УДК 512.548

**А. М. Гальмак** (Могилев. ун-т продовольствия, Беларусь)

# О ТЕОРЕМЕ ШУРА ДЛЯ $n$-АРНЫХ ГРУПП

We prove $n$-ary analogs of the well-known Shur theorem on the finiteness of a commutator subgroup of a group whose center possesses a finite index.

Отримано $n$-арні аналоги відомої теореми Шура про скінченність комутанта групи, в якій центр має скінченний індекс.

**Введение.** Между центром и коммутантом группы существует связь, устанавливаемая теоремой Шура [1] о конечности коммутанта группы, центр которой имеет в ней конечный индекс. Основная цель данной работы — установление подобной связи между $n$-арными аналогами центра и коммутанта в $n$-арной группе. При этом роль $n$-арных аналогов центра группы будут играть центр и полуцентр $n$-арной группы, являющиеся ее подалгебрами, а $n$-арными аналогами коммутанта группы будем считать $\mathfrak{F}$-корадикальную конгруэнцию $n$-арной группы в случае, когда $\mathfrak{F}$ — класс всех абелевых (полуабелевых) $n$-арных групп. Понятие $\mathfrak{F}$-корадикальной конгруэнции введено Л. А. Шеметковым для произвольных универсальных алгебр [2].

В теореме Шура говорится о конечности коммутанта группы, а так как в качестве его $n$-арного аналога выбрана некоторая конгруэнция $n$-арной группы, то прежде чем перейти к установлению теоремы Шура для $n$-арных групп, необходимо ответить на вопрос: что считать порядком конгруэнции в $n$-арной группе? Ответить на этот вопрос позволяет предложение 10.11 [3], согласно которому все классы конгруэнции, определенной на $n$-арной группе, имеют одну и ту же мощность. Поэтому естественно назвать порядком конгруэнции в $n$-арной группе мощность классов этой конгруэнции [4]. Если $\rho$ — конгруэнция $n$-арной группы, то для обозначения ее порядка в $n$-арной группе используют [4] символ $\|\rho\|$. При этом если $\|\rho\| < \infty$, то $\rho$ называют конечной конгруэнцией. В противном случае $\rho$ — бесконечная конгруэнция. Порядок конгруэнции $\rho$ в $n$-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$ не следует смешивать с ее порядком $\|\rho\|$ как подалгебры в $A^2$. Допуская вольность речи, в случаях, когда не возникает разночтений, говорят и пишут „порядок конгруэнции" вместо „порядок конгруэнции в $n$-арной группе".

Напомним некоторые понятия теории $n$-арных групп, используемые в работе.

Согласно Дернте [5], универсальная алгебра $\langle A, [\ ]\rangle$ с одной $n$-арной ($n \geq 2$) операцией $[\ ] : A^n \to A$ называется *$n$-арной группой*, если выполняются следующие условия:

1) $n$-арная операция $[\ ]$ на множестве $A$ *ассоциативна*, т. е.

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in A$;

2) каждое из уравнений

$$[a_1 \ldots a_{i-1}x_i a_{i+1} \ldots a_n] = b, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

однозначно разрешимо в $A$ относительно $x_i$ для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, $b \in A$.

Пост заметил [6], что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дернте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с $n$ до двух ($i = 1, n$), а при $n \geq 3$ даже до одного ($i$ — фиксированное из $\{2, \ldots, n-1\}$).

$n$-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ называется:

*абелевой*, если

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}]$$

для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и любой подстановки $\sigma$ множества $\{1, \ldots, n\}$;

*полуабелевой*, если

$$[a a_1 \ldots a_{n-2} b] = [b a_1 \ldots a_{n-2} a]$$

для всех $a, a_1, \ldots, a_{n-2}, b \in A$.

$n$-Арная подгруппа $\langle B, [\,]\rangle$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется *инвариантной* в ней, если

$$\Big[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{B \ldots B}_{i-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-i}\Big]$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 2, 3, \ldots, n$. Если же последнее равенство выполняется только для $i = n$, то $\langle B, [\,]\rangle$ называется *полуинвариантной* в $\langle A, [\,]\rangle$.

Для любой $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ через $\theta_A$ обозначается введенное Постом [6] отношение эквивалентности, определенное на свободной полугруппе $F_A$ по правилу: $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\gamma$ и $\delta$ такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$.

Последовательность $e_1, \ldots, e_{k(n-1)}$, $k \geq 1$, элементов $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется *нейтральной*, если

$$[e_1 \ldots e_{k(n-1)} a] = [a e_1 \ldots e_{k(n-1)}] = a$$

для любого $a \in A$. Последовательность $\beta$ элементов $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется *обратной* к последовательности $\alpha$, составленной из элементов этой же $n$-арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными. Элемент $a$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется *косым* для $a$, если $\Big[\bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-1}\Big] = a$.

**1. Группы $A^*$ и $A_0$.** Для любой $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ Пост определил универсальную обертывающую группу $A^* = F_A/\theta_A$, выделил в ней нормальную подгруппу

$$A_0 = \{\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) \mid a_1, \ldots, a_{n-1} \in A\},$$

которая называется соответствующей для $\langle A, [\,]\rangle$, и показал, что

$$A^*/A_0 = \Big\{\theta_A(a)A_0,\ \theta_A^2(a)A_0, \ldots, \theta_A^{n-1}(a)A_0 = A_0\Big\}$$

для любого $a \in A$ [6].

Для любого подмножества $B$ $n$-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ полагают [7]

$$B_0(A) = B^{(n-1)}(A) = \Big\{\theta_A(a) \in A_0 \mid \exists b_1, \ldots, b_{n-1} \in B,\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_{n-1}\Big\},$$

$$B^*(A) = \Big\{\theta_A(a) \in A^* \mid \exists b_1, \ldots, b_i \in B\ (i \geq 1),\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_i\Big\}.$$

Ясно, что $B^*(A) \subseteq A^*$, $B_0(A) \subseteq A_0$, в частности $A^*(A) = A^*$, $A_0(A) = A_0$.

Если $\langle B, [\,]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, то $B^*(A)$ — подгруппа группы $A^*$, изоморфная группе $B^*$, а $B_0(A)$ — подгруппа группы $A_0$, изоморфная группе $B_0$ [7].

**Лемма 1.** *Пусть $\langle B, [\ ]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, $A = \bigcup\limits_{i \in I} \Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big]$ — разложение $\langle A, [\ ]\rangle$ на непересекающиеся левые смежные классы по $\langle B, [\,]\rangle$. Тогда*:

1) *$A^* = \bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i) B^*(A)$ — разложение $A^*$ на непересекающиеся левые смежные классы по $B^*(A)$;*

2) *отображение $\Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big] \to \theta_A(x_i) B^*(A)$ является биекцией множества всех левых смежных классов $\langle A, [\,]\rangle$ по $\langle B, [\,]\rangle$ на множество всех левых смежных классов $A^*$ по $B^*(A)$.*

***Доказательство.*** 1. Пусть $\theta_A(a_1 \ldots a_k)$ — произвольный элемент из $A^*$, $k = 1, \ldots, n-1$. Если зафиксировать $b_1, \ldots, b_{k-1} \in B$, то найдется $y \in A$ такой, что

$$\theta_A(a_1 \ldots {}_k) = \theta_A(y b_1 \ldots b_{k-1}). \tag{1}$$

Если $b_k, \ldots, b_{n-1} \in B$, то $[y b_1 \ldots b_{k-1} b_k \ldots b_{n-1}] \in \Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big]$ для некоторого $i \in I$, откуда

$$[y b_1 \ldots b_{k-1} b_k \ldots b_{n-1}] = [x_i b_1 \ldots b_{k-1} b_k \ldots b_{n-2} b]$$

для некоторого $b \in B$. Тогда

$$\theta_A(y b_1 \ldots b_{k-1}) \theta_A(b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_i) \theta_A(b_1 \ldots b_{n-2} b),$$

$$\theta_A(y b_1 \ldots b_{k-1}) = \theta_A(x_i) \theta_A(b_1 \ldots b_{n-2} b) \theta_A^{-1}(b_k \ldots b_{n-1}) \in \alpha_A(x_i) B^*(A),$$

откуда и из (1) следует $\theta_A(a_1 \ldots a_k) \in \theta_A(x_i) B^*(A)$. Следовательно,

$$A^* \subseteq \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i) B^*(A).$$

Обратное включение очевидно. Таким образом, доказано равенство из утверждения 1.

Предположим, что $\theta_A(x_i) B^*(A) \cap \theta_A(x_j) B^*(A) \neq \varnothing$, $i \neq j$, т. е.

$$\theta_A(x_i) \theta_A(c_1 \ldots c_k) = \theta_A(x_j) \theta_A(d_1 \ldots d_m)$$

для $c_1, \ldots, c_k$, $d_1, \ldots, d_m \in B$, где $k, m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ясно, что $k = m$.

Если $k = n - 1$, то из последнего равенства следует

$$[x_i c_1 \ldots c_{n-1}] = [x_j d_1 \ldots d_{n-1}],$$

что противоречит условию леммы.

Если $k < n - 1$, то

$$\theta_A(x_i)\theta_A(c_1 \ldots c_k)\theta_A(c_{k+1} \ldots c_{n-1}) = \theta_A(x_j)\theta_A(d_1 \ldots d_k)\theta_A(c_{k+1} \ldots c_{n-1})$$

для любых $c_{k+1}, \ldots, c_{n-1} \in B$, откуда

$$[x_i c_1 \ldots c_{n-1}] = [x_j d_1 \ldots d_k c_{k+1} \ldots c_{n-1}].$$

Последнее равенство также противоречит условию леммы. Следовательно, равенство из утверждения 1 является разложением $A^*$ на непересекающиеся левые смежные классы по $B^*(A)$.

Утверждение 2 очевидно.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $\langle B, [\,]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, $b_1, \ldots \ldots, b_{n-2}$ — фиксированные элементы из $B$, $A = \bigcup\limits_{i \in I} \Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big]$ — разложение $\langle A, [\,]\rangle$ на непересекающиеся левые смежные классы по $\langle B, [\,]\rangle$. Тогда*:

1) *$A_0 = \bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2}) B_0(A)$ — разложение $A_0$ на непересекающиеся левые смежные классы по $B_0(A)$;*

2) *отображение $\Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big] \to \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2}) B_0(A)$ является биекцией множества всех левых смежных классов $\langle A, [\,]\rangle$ по $\langle B, [\,]\rangle$ на множество всех левых смежных классов $A_0$ по $B_0(A)$.*

***Доказательство.*** Поскольку $\langle B, [\,]\rangle$ — $n$-арная подгруппа, то

$$\Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big] = [x_i b_1 \ldots b_{n-2} B], \quad i \in I.$$

1. Пусть $\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1})$ — произвольный элемент из $A_0$. Если зафиксировать $b'_1, \ldots, b'_{n-1} \in B$, то найдется $y \in A$ такой, что

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) = \theta_A(y b_1 \ldots b_{n-2} b'_1 b'_2 \ldots b'_{n-1}). \tag{2}$$

Поскольку $[y b_1 \ldots b_{n-2} b'_1] \in \Big[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}\Big]$ для некоторого $x_i$, то

$$[y b_1 \ldots b_{n-2} b'_1] = [x_i b_1 \ldots b_{n-2} b]$$

для некоторого $b \in B$. Тогда вследствие (2)

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) = \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(b b'_2 \ldots b'_{n-1}),$$

т. е. $\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) \in \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2}) B_0(A)$. Следовательно,

$$A_0 \subseteq \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2}) B_0(A).$$

Обратное включение очевидно. Таким образом, доказано равенство из утверждения 1.

Предположим, что

$$\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_0(A) \cap \theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})B_0(A) \neq \varnothing, \quad i \neq j,$$

т. е.

$$\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(c_1 \ldots c_{n-1}) = \theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(d_1 \ldots d_{n-1})$$

для $c_1, \ldots, c_{n-1}$, $d_1, \ldots, d_{n-1} \in B$. Тогда

$$\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(c_1 \ldots c_{n-1})\theta_A(b) = \theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(d_1 \ldots d_{n-1})\theta_A(b)$$

для любого $b \in B$. Далее, так как

$$b_1 \ldots b_{n-2} c_1 \ldots c_{n-1} b \, \theta_A c'_1 \ldots c'_{n-1}, \quad b_1 \ldots b_{n-2} d_1 \ldots d_{n-1} b \, \theta_A d'_1 \ldots d'_{n-1}$$

для некоторых $c'_1, \ldots, c'_{n-1}$, $d'_1, \ldots, d'_{n-1} \in B$, из последнего равенства следует

$$\theta_A(x_i)\theta_A(c'_1 \ldots c'_{n-1}) = \theta_A(x_j)\theta_A(d'_1 \ldots d'_{n-1}),$$

откуда $[x_i c'_1 \ldots c'_{n-1}] = [x_j d'_1 \ldots d'_{n-1}]$. Последнее равенство противоречит условию леммы. Следовательно, равенство из утверждения 1 является разложением $A_0$ на пересекающиеся левые смежные классы по $B_0(A)$.

Утверждение 2 очевидно.

Лемма доказана.

Из доказанных предложений вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если $\langle B, [\,]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, то*

$$|A : B| = |A^* : B^*(A)| = |A_0 : B_0(A)|.$$

***Замечание* 1.** Для конечных $n$-арных групп равенства из следствия 1 могут быть получены без использования лемм 1 и 2:

$$|A^* : B^*(A)| = |A^*| : |B^*(A)| = |A^*| : |B^*| =$$

$$= |A|(n-1) : |B|(n-1) = |A| : |B| = |A : B|,$$

$$|A_0 : B_0(A)| = |A_0| : |B_0(A)| = |A_0| : |B_0| = |A| : |B| = |A : B|.$$

**Лемма 3** [6]**.** *Если $\langle B, [\,]\rangle$ — инвариантная $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, то $B^*(A)$ и $B_0(A)$ — инвариантные подгруппы группы $A^*$.*

Из следствия 1 и леммы 3 вытекает равенство мощностей $n$-арной фактор-группы $\langle A/B, [\,]\rangle$ и фактор-групп $A^*/B^*(A)$ и $A_0/B_0(A)$. Совпадение мощностей фактор-групп $A^*/B^*(A)$ и $A_0/B_0(A)$ наводит на мысль о возможном изоморфизме этих фактор-групп.

Покажем, что это действительно так.

**Лемма 4.** *Если $\langle B, [\,]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, то $A^* = B^*(A)A_0$.*

***Доказательство.*** Зафиксируем $b \in B$. Тогда

$$\theta_A(b),\ \theta_A(bb) = \theta_A^2(b), \ldots, \theta_A\Big(\underbrace{b \ldots b}_{n-2}\Big) = \theta_A^{n-2}(b) \in B^*(A),$$

откуда

$$A_0 \bigcup \theta_A(b)A_0 \bigcup \ldots \bigcup \theta_A^{n-2}(b)A_0 \subseteq B^*(A)A_0.$$

А так как согласно Посту (см., например, предложение 1.4.6 из [7]),

$$A_0 \bigcup \theta_A(b)A_0 \bigcup \ldots \bigcup \theta_A^{n-2}(b)A_0 = A^*,$$

то $A^* \subseteq B^*(A)A_0$. Обратное включение очевидно.

Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием определений.

**Лемма 5.** *Если $\langle B, [\ ]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, то $B_0(A) = B^*(A) \cap A_0$.*

**Предложение 1.** *Если $\langle B, [\ ]\rangle$ — инвариантная $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, то фактор-группы $A^*/B^*(A)$ и $A_0/B_0(A)$ изоморфны.*

***Доказательство.*** Применяя леммы 4 и 5 и первую теорему об изоморфизмах для групп, получаем

$$A^*/B^*(A) = B^*(A)A_0/B^*(A) \simeq A_0/B^*(A) \cap A_0 = A_0/B_0(A).$$

Предложение доказано.

***Замечание 2.*** Если отождествить группу $B^*(A)$ с группой $B^*$, а группу $B_0(A)$ с группой $B_0$, то изоморфизм из предложения 1 может быть записан более компактно: $A^*/B^* \simeq A_0/B_0$.

**2. $n$-Арные аналоги центра группы.** *Центром* $n$-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ называется множество [6, 8]

$$Z(A) = \{z \in A \mid zx\theta_A xz \quad \text{для всех} \quad x \in A\},$$

а *централизатором* подмножества $B \subseteq A$ в $n$-арной группе $\langle A, [\,]\rangle$ — множество [9]

$$C_A(B) = \{z \in A \mid zx\theta_A xz \quad \text{для всех} \quad x \in B\}.$$

Ясно, что $Z(A) = C_A(A)$.

**Лемма 6** [9]**.** *Если $\langle B, [\ ]\rangle$ — $n$-арная подгруппа $n$-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, то $\langle C_A(B), [\ ]\rangle$ также является $n$-арной подгруппой в $\langle A, [\,]\rangle$.*

**Лемма 7** [6, 8]**.** *Центр $\langle Z(A), [\,]\rangle$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ является ее абелевой инвариантной $n$-арной подгруппой.*

**Предложение 2.** *Пусть $\langle T = C_A(B), [\,]\rangle$ — централизатор $n$-арной подгруппы $\langle B, [\,]\rangle$ в $n$-арной группе $\langle A, [\,]\rangle$. Тогда группа $T^*(A)$ совпадает с централизатором $C_{A^*}(B^*(A))$ группы $B^*(A)$ в группе $A^*$ : $T^*(A) = C_{A^*}(B^*(A))$.*

***Доказательство.*** Согласно лемме 6 $\langle T, [\,]\rangle$ — $n$-арная подгруппа в $\langle A, [\,]\rangle$, а в силу теоремы 2.2.19 [7] $T^*(A)$ — подгруппа группы $A^*$.

Согласно утверждению 2 теоремы 2.2.19 [7] произвольный элемент $u \in T^*(A)$ можно представить в виде $u = \theta_A(z_1 \ldots z_i)$, где $z_1, \ldots, z_i \in T$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Произвольный элемент $v$ подмножества $B^*(A)$ имеет вид $v = \theta_A(a_1 \ldots a_j)$, где $a_1, \ldots, a_j \in B$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Поскольку $z_i \in C_A(B)$, то $\theta_A(z_i a_j) = \theta_A(a_j z_i)$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, откуда

$$uv = \theta_A(z_1 \ldots z_i)\theta_A(a_1 \ldots a_j) = \theta_A(z_1 \ldots z_i a_1 \ldots a_j) =$$

$$= \theta_A(z_1 \ldots z_{i-1})\theta_A(z_i a_1)\theta_A(a_2 \ldots a_j) = \theta_A(z_1 \ldots z_{i-1})\theta_A(a_1 z_i)\theta_A(a_2 \ldots a_j) =$$

$$= \theta_A(z_1 \ldots z_{i-1} a_1 z_i a_2 \ldots a_j) = \ldots = \theta_A(z_1 \ldots z_{i-1} a_1 \ldots a_j z_i) = \ldots$$

$$\ldots = \theta_A(a_1 \ldots a_j z_1 \ldots z_i) = \theta_A(a_1 \ldots a_j)\theta_A(z_1 \ldots z_i) = vu,$$

т. е. $uv = vu$. Следовательно, $u \in C_{A^*}(B^*(A))$ и доказано включение $T^*(A) \subseteq$ $\subseteq C_{A^*}(B^*(A))$.

Пусть теперь $w = \theta_A(a_1 \ldots a_i)$, $a_i \in A$ — произвольный элемент из $C_{A^*}(B^*(A))$, $z_2, \ldots, z_i$ — произвольные элементы из $T$. Далее, так как существует $z_1 \in A$ такой, что $\theta_A(a_1 \ldots a_i) = \theta_A(z_1 z_2 \ldots z_i)$, то

$$w = \theta_A(z_1)\theta_A(z_2 \ldots z_i) \in C_{A^*}(B^*(A)).$$

Отсюда $\theta_A(z_1) \in C_{A^*}(B^*(A))$, поскольку согласно доказанному выше

$$\theta_A(z_2 \ldots z_i) \in C_{A^*}(B^*(A)).$$

Тогда $\theta_A(z_1)\theta_A(b) = \theta_A(b)\theta_A(z_1)$ для любого $b \in B$, откуда

$$z_1 b \theta_A b z_1, \quad z_1 \in C_A() = T.$$

Следовательно, $w = \theta_A(z_1 z_2 \ldots z_i) \in T^*(A)$ и $C_{A^*}(B^*(A)) \subseteq T^*(A)$. Учитывая доказанное выше обратное включение, получаем требуемое равенство.

Предложение доказано.

***Следствие* 2.** *Обертывающая группа $T^*$ централизатора $\langle T = C_A(B),\ [\,]\rangle$ $n$-арной подгруппы $\langle B, [\,]\rangle$ в $n$-арной группе $\langle A, [\,]\rangle$ изоморфна централизатору подгруппы $B^*(A)$ в обертывающей группе $A^* : T^* \simeq C_{A^*}(B^*(A))$.*

Если $B = A$, то $C_A(A) = Z(A)$, $B^*(A) = A^*$, $C_{A^*}B^*(A) = Z(A^*)$. Поэтому из предложения 2 вытекает такое следствие.

***Следствие* 3.** *Если $\langle T = Z(A),\ [\,]\rangle$ — центр $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, то $T^*(A)$ совпадает с центром $Z(A^*)$ группы $A^* : T^*(A) = Z(A^*)$.*

***Следствие* 4.** *Обертывающая группа $T^*$ центра $\langle T = Z(A),\ [\,]\rangle$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ изоморфна центру группы $Z(A^*)$ обертывающей группы $A^*$: $T(A^*) \simeq Z(A^*)$.*

**Определение 1.** *Полуцентром $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется множество*

$$HZ(A) = \left\{ z \in A \,\middle|\, \left[z x_1^{n-2}\right] = \left[x x_1^{n-2} z\right] \quad \text{для всех} \quad x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A \right\}.$$

Имеет место легко проверяемая лемма.

**Лемма 8.** *Полуцентр $\langle HZ(A), [\,]\rangle$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ является ее полуабелевой полуинвариантной $n$-арной подгруппой.*

**Предложение 3.** *Пусть* $\langle T = HZ(A),\ [\ ]\rangle$ — *полуцентр* $n$-*арной группы* $\langle A, [\ ]\rangle$. *Тогда* $T_0(A)$ — *подгруппа центра* $Z(A_0)$ *группы* $A_0$.

***Доказательство.*** Пусть $u = \theta_A(z_1 \ldots z_{n-1})$ — произвольный элемент из $T_0(A)$, где $z_1, \ldots, z_{n-1} \in T$, $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{n-1})$ — произвольный элемент из $A_0$. Поскольку $z_i \in T$, то

$$uv = \theta_A(z_1 \ldots z_{n-1})\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) = \theta_A(z_1 \ldots z_{n-1}a_1 \ldots a_{n-1}) =$$

$$= \theta_A(z_1 \ldots z_{n-2}[z_{n-1}a_1 \ldots a_{n-2}a_{n-1}]) =$$

$$= \theta_A(z_1 \ldots z_{n-2}[a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-2}z_{n-1}]) =$$

$$= \theta_A(z_1 \ldots z_{n-3}[z_{n-2}a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-3}a_{n-2}]z_{n-1}) =$$

$$= \theta_A(z_1 \ldots z_{n-3}[a_{n-2}a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-3}z_{n-2}]z_{n-1}) = \ldots$$

$$\ldots = \theta_A([z_1a_2 \ldots a_{n-1}a_1]z_2 \ldots z_{n-1}) =$$

$$= \theta_A([a_1a_2 \ldots a_{n-1}z_1]z_2 \ldots z_{n-1}) =$$

$$= \theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}z_1 \ldots z_{n-1}) = \theta_A(a_1 \ldots a_{n-1})\theta_A(z_1 \ldots z_{n-1}) = vu,$$

т. е. $uv = vu$. Следовательно, $u \in Z(A_0)$ и доказано включение $T_0(A) \subseteq Z(A_0)$. Осталось воспользоваться замечанием 2.2.20 [7], согласно которому $T_0(A)$ — подгруппа в $A_0$.

Предложение доказано.

**3. $n$-Арные аналоги коммутанта группы.** Определенные ниже коммутант и полукоммутант $n$-арной группы являются частными случаями $\mathfrak{F}$-корадикальной конгруэнции [2] в случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом соответственно всех абелевых и полуабелевых $n$-арных групп.

**Определение 2.** *Конгруэнция* $\pi$ $n$-*арной группы* $\langle A, [\ ]\rangle$ *называется ее коммутантом* (*полукоммутантом*), *если*:

1) $n$-*арная группа* $\langle A/\pi,\ [\ ]\rangle$ — *абелева* (*полуабелева*);

2) $\pi \subseteq \sigma$ *для любой такой конгруэнции* $\sigma$ $n$-*арной группы* $\langle A, [\ ]\rangle$, *что* $n$-*арная группа* $\langle A/\sigma, [\ ]\rangle$ — *абелева* (*полуабелева*).

Такой выбор $n$-арного аналога коммутанта группы объясняется рядом причин. Если определить коммутант $n$-арной группы как ее наименьшую инвариантную подалгебру, фактор-алгебра по которой абелева, то в абелевой $n$-арной группе, имеющей несколько единиц, все одноэлементные подалгебры, образованные единицами, будут коммутантами, т. е. в этом случае коммутант определяется неоднозначно. Кроме того, так как пересечение одноэлементных подалгебр пусто, то в такой $n$-арной группе пересечение подалгебр, фактор-алгебры по которым абелевы, может быть пустым.

Еще одна несогласованность с бинарным случаем возникает при рассмотрении найденных Постом [6] конечных циклических $n$-арных групп, в которых нет собственных, в том числе и одноэлементных $n$-арных подгрупп. В таких абелевых $n$-арных группах коммутант совпадает с самой $n$-арной группой.

Коммутант $n$-арной группы при $n > 2$ нельзя определить и как подалгебру, порожденную всеми ее коммутаторами, которые, как известно, имеют длину, кратную $n - 1$ [6], и по этой причине не являются элементами $n$-арной группы.

Невозможность определения коммутанта $n$-арной группы как ее подалгебры вынудила Поста пойти на полумеры: рассматривать в качестве коммутанта $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ коммутант $A^{*\prime}$ ее обертывающей группы $A^*$. Определить коммутант $n$-арной группы как некоторую ее конгруэнцию он не мог, так как в тридцатые годы прошлого века, когда Пост писал свою работу по $n$-арным группам [6], еще только формулировались основные определения теории универсальных алгебр, а сама она находилась в зачаточном состоянии.

Коммутант $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ будем обозначать стандартным символом $A'$, а ее полукоммутант — символом $A^{\perp}$.

**Лемма 9** [10]. *Пусть $\langle A, [\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\rho$ — ее конгруэнция,*

$$A(\rho) = \{\theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2}) \mid (x, y) \in \rho\},$$

*где $y_1 \ldots y_{n-2}$ — обратная последовательность для элемента $y$. Тогда $A(\rho)$ — инвариантная подгруппа группы $A^*$, $A(\rho) \subseteq A_0$.*

**Лемма 10** [10]. *Пусть $B$ — инвариантная подгруппа группы $A^*$, $B \subseteq A_0$. Тогда множество*

$$\Sigma(B) = \Big\{(x, y) \mid x, y \in A,\ \theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2}) \in B\Big\},$$

*где $y_1 \ldots y_{n-2}$ — обратная последовательность для $y$, является конгруэнцией на $n$-арной группе $\langle A, [\,]\rangle$.*

**Лемма 11.** *Пусть $\langle A, [\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\rho$ — ее конгруэнция, $B$ — инвариантная подгруппа группы $A^*$, $B \subseteq A_0$. Тогда*:

1) $\Sigma(A(\rho)) = \rho$;

2) $A(\Sigma(B)) = B$.

***Доказательство.*** 1. Согласно определению (лемма 10)

$$\Sigma(A(\rho)) = \Big\{(x, y) \,\Big|\, x, y \in A,\ \theta_A\Big(x\bar{y}\underbrace{y \ldots y}_{n-3}\Big) \in A(\rho)\Big\}.$$

Если $(b, c) \in \rho$, то $\theta_A\Big(b\bar{c}\underbrace{c \ldots c}_{n-3}\Big) \in A(\rho)$. Поэтому $(b, c) \in \Sigma(A(\rho))$, т. е. $\rho \subseteq \subseteq \Sigma(A(\rho))$.

Пусть теперь $(x, y) \in \Sigma(A(\rho))$, т. е. $\theta_A\Big(x\bar{y}\underbrace{y \ldots y}_{n-3}\Big) \in A(\rho)$, откуда

$$\theta_A\Big(x\bar{y}\underbrace{y \ldots y}_{n-3}\Big) = \theta_A\Big(b\bar{c}\underbrace{c \ldots c}_{n-3}\Big)$$

для некоторой пары $(b, c) \in \rho$. Из последнего равенства следует

$$\Big[x\bar{y}\underbrace{y \ldots y}_{n-3}a\Big] = \Big[b\bar{c}\underbrace{c \ldots c}_{n-3}a\Big]$$

для любого $a \in A$, откуда, применяя лемму 8.14 [3], получаем $(x, y) \in \rho$. Следовательно, $\Sigma(A(\rho)) \subseteq \rho$. Из доказанных включений следует требуемое равенство.

2. Если $u = \theta_A(x_1y_1 \ldots y_{n-2}) \in B$, то $(x, y) \in \Sigma(B)$, где $y$ — обратный элемент для последовательности $y_1 \ldots y_{n-2}$. А так как согласно определению (лемма 9)

$$A(\Sigma(B)) = \left\{\theta_A(xy_1\ldots y_{n-2}) \,\Big|\, (x,y)\in\Sigma(B)\right\},$$

то $u\in A(\Sigma(B))$. Следовательно, $B\subseteq A(\Sigma(B))$.

Пусть теперь $v\in A(\Sigma(B))$, т. е. $v=\theta_A\Big(x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\Big)$, $(x,y)\in\Sigma(B)$, откуда $v\in B$. Следовательно, $A(\Sigma(B))\subseteq B$. Из доказанных включений вытекает требуемое равенство.

Лемма доказана.

**Лемма 12.** *Если $\rho$ и $\sigma$ — конгруэнции $n$-арной группы $\langle A,[\,]\rangle$, то $\rho\subseteq\sigma$ тогда и только тогда, когда $A(\rho)\subseteq A(\sigma)$.*

***Доказательство.*** Если $\rho\subseteq\sigma$, то включение $A(\rho)\subseteq A(\sigma)$ очевидно.

Пусть теперь $A(\rho)\subseteq A(\sigma)$. Если $(b,c)\in\rho$, то

$$\theta_A\Big(b\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-3}\Big)\in A(\rho)\subseteq A(\sigma),$$

откуда $\theta_A\Big(b\,\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-3}\Big)=\theta_A\Big(x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\Big)$ для некоторой пары $(x,y)\in\rho$. Из последнего равенства вытекает $b=\Big[x\,\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}c\Big]$. Поскольку

$$(x,y)\in\sigma,(\bar{y},\bar{y})\in\sigma,\quad (y,y)\in\sigma,\quad (c,c)\in\sigma,$$

то

$$\left(\Big[x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}c\Big],\ \Big[y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}c\Big]\right)\in\sigma,$$

откуда $(b,c)\in\sigma$. Следовательно, $\rho\subseteq\sigma$.

Лемма доказана.

Справедливость следующих двух лемм устанавливается простой проверкой.

**Лемма 13.** *Если $\langle A,[\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\rho$ — ее конгруэнция, то группы $A^*/A(\rho)$ и $(A/\rho)^*$ изоморфны.*

**Лемма 14.** *Если $\langle A,[\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\rho$ — ее конгруэнция, то группы $A_0/A(\rho)$ и $(A/\rho)_0$ изоморфны.*

**Предложение 4.** *В любой $n$-арной группе $\langle A,[\,]\rangle$ существует ее коммутант $A'$ и верны равенства $A(A')=A^{*\prime}$, $A'=\Sigma(A^{*\prime})$.*

***Доказательство.*** Если $\theta_A(a)$ и $\theta_A(b)$ — произвольные элементы из $A^*$, то их коммутатор $\theta_A(\alpha)\theta_A(\beta)\theta_A^{-1}(\alpha)\theta_A^{-1}(\beta)$ является элементом группы $A_0$. Поэтому коммутант $A^{*\prime}$ группы $A^*$, как подгруппа, порожденная множеством всех коммутаторов, является подгруппой в $A_0$. А так как, кроме того, $A^{*\prime}$ инвариантна в $A^*$, то согласно лемме 10 существует конгруэнция $\rho$ $n$-арной группы $\langle A,[\,]\rangle$, для которой, согласно утверждению 2 леммы 11, $A(\rho)=A^{*\prime}$.

Покажем, что $\rho$ совпадает с коммутантом $A'$.

Поскольку $A^*/A(\rho)=A^*/A^{*\prime}$ — абелева группа, в силу леммы 13 $(A/\rho)^*$ — также абелева группа. Тогда согласно критерию Поста $\langle A/\rho,\ [\,]\rangle$ — абелева $n$-арная группа.

Пусть теперь $\langle A/\sigma, [\,]\rangle$ — абелева $n$-арная группа для некоторой конгруэнции $\sigma$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$. Тогда по критерию Поста $(A/\sigma)^*$ — абелева группа, и, снова применяя лемму 13, видим, что $A^*/A(\sigma)$ — абелева группа, откуда $A(\rho) = A^{*\prime} \subseteq A(\sigma)$. Из $A(\rho) \subseteq A(\sigma)$, применяя лемму 12, получаем $\rho \subseteq \sigma$.

Таким образом, $\langle A/\rho, [\,]\rangle$ — абелева $n$-арная группа и $\rho \subseteq \sigma$ для любой такой конгруэнции $\sigma$ $n$-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, что $n$-арная группа $\langle A/\sigma, [\,]\rangle$ — абелева. Следовательно, $\rho = A'$ и верно равенство $A(A') = A^{*\prime}$. Из последнего равенства следует $\Sigma(A(A')) = \Sigma(A^{*\prime})$, откуда и из утверждения 1 леммы 11 вытекает $A' = \Sigma(A^{*\prime})$.

Предложение доказано.

Следующее предложение доказывается аналогично предыдущему. При этом коммутант $A'$ заменяется полукоммутантом $A^{\perp}$, абелевость — полуабелевостью, а лемма 13 — леммой 14.

**Предложение 5.** *В любой $n$-арной группе $\langle A, [\,]\rangle$ существует ее полукоммутант $A^{\perp}$ и верны равенства $A(A^{\perp}) = A'_0$, $A^{\perp} = \Sigma(A'_0)$.*

**4. $n$-Арные аналоги теоремы Шура.** Доказанные в этом пункте теоремы 1 и 2 являются $n$-арными аналогами теоремы Шура [1] о конечности коммутанта группы, центр которой имеет в ней конечный индекс.

**Лемма 15.** *Пусть $\langle A, [\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\rho$ — ее конгруэнция, $y \in A$, $y_1 \ldots y_{n-2}$ — обратная последовательность для $y$. Тогда отображение $\varphi : x \to \theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2})$ является биекцией смежного класса $\rho(y)$ на группу $A(\rho)$.*

***Доказательство.*** Поскольку $x \in \rho(y)$, то из $(x, y) \in \rho$ следует

$$\varphi(x) = \theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2}) \in A(\rho).$$

Если $\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1})$ — произвольный элемент из $A(\rho)$, то

$$\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}) = \theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2})$$

для некоторого $x \in A$. Из $\theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2}) \in A(\rho)$ следует $(x, y) \in \rho$, т. е. $x \in \rho(y)$. Следовательно, $\varphi(x) = \theta_A(x_1 \ldots x_{n-1})$ и $\varphi$ — сюръекция.

Если $\varphi(x) = \varphi(z)$, то $\theta_A(xy_1 \ldots y_{n-2}) = \theta_A(zy_1 \ldots y_{n-2})$, откуда $x = z$ и, значит, $\varphi$ — инъекция. Таким образом, доказано, что $\varphi$ — биекция.

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Если центр $n$-арной группы имеет в ней конечный индекс, то ее коммутант конечен.*

***Доказательство.*** Пусть $\langle A, [\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\langle Z, [\,]\rangle$ и $A'$ — ее центр и коммутант соответственно. Согласно следствию 3 $Z^*(A) = Z(A^*)$, а в силу следствия 1 индекс $\langle Z, [\,]\rangle$ в $\langle A, [\,]\rangle$ совпадает с индексом $Z^*(A)$ в $A^*$. Поэтому индекс центра $Z(A^*)$ группы $A^*$ конечен в ней.

Тогда согласно теореме Шура коммутант $A^{*\prime}$ группы $A^*$ конечен, откуда, в силу предложения 4, следует конечность группы $A(A')$. Применяя теперь лемму 15, получаем конечность классов конгруэнции $A'$, а значит, и конечность самого коммутанта.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если полуцентр $n$-арной группы имеет в ней конечный индекс, то ее полукоммутант конечен.*

***Доказательство.*** Пусть $\langle A, [\,]\rangle$ — $n$-арная группа, $\langle T = HZ(A),\ [\,]\rangle$ и $A^{\perp}$ — ее полуцентр и полукоммутант соответственно. В силу предложения 3 $T_0(A)$ — подгруппа центра $Z(A_0)$ группы $A_0$, а согласно следствию 1 индекс $\langle T, [\,]\rangle$ в $\langle A, [\,]\rangle$ совпадает с индексом $T_0(A)$ в $A_0$. Отсюда следует конечность индекса $T_0(A)$ в $A_0$. А так как $T_0(A) \subseteq Z(A_0)$, то $Z(A_0)$ также имеет в $A_0$ конечный индекс.

Тогда в силу теоремы Шура коммутант $A_0'$ группы $A_0$ конечен, откуда, учитывая предложение 5, получаем конечность группы $A(A^{\perp})$. Применяя теперь лемму 15, убеждаемся в конечности классов конгруэнции $A^{\perp}$, а значит, и конечности самого полукоммутанта.

Теорема доказана.


1. *Huppert B.* Endliche Gruppen, 1. – Berlin: Springer, 1967. – 798 S.
2. *Шеметков Л. А.* О произведении формаций алгебраических систем // Алгебра и логика. – 1984. – **23**, № 6. – С. 721 – 729.
3. *Гальмак А. М.* Конгруэнции полиадических групп. – Минск: Белар. Навука, 1999. – 182 с.
4. *Гальмак А. М.* $n$-Арные аналоги холловских подгрупп // Весн. МДУ ім. А. А. Куляшова. – 2001. – **2**. – С. 117 – 123.
5. *Dörnte W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. – 1928. – **29**. – S. 1 – 19.
6. *Post E. L.* Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – **48**, № 2. – P. 208 – 350.
7. *Гальмак А. М.* $n$-Арные группы. – Гомель, 2003. – 196 с.
8. *Русаков С. А.* Алгебраические $n$-арные системы. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
9. *Тютин В. И.* $n$-Арные группы с $f$-центральными рядами // Вопросы алгебры. – 1987. – **3**. – С. 97 – 116.
10. *Щучкин Н. А.* Разрешимые и нильпотентные $n$-группы // Алгебраические системы. – Волгоград, 1989. – С. 133 – 139.


Получено 05.10.2004