}X = 0$.

Наслідок 2. *Нехай сепарабельна банахова ґратка B q-вгнута при деякому $q < \infty$, для випадкового елемента X у B виконується нерівність* (19), *а (X_n) — послідовність незалежних копій X. Якщо*:

i) *або $\mathbf{E}X = 0$ і послідовність (b_n) задовольняє умови*

$$b_n^2 \uparrow, \qquad b_n^2 = O\left(\frac{v_n}{n}\right),$$

ii) *або* $\mathbf{E}X = 0$, *послідовність* (b_n) *задовольняє умову* (15) *і для деякого* $p > 1$

$$b_n^2 = O\left(v_n \left(\ln v_n\right)^{\frac{1}{1-p}}\right), \quad \mathbf{E}\tau^{2p} < \infty,$$

iii) *або в. е.* X *симетричний, послідовність* (b_n) *задовольняє умови* (15), (20) *і для деякого* $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}\exp(\lambda\tau^2) < \infty,$$

то виконується порядковий ЗПЛ (3).

1. *Pisier G.* Sur la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach // Lect. Notes Math. – 1976. – **526**. – P. 203 – 210.
2. *Мацак И. К.* О законе повторного логарифма в банаховых решетках // Теория вероятностей и ее применения. – 1999. – **44**, вып. 4. – С. 865 – 874.
3. *Burkholder D. L.* Succesive conditional expectations of an integrable function // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**, № 3. – P. 887 – 893.
4. *Choi Bong Dac, Sung Soo Hak.* On moment conditions for the supremum of normed sum // Stochast. Process. and Appl. – 1987. – **26**, № 1. – P. 99 – 106.
5. *Siegmund D.* On moments of the maximum of normed partial sums // Ann. Math. Statist. – 1969. – **40**. – P. 527 – 531.
6. *Мацак І. К.* Оцінки моментів супремума нормованих сум незалежних випадкових величин // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2002. – № 67. – С. 104 – 116.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
8. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. – Berlin etc.: Springer, 1979. – Vol. 2. – 243 p.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – Berlin etc.: Springer, 1991. – 480 p.
11. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
12. *Weiss M.* On the law of the iterated logarithm // J. Math. and Mech. – 1959. – **8**. – P. 121 – 132.
13. *Мацак И. К., Пличко А. Н.* Неравенство Хинчина и асимптотическое поведение сумм $\sum \epsilon_n x_n$ в банаховых решетках // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 639 – 644.
14. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
15. *Мацак І. К., Плічко А. М.* Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1999. – № 61. – С. 105 – 116.
16. *Asmussen S., Kurtz D.* Necessary and sufficient conditions for complete convergence in the law of large numbers // Ann. Probab. – 1980. – **8**, № 1. – P. 176 – 182.
17. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
18. *Гапошкин В. Ф.* О суммировании последовательностей независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. – 1988. – **33**, № 1. – С. 68 – 82.
19. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
20. *Мартикайнен А. И.* Об одностороннем законе повторного логарифма // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – **30**, вып. 4. – С. 694 – 705.

Одержано 17.04.2004,
після доопрацювання — 13.12.2004