УДК 517.97

С. Н. Бак (Винниц. пед. ун-т),
А. А. Панков (Винниц. пед. ун-т; Колледж Вильяма и Мэри, США)

О ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

A system of differential equations that describes the dynamics of an infinite chain of linearly coupled nonlinear oscillators is considered. Results are obtained on the existence and uniqueness of global solutions of the Cauchy problem.

Розглядається система диференціальних рівнянь, яка описує динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результати щодо існування та єдиності глобальних розв'язків задачі Коші.

1. В настоящей работе изучаются уравнения, описывающие динамику бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. Пусть q_n — обобщенная координата n-го осциллятора. Уравнение его движения при отсутствии взаимодействия с соседними осцилляторами имеет вид

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Предполагается, что каждый осциллятор линейно взаимодействует с двумя своими ближайшими соседями. Тогда уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Уравнения (1) представляют собой бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются такие решения системы (1), что

$$\lim_{n \to \pm\infty} q_n(t) = 0, \tag{2}$$

т. е. осцилляторы находятся в состоянии покоя на бесконечности.

Подобные системы представляют интерес в связи с многочисленными физическими приложениями [1, 2]. В работе [3] изучались бегущие волны в таких цепочках, а в [4, 5] — периодические по времени решения.

В данной работе рассматриваются вопросы корректности задачи Коши для системы (1).

2. Потенциал U_n запишем в виде

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + V_n(r)$$

и положим

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V_n'(q_n), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Учитывая граничные условия (2), при подходящих предположениях это уравнение естественно рассматривать как дифференциально-операторное уравнение

$$\ddot{q}_n = Aq - B(q) \tag{4}$$

в гильбертовом пространстве l^2 вещественных двусторонних последовательностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n,$$

а нелинейный оператор B определяется формулой

$$B(q)_n = V_n'(q_n).$$

Скалярное произведение и норма в l^2 обозначаются $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно.

Согласно определению, решением (4) считается дважды непрерывно дифференцируемая функция от t со значением в l^2.

Предполагается, что:

1) последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ вещественных чисел ограничены;

2) $V_n(r)$ — функция класса C^1 на $\mathbb{R}$, $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ и для любого $R > 0$ существует такое $C = C(R) > 0$, что для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$|V_n'(r_1) - V_n'(r_2)| \le C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, |r_2| \le R. \tag{5}$$

В этих условиях нетрудно видеть, что A является ограниченным самосопряженным оператором в l^2, а оператор B ограничен и непрерывен по Липшицу на каждом шаре пространства l^2. Тогда, как следствие стандартного результата о локальной разрешимости, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда для любых* $q^{(0)} \in l^2$ *и* $q^{(1)} \in l^2$ *уравнение* (3) *имеет единственное решение класса* C^2, *определенное на некотором интервале* $(-t_0; t_0)$ *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{6}$$

Следующее утверждение о глобальной разрешимости вытекает из теоремы 1.2 гл. 8 [6].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2 *с константой* C, *не зависящей от* R. *Тогда для любых* $q^{(0)} \in l^2$ *и* $q^{(1)} \in l^2$ *задача* (4), (6) *имеет единственное решение, определенное при всех* $t \in \mathbb{R}$.

3. Условия теоремы 2 означают, в частности, что потенциал V_n имеет рост на бесконечности не выше второй степени. Чтобы ослабить это условие, отметим, что уравнение (4) можно записать в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left[\|p\|^2 - (Aq,q) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n)\right],$$

где $p = \dot{q}$. В предположениях 1 и 2 $H(p,q)$ — функционал класса C^1 на $l^2 \times l^2$, и прямое вычисление показывает, что H — интеграл уравнения (4), т. е. для любого решения $q(t)$ уравнения (4) $H(p(t), q(t))$ не зависит от t.

Теорема 3. *Дополнительно к условиям* 1 *и* 2 *предположим, что оператор* A *неположителен, т. е.* $(Aq, q) \le 0$ *для любого* $q \in l^2$. *Кроме того, пусть выполнено одно из следующих двух условий*:

a) $V_n(r) \ge 0$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $r \in \mathbb{R}$;

b) *существует такая неубывающая функция* $h(r)$, $r \ge 0$, *что* $\lim_{n\to+\infty} h(r) = +\infty$ *и* $V_n(r) \ge h(|r|)$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $r \in \mathbb{R}$.

Тогда для любых $q^{(0)} \in l^2$ *и* $q^{(1)} \in l^2$ *задача* (4), (6) *имеет единственное решение, определенное при всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. *Случай* a). Пусть $q(t)$ — локальное решение задачи (4), (6), существующее в силу теоремы 1. Для того чтобы доказать, что $q(t)$ определено на всей оси, достаточно показать, что $\|q(t)\| + \|\dot q(t)\|$ остается ограниченной на любом конечном интервале $(-a, a)$ существования решения (см., например, [7], теорема X.74).

Имеем

$$H(\dot q(t), q(t)) = H(q^{(1)}, q^{(0)}).$$

В силу условий теоремы и определения гамильтониана

$$\frac{1}{2}\|\dot q(t)\|_{l^2}^2 \le H(q^{(1)}, q^{(0)}).$$

Следовательно, $\|\dot q(t)\|$ ограничено на $(-a, a)$. Поскольку

$$q(t) = \int_0^t \dot q(\tau)\,d\tau + q^{(0)},$$

отсюда следует ограниченность $\|q(t)\|$.

Случай b). Пусть $H_0 \ge 0$ таково, что $H(q^{(1)}, q^{(0)}) \le H_0$ и $\bar r > 0$ — решение уравнения $h(r) = H_0$ (оно, очевидно, существует). Из определения H и условий теоремы следует, что $h(|q_n^{(0)}|) \le H_0$ и, значит, $|q_n^{(0)}| \le \bar r$. Пусть $\psi(r)$ — некоторая функция, определенная равенством

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le \bar r, \\ -r + \bar r + 1, & \bar r \le r \le \bar r + 1, \\ 0, & r \ge \bar r + 1. \end{cases}$$

Положим

$$\tilde V_n(r) = \int_0^r [\psi(\rho) V_n'(\rho) + (1 - \psi(\rho))]\,d\rho.$$

Нетрудно проверить, что модифицированное уравнение (3) с потенциалом $\tilde V_n$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, имеет глобальное решение $q(t)$ с начальными данными $q^{(0)}$, $q^{(1)}$. Элементарные вычисления показывают, что $\tilde V_n(r) \ge h(r)$, где

$$\tilde h(r) = \begin{cases} h(r), & 0 \le r \le \bar r, \\ (\bar r + 1 - r) h(r) + \int_{\bar r}^{r} h(\rho)\,d\rho + \left(\dfrac{r^3}{3} - \bar r \dfrac{r^2}{2} + \dfrac{\bar r^3}{6}\right), & \bar r \le r \le \bar r + 1, \\ r^2 + \int_{\bar r}^{\bar r + 1} h(\rho)\,d\rho + \left[\dfrac{(\bar r + 1)^2}{3} + \dfrac{\bar r^3}{6}\right], & r \ge \bar r + 1. \end{cases}$$

Для модифицированного гамильтониана $\tilde{H}$ имеем $\tilde{H}(p(t), q(t)) = \tilde{H}(q^{(1)}, q^{(0)})$. Поскольку $|q_n^{(0)}| \le \bar{r}$, то $\tilde{H}(q^{(1)}, q^{(0)}) \le H_0$. Следовательно, $\tilde{h}(|q_n|) \le H_0$. Далее, так как $\tilde{h}(r) \ge \tilde{h}(\tilde{r}) = h(\tilde{r}) = H_0$, то $|q_n| \le \tilde{r}$, а поскольку на $q(t)$ модифицированное уравнение совпадает с исходным, теорема доказана.

При некоторых дополнительных предположениях условия неположительности в теореме 3 можно опустить.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 3b) *без условия о неположительности оператора* A *предположим, что* $\lim_{r\to+\infty} h(r)/r^2 = +\infty$. *Тогда задача* (4), (6) *имеет единственное глобальное решение для любых* $q^{(0)} \in l^2$ *и* $q^{(1)} \in l^2$.

Доказательство. Запишем U_n в виде

$$U_n(r) = -\frac{c_n - 2\lambda}{2} r^2 + (V_n(r) - \lambda r^2)$$

с достаточно большим $\lambda > 0$. Тогда новый оператор A, соответствующий коэффициентам a_n и $c_n - 2\lambda$, будет неположительным. В то же время

$$V_n(r) - \lambda r^2 \ge h(|r|) - \lambda r^2 = h(|r|)\left(1 - \lambda \frac{r^2}{h(|r|)}\right).$$

Отсюда следует

$$V_n(r) - \lambda r^2 \ge k_1 h(|r|) - k_2$$

с некоторыми $k_1 \in (0,1)$ и $k_2 \ge 0$. Теперь достаточно применить теорему 3 с заменой $h(r)$ на $k_1 h(r) - k_2$.

Следствие доказано.

Следствие 1 применимо, например, к потенциалам вида $V_n(r) = \alpha_n r^3 + \beta_n r^4$, где последовательности α_n и β_n ограничены и $\beta_n \ge \kappa > 0$.

4. Аргументы из п. 3 применимы и в случае сингулярных потенциалов типа Леннарда – Джонса [8]. Сохраним условие 1, а условие 2 заменим следующим:

3) функция $V_n(r)$ предполагается принадлежащей C^1 на $(-\infty, d)$, $d > 0$, и на каждом конечном интервале $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, d)$ выполняется неравенство (5) с константой C, не зависящей от $n \in \mathbb{Z}$, но, возможно, зависящей от интервала.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 3, *оператор* A *неположителен и существует такая функция* $h(r)$ *на* $(-\infty, r)$, *что* $h(r)$ *не возрастает на некотором интервале* $(-\infty, \alpha_0)$ *и не убывает на* $(\alpha_0\, d)$, *причем* $\lim_{r\to d} h(r) = \lim_{r\to-\infty} h(r) = +\infty$ *и* $V_n(r) \ge h(r)$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $r \in (-\infty, d)$. *Тогда для любых* $q^{(0)} \in l^2$ *и* $q^{(1)} \in l^2$ *таких, что* $q_n^{(0)} < d$, *задача* (4), (6) *имеет единственное глобальное решение.*

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3 (случай b)). Потенциал $V_n(r)$ склеивается с квадратным потенциалом на некоторых интервалах $(\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$ и $(-\beta_0, -\beta_0 - 1)$. К модифицированному уравнению применяется теорема 2 и проверяется, что решение модифицированного уравнения является на самом деле решением исходного уравнения.

Отметим, что решения $q_n(t) < d$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поскольку множество $\left\{q \in l^2 : q_n < d,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ не является открытым в l^2, в рассматриваемом случае классические результаты о локальной разрешимости неприменимы.

5. Рассмотрим теперь случай

$$V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3,$$

где d_n — ограниченная последовательность. Предполагается, что оператор A отрицательно определен, т. е. $(Aq, q) \le -\alpha_0 \|q\|^2$, $\alpha_0 > 0$, для $q \in l^2$.

Положим

$$J(q) = -\frac{1}{2}(Aq, q) + \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n q_n^3 = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{3}b(q).$$

Отметим, что $a(q)^{1/2}$ — норма на l^2, эквивалентная стандартной. Тогда

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + J(q).$$

Поскольку $|b(q)| \le c'\|q\|_{l^3}^3 \le c''\|q\|^3$, существует такая константа $c > 0$, что

$$|b(q)|^{1/3} \le ca(q)^{1/2}, \qquad q \in l^2. \tag{7}$$

Положим

$$\gamma = \inf\left\{\sup_{\lambda\ge 0} J(\lambda q) : q \in l^2, \ q \ne 0\right\}. \tag{8}$$

Лемма 1. $\gamma \ge 1/(6c^6)$.

Доказательство. Имеем

$$J(\lambda q) = \frac{\lambda^2}{2}a(q) + \frac{\lambda^3}{3}b(q).$$

Если $b(q) \ge 0$, то

$$\sup_{\lambda\ge 0} J(\lambda q) = +\infty,$$

если же $b(q) < 0$, то

$$\sup_{\lambda\ge 0} J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)}q\right) = \frac{1}{6}\frac{a(q)^3}{b(q)^2}.$$

Из неравенства (7) получаем требуемое.

Положим

$$W_\gamma = \left\{q \in l^2 : 0 \le J(\lambda q) < \gamma \ \forall\lambda \in [0,1]\right\}. \tag{9}$$

Очевидно, что W_γ звездно относительно начала, т. е. если $q \in W_\gamma$, то $\theta q \in W_\gamma$ для любого $\theta \in [0,1]$.

Лемма 2. *Множество* W_γ *содержит открытый эллипсоид*

$$B = \left\{q \in l^2 : a(q) < \rho\right\}$$

для любого $\rho \le 9/(4c^2)$, $\rho/2 + (c^3/3)\rho^{3/2} < \gamma$.

Доказательство. В силу (7)

$$\frac{\lambda^2}{2}a(q) - \frac{\lambda^3 c^3}{3}a(q)^{3/2} \le J(\lambda q) \le \frac{\lambda^2}{2}a(q) + \frac{\lambda^3 c^3}{3}a(q)^{3/2}.$$

Следовательно, $J(\lambda q) \ge 0$ для любого $\lambda \in [0,1]$, если

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda c^3}{3} a(q)^{1/2} \geq 0 \qquad \forall \lambda \in [0,1].$$

Значит, если $a(q) \leq 9/(4c^2)$, то в силу второго условия на ρ $J(\lambda q) < \gamma$.

Лемма доказана.

Положим

$$W_{*,\gamma} = \left\{ q \in l^2 : a(q) + b(q) > 0, \; J(q) < \gamma \right\}.$$

В силу непрерывности функционалов $a(q)$ и $b(q)$ $W_{*,\gamma}$ — открытое множество.

Лемма 3. $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup B$.

Доказательство. Достаточно показать, что $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup \{0\}$.

Пусть $q \in W_\gamma$, $q \neq 0$. Если $b(q) \geq 0$, то $a(q) + b(q) > 0$ и $J(q) < \gamma$. Если же $b(q) < 0$, то

$$\sup J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)} q\right) \geq \gamma.$$

Тогда $-a(q)/b(q) > 1$ и $J(q) < \gamma$. Это показывает, что $q \in W_{*,\gamma}$.

Наоборот, пусть $q \in W_{*,\gamma}$. Если $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q) < \gamma$$

и $q \in W_\gamma$. Если же $b(q) < 0$, то неравенство $-a(q)/b(q) > 1$ показывает, что

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q),$$

откуда и получаем требуемое.

В силу открытости $W_{*,\gamma}$ и B лемма 3 показывает, что множество W_γ открыто, т. е. является окрестностью нуля в l^2.

Лемма 4. W_γ — *ограниченное множество.*

Доказательство. Если $b(q) \geq 0$, то $J(q) \geq a(q)/2$ и $a(q) < 2\gamma$. Если же $b(q) < 0$, то согласно лемме 3 $b(q) > -a(q)$. Значит, $J(q) > a(q)/6$ и $a(q) < 6\gamma$. Таким образом, W_γ содержится в ограниченном множестве $\left\{ q \in l^2 : a(q) < 6\gamma \right\}$.

Теорема 5. *Пусть* $V_n(r) = (d_n/3) r^3$, *где* d_n — *ограниченная последовательность, оператор* A *отрицательно определен,* $q^{(0)} \in W_\gamma$ *и* $q^{(1)} \in l^2$ *таковы, что*

$$\frac{1}{2} \left\| q^{(1)} \right\|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma.$$

Тогда задача Коши с начальными данными $q^{(0)}$ *и* $q^{(1)}$ *имеет единственное глобальное решение.*

Доказательство. Существование и единственность локального решения $q(t)$ следует из теоремы 1. Как и при доказательстве теоремы 3 (случай а)), достаточно показать, что $q(t)$ остается ограниченным.

Покажем, что $q(t) \in W_\gamma$. Предположим, что это не так, и пусть $t_1 > 0$ — наименьшее значение $t > 0$, для которого $q(t_1) \notin W_\gamma$. Тогда $q(t_1)$ принадлежит границе ∂W_γ множества W_γ. Поскольку W_γ звездно, то $\theta q(t_1) \in W_\gamma$ для любого $\theta \in [0, 1)$. Значит, $J(\theta q(t_1)) < \gamma$. Переходя к пределу при $\theta \to 1$, получаем $J(q(t_1)) \leq \gamma$. Если $J(q(t_1)) < \gamma$, то в силу определения W_γ и того, что $J(\theta q(t_1)) < \gamma$, имеем $q(t_1) \in W_\gamma$. Последнее противоречит сделанному предположению. Таким образом, $J(q(t_1)) = \gamma$.

Поскольку гамильтониан H сохраняется, то

$$J(q(t_1)) \leq \frac{1}{2}|\dot{q}(t_1)|^2 + J(q(t_1)) = \frac{1}{2}\left|q^{(1)}\right|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma.$$

Полученное противоречие показывает, что $q(t) \in W_\gamma$ для всех $t > 0$, для которых q определено. Следовательно, решение существует при всех $t > 0$.

Так как уравнение (1) инвариантно относительно замены t на $-t$, решение определено при всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 5 является дискретным аналогом одного результата Сэттинджера [9], относящегося к нелинейному волновому уравнению. В частности, она дает глобальную разрешимость задачи Коши в случае, когда начальные данные достаточно малы в l^2-норме.

1. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization // Physica D. – 1997. – **103**. – P. 201 – 250.
2. *Braun O. M., Kivshar Y. S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel – Kontorova model // Phys. Repts. – 1998. – **306**. – P. 1 – 108.
3. *Iooss G., Kirchgässner K.* Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators // Communs Math. Phys. – 2000. – **211**. – P. 439 – 464.
4. *Бак С. Н., Панков А. А.* О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов // Допов. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 13 – 16.
5. *Бак С. Н.* Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2004. – № 3. – С. 263 – 273.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
8. *Friesecke G., Wattis J.* Existence theorem for solitary waves on lattices // Communs Math. Phys. – 1994. – **161**. – P. 391 – 418.
9. *Sattinger D.* On global solutions nonlinear hyperbolic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1968. – **30**. – P. 148 – 172.

Получено 13.07.2004,
после доработки — 09.03.2005