УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ДУАЛЬНЫЕ К ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ГАУССА

We formulate and solve extremal problems of the theory of potentials which are dual to the Gauss variational problem, but in contrast to the last one, are always solvable. Statements on compactness of the classes of their solutions and continuity of extremals are also established.

Знайдено постановки та розв'язано екстремальні задачі теорії потенціалу, які є дуальними до варіаційної задачі Гаусса, але, на відміну від останньої, завжди розв'язні. Встановлено також твердження про компактність класів розв'язків та неперервність екстремалей.

Введение. Настоящая работа посвящена экстремальным задачам линейной теории потенциала в локально компактном отделимом пространстве $\mathbf{X}$. Необходимые сведения из теории мер и интегрирования содержатся в [1, 2] (см. также краткие обзоры в [3, 4]).

Под *ядром* κ на $\mathbf{X}$ будем понимать полунепрерывную снизу функцию

$$\kappa : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to (-\infty, \infty].$$

Следуя [3], предполагаем, что в случае некомпактного $\mathbf{X}$ ядро κ неотрицательно.

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ — линейное пространство всех вещественнозначных мер Радона на $\mathbf{X}$, снабженное топологией *широкой* сходимости [1]. *Энергия* и *потенциал* меры $\nu \in \mathfrak{M}$ относительно ядра κ определяются соответственно равенствами [3]

$$\kappa(\nu, \nu) := \int \kappa(x, y)\, d(\nu \otimes \nu)(x, y)$$

и

$$\kappa_\nu(x) := \kappa(x, \nu) := \int \kappa(x, y)\, d\nu(y), \quad x \in \mathbf{X}$$

(конечно, если соответствующий интеграл определен как конечное число или $\pm\infty$). Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\kappa(\mathbf{X})$ множество всех $\nu \in \mathfrak{M}$ с $-\infty < \kappa(\nu, \nu) < \infty$.

В последние десятилетия резко возрос интерес к задаче о минимуме энергии при наличии внешних полей, известной под названием *вариационной задачи Гаусса* (см., например, [5–12]). Речь идет о минимизации выражения

$$\mathcal{F}_f(\nu) := \kappa(\nu, \nu) - 2 \int f\, d\nu,$$

где f — вещественнозначная универсально измеримая функция с областью определения в $\mathbf{X}$, а ν пробегает заданное подмножество из $\mathcal{E}$. Интерес к этой задаче обусловлен как ее очевидными физическими интерпретациями, так и многочисленными существенными приложениями к задачам математической физики, теории потенциала и конструктивной теории функций (см., например, [6] и приведенную в ней библиографию).

Однако в недавних работах автора [7, 10, 12] было показано, что вариационная задача Гаусса, вообще говоря, *неразрешима*, причем этот феномен проявляется не в каких-то экзотических случаях, а при простых и естественных условиях на параметры задачи (в частности, для классических ядер в евклидовых пространствах).

В настоящей работе при весьма общих предположениях найдены постановки и решения экстремальных задач, *дуальных* к вариационной задаче Гаусса (в том смысле, что соответствующие экстремальные характеристики совпадают), но, в отличие от последней, уже *всегда разрешимых*.

Пусть для заданного множества $Q \subset \mathbf{X}$ $\mathfrak{M}^+(Q)$ обозначает класс всех мер $\nu \geqslant 0$, сосредоточенных на Q. Обозначим $\mathcal{E}^+(Q) := \mathfrak{M}^+(Q) \cap \mathcal{E}$. В случае $Q = \mathbf{X}$ указание на множество Q в этих обозначениях будем опускать.

Обозначим через $S(\,\cdot\,)$ носитель меры или функции. Если $\mathbf{Y}$ — топологическое пространство, то пусть $\mathbf{C}_0(\mathbf{Y})$ обозначает класс всех непрерывных вещественнозначных функций на $\mathbf{Y}$ с компактным носителем, а $\Phi(\mathbf{Y})$ — класс всех полунепрерывных снизу функций ψ на $\mathbf{Y}$ таких, что либо $\psi \geqslant 0$, либо $S(\psi)$ компактно.

1. Предварительные сведения: топологии, согласованные ядра, теорема о полноте. Всюду в настоящей работе будем считать ядро κ *положительно определенным*. Это, напомним, означает, что κ симметрично (т. е. $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всех x, y) и энергия $\kappa(\nu, \nu)$, $\nu \in \mathfrak{M}$, неотрицательна, если только определена. Тогда множество $\mathcal{E}$ образует предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\kappa(\nu_1, \nu_2) := \int \kappa(x, y)\, d(\nu_1 \otimes \nu_2)(x, y)$$

и полунормой $\|\nu\| := \sqrt{\kappa(\nu, \nu)}$ (см., например, [3]). Топология на $\mathcal{E}$, задаваемая полунормой $\|\cdot\|$, называется *сильной*.

(Положительно определенное) ядро κ называется *строго положительно определенным*, если полунорма $\|\cdot\|$ удовлетворяет аксиомам нормы. Меры ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{E}$ называются *эквивалентными* (в $\mathcal{E}$), если $\|\nu_1 - \nu_2\| = 0$.

Наряду с сильной топологией часто используется так называемая *$\mathcal{E}$-слабая* топология на $\mathcal{E}$, задаваемая системой полунорм

$$\mu \to |\kappa(\mu, \nu)|, \quad \nu \in \mathcal{E}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского $|\kappa(\mu, \nu)| \leqslant \|\mu\|\,\|\nu\|$, μ, $\nu \in \mathcal{E}$, очевидно следует, что сильная топология на $\mathcal{E}$ *сильнее* $\mathcal{E}$-слабой.

Многие экстремальные задачи на классах *неотрицательных* мер удается решить для так называемых *согласованных* ядер, введенных в 1960 г. Фугледе. Это, по определению, ядра, для которых сильная и широкая топологии на $\mathcal{E}^+$ (индуцированные соответственно из $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{M}$) удовлетворяют следующему условию согласованности [3]:

(C) *Каждая сильно фундаментальная направленность*[1] *в $\mathcal{E}^+$ сильно сходится к каждой своей широкой предельной точке.*

С другой стороны, недавно автором (см. [11]) была показана эффективность применения концепции согласованных ядер в экстремальных задачах на классах *знакопеременных* мер, что обеспечивается следующей теоремой о полноте.

Пусть E^+ и E^- — непустые непересекающиеся замкнутые множества в $\mathbf{X}$, а (E^+, E^-) — их упорядоченная пара (часто называемая *конденсатором*). Через $\mathcal{E}_q(E^+, E^-)$, где $q \in (0, \infty)$, обозначим совокупность всех мер $\nu = \nu^+ - \nu^-$ таких, что

[1] Необходимость рассмотрения *направленностей* [2, 13] или *фильтров* [14], а не последовательностей, обусловлена тем, что широкая топология в $\mathfrak{M}$, вообще говоря, не удовлетворяет первой аксиоме счетности (см., например, [3]).

$$\nu^+ \in \mathcal{E}^+(E^+), \qquad \nu^- \in \mathcal{E}^+(E^-), \qquad (\nu^+ + \nu^-)(\mathbf{X}) \leqslant q.$$

Тогда $\mathcal{E}_q(E^+, E^-)$ — полуметрическое пространство с (индуцированной из $\mathcal{E}$) полуметрикой $\rho(\nu_1, \nu_2) := \|\nu_1 - \nu_2\|$.

Теорема 1 [11]. *Пусть ядро κ согласованно и ограничено сверху на $E^+ \times E^-$. Тогда полуметрическое пространство $\mathcal{E}_q(E^+, E^-)$ полно*[2]*, причем каждая сильная направленность Коши в $\mathcal{E}_q(E^+, E^-)$ сильно сходится к каждой своей широкой предельной точке.*

***Замечание* 1.** Важно отметить, что условие согласованности (C) *эквивалентно* (см. [16]) следующему условию:

(CW) *Каждая сильно ограниченная и широко сходящаяся направленность в $\mathcal{E}^+$ $\mathcal{E}$-слабо сходится к своему широкому пределу.*

***Замечание* 2.** В условиях теоремы 1 каждая широкая предельная точка фигурирующей в ее формулировке направленности автоматически имеет конечную энергию (и поэтому утверждение о сходимости в топологии пространства $\mathcal{E}$ корректно). Аналогичное замечание справедливо применительно к условиям (C) и (CW).

Внутреннюю емкость множества в $\mathbf{X}$ относительно ядра κ (см. [3]) обозначим через $C(\,\cdot\,)$. Говорят, что утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку $x \in \in \mathbf{X}$, справедливо *приблизительно всюду* (пр. вс.) в Q, если $C(N) = 0$, где N — множество всех тех $x \in Q$, для которых $R(x)$ ложно.

2. Обозначения, определения. Пусть $m,\ p \in \mathbb{N}$, где $m \leqslant p$, фиксированы. Обозначим

$$I := \{1, \ldots, p\}, \qquad I^+ := \{1, \ldots, m\}, \qquad I^- := I \setminus I^+,$$

$$\alpha_i := \begin{cases} +1, & \text{если} \quad i \in I^+, \\ -1, & \text{если} \quad i \in I^-. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(m, p)$ обозначает множество в $\mathfrak{M}$, состоящее из всех *линейных комбинаций* вида

$$\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i\, \mu^i, \quad \text{где} \quad \mu^i \geqslant 0.$$

Два элемента из $\mathfrak{N}$, μ_1 и μ_2, будем считать *тождественными* в том и только в том случае, когда они равны покоординатно:

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \Longleftrightarrow \mu_1^i = \mu_2^i \quad \forall\, i \in I;$$

нетождественные элементы из $\mathfrak{N}$ будем считать *различными*. Тогда, очевидно, следующее соответствие взаимно однозначно:

$$\mathfrak{N} \ni \mu \mapsto (\mu^i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+.$$

Отметим, что так определенное отношение тождества на $\mathfrak{N}$ *сильнее*, чем обычное отношение равенства, унаследованное из $\mathfrak{M}$. (Для обозначения последнего сохраним символ $=$.)

[2] Напомним, что согласно известному контрпримеру Картана [15] все предгильбертово пространство $\mathcal{E}$ *не полно* в сильной топологии даже в классическом случае ядра Ньютона $|x-y|^{2-n}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ — упорядоченная совокупность непустых множеств $A_i \subset \mathbf{X}$, $i \in I$, удовлетворяющих условию

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \varnothing \quad \forall\, i \in I^+, \quad j \in I^-.$$

Обозначим

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}) := \Big\{ \mu \in \mathfrak{N} : \ \mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i) \quad \forall\, i \in I \Big\}, \qquad \mathcal{E}(\mathcal{A}) := \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}.$$

Отметим, что унаследованное из $\mathfrak{N}$ отношение тождества на $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ или $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ эквивалентно обычному отношению равенства мер в том и только в том случае, когда множества A_i, $i \in I$, попарно дизъюнктны.

Всюду далее S обозначает *направленное множество* [13].

Для данного $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ обозначим $\overline{\mathcal{A}} := (\,\overline{A_i}\,)_{i\in I}$. Будем говорить, что направленность $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\,\overline{\mathcal{A}}\,)$ сходится к $\mu \in \mathfrak{M}(\,\overline{\mathcal{A}}\,)$ $\mathcal{A}$-*широко*, если

$$\mu_s^i \to \mu^i \quad \text{широко}, \quad i \in I.$$

Соответствующую $\mathcal{A}$-широкой сходимости топологию в $\mathfrak{M}(\,\overline{\mathcal{A}}\,)$ назовем $\mathcal{A}$-*широкой*.

Очевидно, $\mathcal{A}$-широкая топология *сильнее* сужения широкой топологии на $\mathfrak{M}(\,\overline{\mathcal{A}}\,)$; они равносильны в том и только в том случае, когда $\overline{A_i}$, $i \in I$, попарно дизъюнктны.

3. Вариационная задача Гаусса. Зафиксировав $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$, обозначим

$$A := \bigcup_{i\in I} A_i, \qquad A^+ := \bigcup_{i\in I^+} A_i, \qquad A^- := \bigcup_{i\in I^-} A_i.$$

Тогда, очевидно, $A = A^+ \cup A^-$, причем $\overline{A^+} \cap \overline{A^-} = \varnothing$.

Пусть, далее, $a = (a_i)_{i\in I}$ — числовой вектор с $a_i > 0$, $i \in I$, а $g : \overline{A} \to (0, \infty)$ — непрерывная функция. Для данных κ, $\mathcal{A}$, a, g и f (см. введение) рассмотрим классы мер

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g) := \Big\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) : \quad \int g\, d\mu^i = a_i \quad \forall\, i \in I \Big\},$$

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g) := \Big\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g) : \ \int f\, d\mu \quad \text{определен} \Big\}$$

и обозначим

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) := \inf_{\mu\in\mathcal{E}_f(\mathcal{A},a,g)} \ \mathcal{F}_f(\mu).$$

(Инфимум над пустым множеством, как обычно, полагаем равным $+\infty$.)

Всюду далее под вариационной задачей Гаусса будем понимать задачу минимизации $\mathcal{F}_f(\mu)$ в классе $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$; назовем ее также $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-*задачей.* $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача называется *разрешимой*, если существуют *минимизирующие* меры λ:

$$\lambda \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g), \qquad \mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Класс всех таких λ обозначим через $\mathcal{F}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$.

В работах [7, 10, 12] при весьма общих предположениях на κ, g и f найдены условия на $\mathcal{A}$ и a, *необходимые* и (или) *достаточные* для разрешимости

$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. В частности, доказано, что если множества A_i, $i \in I$, замкнуты и имеют конечную внутреннюю емкость, то (при достаточно общих предположениях на другие параметры задачи) $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима для любого вектора a. И наоборот, если $C(A_j) = \infty$ для некоторого $j \in I$, то $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача не разрешима для всех $a = (a_i)_{i \in I}$ с $a_j \geqslant \Lambda$, где Λ — достаточное большое число. *Полное описание* множества всех векторов a, для которых (при фиксированных κ, $\mathcal{A}$, g и f) $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача не разрешима, дано в [12].

***Замечание* 3.** Указанный феномен неразрешимости $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи неожиданно проявляется (см. [17–21]) даже в простейшем случае, когда $\mathbf{X}$ — евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, I^+ и I^- — одноточечные индексные множества, $a_1 = a_2 = 1$, $f = 0$, $g = 1$, а $\kappa(x, y)$ — ядро Ньютона $|x - y|^{2-n}$, Рисса $|x - y|^{\alpha - n}$, $0 < \alpha < n$, или Грина G_D (здесь $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а G_D — его обобщенная функция Грина). Отметим, что соответствующая этому случаю $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача является основной минимум-проблемой теории ньютоновых, риссовых или гриновых емкостей пространственных конденсаторов, построенной автором в [17–21] (см. также [4, 22]).

Пусть $\mathcal{E}_f^0(\mathcal{A}, a, g)$ обозначает класс всех $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ таких, что для каждого $i \in I$ носитель $S(\mu^i)$ компактен и содержится в A_i. Через $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ обозначим множество всех направленностей $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}_f^0(\mathcal{A}, a, g)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{s \in S} \mathcal{F}_f(\mu_s) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g), \tag{1}$$

а через $\mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ и $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, g, f)$ — совокупность всех сильных и, соответственно, $\mathcal{A}$-широких предельных точек всех $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.

4. Экстремальные задачи, дуальные к вариационной задаче Гаусса. Сформулируем основные результаты настоящей работы.

4.1. Для каждого $\mu \in \mathfrak{N}$ (см. п. 2) обозначим

$$\Psi^i(x, \mu) := \Psi^i_{f,\,g}(x, \mu) := \alpha_i \left[a_i \, \frac{\kappa(x, \mu) - f(x)}{g(x)} - \int f \, d\mu^i \right], \quad x \in \mathbf{X}, \quad i \in I, \tag{2}$$

если, конечно, выражение в скобках определено.

Пусть $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ обозначает класс всех $\mu \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{E}$, для каждого из которых существуют $b_i(\mu) \in \mathbb{R}$, $i \in I$, удовлетворяющие условиям

$$\Psi^i(x, \mu) \geqslant b_i(\mu) \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$\sum_{i \in I} b_i(\mu) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{4}$$

Используя универсальную измеримость функций $\Psi^i(\,\cdot\,, \mu)$ и свойство полуаддитивности внутренней емкости множеств (см. лемму 2.3.5 из [3] и следующие за ней следствие и замечание), можно доказать, что множество $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ *выпуклое*.

Обозначим

$$\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g) := \inf_{\mu \in \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)} \mathcal{F}_f(\mu).$$

Вариационную задачу о существовании и единственности меры ω со свойствами

$$\omega \in \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g), \qquad \mathcal{F}_f(\omega) = \mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$$

назовем $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-*задачей*. Класс всех таких ω обозначим через $\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$.

Всюду далее будем предполагать выполненным (хотя бы) один из следующих случаев:

$$f = \kappa_\chi, \quad \text{где} \quad \chi \in \mathcal{E}, \tag{5}$$

или

$$f\Big|_{\overline{A_i}} \in \mathbf{C}_0(\,\overline{A_i}\,), \quad i \in I. \tag{6}$$

Кроме того, предполагаем, что ядро κ согласованно и либо

$$m = p \quad \big(\text{т. е.} \;\; I^- = \varnothing\big),$$

либо выполняется совокупность следующих условий:

$$g_{\min} := \inf_{x \in A} \; g(x) > 0, \tag{7}$$

$$\sup_{x \in A^+, \; y \in A^-} \kappa(x, y) < \infty. \tag{8}$$

Теоремы 2 и 3 показывают, что в принятых условиях $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача *дуальна* к $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче, но, в отличие от последней, уже *всегда разрешима*.

Теорема 2. *Справедливо тождество*

$$\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{9}$$

В теореме 3 и следствиях 1 и 2, посвященных вопросам *разрешимости* $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи и *единственности* ее экстремалей, примем естественное условие

$$\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty. \tag{10}$$

Теорема 3. *$\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима. Более того, если $(\mu_s)_{s \in S}$ — направленность из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, то каждая мера $\gamma \in \mathfrak{M}(\,\overline{\mathcal{A}}\,)$, предельная к $(\mu_s)_{s \in S}$ в $\mathcal{A}$-широкой топологии (такие $(\mu_s)_{s \in S}$ и γ существуют), является ее решением, т. е.*

$$\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g). \tag{11}$$

Минимизирующие в $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче меры эквивалентны в $\mathcal{E}$. Другими словами,

$$\|\omega_1 - \omega_2\| = 0 \quad \forall\, \omega_1, \, \omega_2 \in \mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g). \tag{12}$$

***Следствие* 1.** *Если, дополнительно, ядро κ строго положительно определено, то*[3]

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad \forall\, \omega_1, \; \omega_2 \in \mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g).$$

***Следствие* 2.** *Множества всех решений в $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$- и $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачах связаны между собой следующим соотношением:*

$$\mathcal{F}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g) \cap \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g). \tag{13}$$

[3] При этом, вообще говоря, $\omega_1 \not\equiv \omega_2$.

4.2. В связи с теоремами 2 и 3 возникает вопрос: насколько можно сузить класс допустимых в $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче мер, максимально увязав его с $\mathcal{A}$, но не увеличив при этом экстремальную характеристику и сохранив утверждение о разрешимости? Ответ на этот вопрос дает приведенная ниже теорема (см. также следующее за ней замечание).

Введем в рассмотрение следующие классы мер:

$$\begin{gathered} \mathcal{E}(\mathcal{A}, \leqslant a, g) := \Big\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) : \quad \int g\, d\mu^i \leqslant a_i \quad \forall\, i \in I \Big\}, \\ \hat{\Gamma}_f(\mathcal{A}, a, g) := \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g) \cap \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g). \end{gathered} \tag{14}$$

Класс $\hat{\Gamma}_f(\mathcal{A}, a, g)$, будучи пересечением двух выпуклых множеств, является *выпуклым*.

Меняя в определениях $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи и экстремальной характеристики $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$ класс допустимых мер $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ на класс $\hat{\Gamma}_f(\mathcal{A}, a, g)$, получаем определения вариационной $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g)$-*задачи* и соответствующей ей экстремальной характеристики $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g)$. Пусть $\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$ обозначает класс всех минимизирующих в $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче мер $\hat{\omega}$.

Теорема 4. *Справедливы тождества*

$$\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{15}$$

Если, дополнительно, выполняется условие

$$\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty, \tag{16}$$

то класс $\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$ *не пуст, причем*

$$\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g) \cap \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g). \tag{17}$$

***Замечание* 4.** В определении (14) класса мер, допустимых в $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче, нельзя, вообще говоря, опустить знак $\leqslant$, не нарушив при этом утверждения о ее разрешимости. Это вытекает из следствия 2 ввиду того факта, что $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача, вообще говоря, не разрешима (даже для замкнутых A_i, $i \in I$).

***Замечание* 5.** Каждое из условий (10) и (16) выполняется тогда и только тогда, когда $C(A_i) > 0$ для всех $i \in I$. Это вытекает из тождества (15) и леммы 7 (см. п. 5).

***Замечание* 6.** Наконец, отметим, что $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$- и $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи разрешимы даже в случае незамкнутых A_i, $i \in I$.

4.3. Пусть выполняется условие (10) и имеет место случай (5). Тогда удается существенно уточнить теоремы 3 и 4 и, в частности, получить *полное описание* множеств $\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$ и $\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. *Классы* $\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$ *и* $\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$ *допускают представления*

$$\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g) = \mathfrak{N} \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f), \tag{18}$$

$$\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g) \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f). \tag{19}$$

(ii) *Класс* $\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g)$ *сильно и* $\mathcal{A}$-*широко* (*а поэтому и широко*) *компактен.*

(iii) *Для каждой минимизирующей в $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g)$- (аналогично, $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче) меры ω набор чисел $b_i(\omega)$, $i \in I$, удовлетворяющих условиям* (3) *и* (4) *с* $\mu \equiv \omega$, *единствен. Если ω_j, $j = 1, 2$, — две такие меры, то $b_i(\omega_j)$, $j = 1, 2$, связаны между собой соотношениями*

$$b_i(\omega_1) + \alpha_i \int f\, d\omega_1^i = b_i(\omega_2) + \alpha_i \int f\, d\omega_2^i, \quad i \in I. \tag{20}$$

4.4. Через $\{\mathcal{K}\} = \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ обозначим множество всех $\mathcal{K} = (K_i)_{i\in I}$ таких, что K_i, $i \in I$, компактны и $K_i \subset A_i$. На $\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ введем структуру частичного упорядочения отношением $\prec$, где, по определению, $\mathcal{K} \prec \mathcal{K}'$, если $K_i \subset K_i'$, $i \in I$. Здесь $\mathcal{K}' = (K_i')_{i\in I}$.

Из результатов работ [9, 10] следует, что если $\mathcal{K}$ пробегает направленное по отношению $\prec$ множество $\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$, то $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g)$, убывая, стремится к $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$:

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) \downarrow \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{21}$$

Комбинируя (21) с тождеством (15), заключаем, что аналогичное утверждение о непрерывности справедливо для каждой из характеристик $\mathcal{G}_f(\,\cdot\,, a, g)$ и $\hat{\mathcal{G}}_f(\,\cdot\,, a, g)$:

$$\mathcal{G}_f(\mathcal{K}, a, g) \downarrow \mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g), \qquad \hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{K}, a, g) \downarrow \hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A}, a, g), \quad \text{если} \quad \mathcal{K} \uparrow \mathcal{A}. \tag{22}$$

Пусть выполняется условие (16) и имеет место случай (5). Тогда утверждение (22) допускает следующее существенное усиление и уточнение.

Теорема 6. *Зафиксируем $\hat{\omega}_{\mathcal{K}} \in \hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{K}, a, g)$, где $\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'$ ($\mathcal{K}' \in \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ — достаточно большое). Тогда $\mathcal{A}$-широкое предельное множество направленности $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\succ\mathcal{K}'}$ непусто, и для каждого его элемента $\hat{\omega}_{\mathcal{A}}$ справедливы следующие соотношения:*

$$\hat{\omega}_{\mathcal{A}} \in \hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A}, a, g), \tag{23}$$

$$\hat{\omega}_{\mathcal{K}} \to \hat{\omega}_{\mathcal{A}} \quad \textit{сильно},$$

$$\mathcal{F}_f(\hat{\omega}_{\mathcal{K}}) \downarrow \mathcal{F}_f(\hat{\omega}_{\mathcal{A}}). \tag{24}$$

Кроме того, если $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_s})_{s\in S}$ — поднаправленность направленности $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\succ\mathcal{K}'}$, $\mathcal{A}$-широко сходящаяся к $\hat{\omega}_{\mathcal{A}}$, то

$$b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{A}}) = \lim_{s\in S}\, b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_s}), \quad i \in I, \tag{25}$$

где $b_i(\,\cdot\,)$, $i \in I$, — числа, однозначно определенные теоремой 5.

5. Вспомогательные утверждения. Приведенные в настоящем пункте утверждения имеют вспомогательный характер и используются при доказательстве теорем 2 – 6.

5.1. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [3]).

Лемма 1. *Если $\mathbf{Y}$ — локально компактное хаусдорфово пространство, то для каждого фиксированного $\psi \in \Phi(\mathbf{Y})$ отображение*

$$\nu \mapsto \int \psi\, d\nu, \quad \nu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{Y}),$$

полунепрерывно снизу в широкой топологии.

Лемма 2. *Множество* $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$ $\mathcal{A}$-*широко ограничено.*

Доказательство. Действительно, для доказательства этого утверждения достаточно для каждого компактного множества $K \subset \overline{A_i}$, $i \in I$, доказать неравенство

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)} \mu^i(K) < \infty, \tag{26}$$

а это очевидно вследствие непрерывности и положительности функции g и соотношений

$$a_i \geqslant \int g\, d\mu^i \geqslant \mu^i(K) \min_{x \in K} g(x), \qquad \mu \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если направленность* $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$ *сильно ограничена, то ее* $\mathcal{A}$-*широкое предельное множество непусто и содержится в* $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что в принятых условиях выполняется

$$\sup_{s \in S} \|\mu_s^i\| < \infty, \quad i \in I. \tag{27}$$

Действительно, если $m = p$, а $\kappa \geqslant 0$, то (27) непосредственно вытекает из сильной ограниченности $(\mu_s)_{s \in S}$. В противоположном случае либо имеет место совокупность условий (7) и (8), либо $m = p$, а $\mathbf{X}$ компактно (и поэтому снова выполняется (7) и (8)). Учитывая неравенства

$$\int g\, d\mu_s^i \leqslant a_i, \quad i \in I, \tag{28}$$

в силу (7) находим

$$\sup_{s \in S} \mu_s^i(\mathbf{X}) \leqslant a_i\, g_{\min}^{-1} < \infty, \quad i \in I. \tag{29}$$

Вследствие (8) и (29) взаимные энергии $\kappa(\mu_s^+, \mu_s^-)$, $s \in S$, а поэтому и энергии $\|\mu_s^+\|^2$, $\|\mu_s^-\|^2$, $s \in S$, ограничены сверху равномерно по s. Повторно используя оценку (29) и учитывая ограниченность снизу κ на $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$, отсюда выводим искомое соотношение (27).

Согласно лемме 2, направленности $(\mu_s^i)_{s \in S}$, $i \in I$, широко ограничены. Поскольку каждое широко ограниченное множество в $\mathfrak{M}$ широко относительно компактно, а $\mathfrak{M}^+(\overline{A_i})$, $i \in I$, широко замкнуты, $\mathcal{A}$-широкое предельное множество направленности $(\mu_s)_{s \in S}$ непусто. Чтобы доказать, что каждый его элемент μ принадлежит классу $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$, достаточно применить лемму 1 к $\mathbf{Y} = \overline{A_i} \times \overline{A_i}$, $\psi = \kappa\Big|_{\overline{A_i}\times\overline{A_i}}$ и $\mathbf{Y} = \overline{A_i}$, $\psi = g\Big|_{\overline{A_i}}$, воспользовавшись при этом соотношениями (27) и (28).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Каждая сильно фундаментальная направленность* $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$ *сильно сходится к каждой своей* $\mathcal{A}$-*широкой предельной точке.*

Доказательство. Поскольку сильно фундаментальная направленность сильно сходится к каждой своей сильной предельной точке, можно, не ограничивая общности доказательства, считать $(\mu_s)_{s \in S}$ сильно ограниченной.

Если $m = p$, то утверждение леммы непосредственно вытекает из условия (C).

Пусть теперь $m \neq p$; тогда выполняются соотношения (7), (8) и, следовательно, (29). Итак, $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathcal{E}_q(\overline{A^+}, \overline{A^-})$ для некоторого $q > 0$, а κ согласованно и ограничено сверху на $\overline{A^+} \times \overline{A^-}$. Применяя теорему 1, получаем требуемое.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$ сильно и $\mathcal{A}$-широко сходится к μ, то*

$$\lim_{s\in S} \kappa(\mu_s^i, \mu_s) = \kappa(\mu^i, \mu), \tag{30}$$

$$\lim_{s\in S} \int f\, d\mu_s^i = \int f\, d\mu^i, \quad i \in I. \tag{31}$$

Доказательство. Действительно, направленность $(\mu_s^i)_{s\in S}$, $i \in I$, широко сходится к μ^i и, вследствие сильной ограниченности $(\mu_s)_{s\in S}$, сильно ограничена (см. (27)). Применяя свойство (CW) (см. замечание 1), отсюда выводим

$$\mu_s^i \to \mu^i \quad \mathcal{E}\text{-слабо}, \quad i \in I. \tag{32}$$

Переходя теперь в неравенствах

$$|\kappa(\mu_s^i, \mu_s) - \kappa(\mu^i, \mu)| \leqslant |\kappa(\mu_s^i, \mu_s - \mu)| + |\kappa(\mu_s^i - \mu^i, \mu)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mu_s^i\|\, \|\mu_s - \mu\| + |\kappa(\mu_s^i - \mu^i, \mu)|, \quad i \in I,$$

к пределу по $s \in S$, вследствие (27), (32) и сильной сходимости $(\mu_s)_{s\in S}$ к μ получаем (30).

В случае (5) соотношение (31) непосредственно вытекает из (32), а в случае (6) — из широкой сходимости $(\mu_s^i)_{s\in S}$ к μ^i, $i \in I$.

Лемма 5 доказана.

5.2. Приведем теперь ряд вспомогательных утверждений, относящихся к вариационной задаче Гаусса. Прежде всего, отметим, что при условиях, оговоренных в п. 4, $\int f\, d\mu$ определен для всех $\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ и, следовательно,

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g).$$

Если, дополнительно, $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$, то имеет место представление

$$\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mu) = \|\mu\|^2 - 2\kappa(\chi, \mu) = -\|\chi\|^2 + \|\mu - \chi\|^2, \quad \mu \in \mathcal{E}. \tag{33}$$

Лемма 6. *Выполняется неравенство*

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) > -\infty. \tag{34}$$

Доказательство. Действительно, в случае (5) оценка (34) очевидна вследствие (33), а в случае (6) вытекает из соотношения (26) при $K = S\Big(f\Big|_{\overline{A_i}}\Big)$, $i \in I$.

Лемма 7. *Следующие соотношения равносильны*:

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty, \tag{35}$$

$$C(A_i) > 0 \quad \forall\, i \in I. \tag{36}$$

Доказательство. В условиях настоящей работы применима лемма 5 из [10]; согласно ее утверждению, соотношение (35) справедливо тогда и только тогда, когда

$$C\big(\big\{\,x \in A_i:\ \alpha_i\, f(x) > -\infty\,\big\}\big) > 0 \quad \forall\, i \in I. \tag{37}$$

Эквивалентность соотношений (36) и (37) в случае (6) очевидна, а в случае (5) вытекает из конечности пр. вс. в $\mathbf{X}$ потенциала κ_χ, $\chi \in \mathcal{E}$ (см. [3]).

Лемма 7 доказана.

Всюду далее в настоящем пункте предполагаем выполненным условие (35).

Из (34) и (35) на основании результатов из [10] выводим следующее утверждение.

Лемма 8. *Каждая направленность $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ сильно фундаментальна и сильно сходится к каждому $\zeta \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.*

***Следствие* 3.** *$\mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ образует класс эквивалентности в $\mathcal{E}$.*

Через $\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ обозначим класс всех $\gamma \in \mathcal{E}(\,\overline{\mathcal{A}}\,)$, для каждого из которых существует $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, сильно и $\mathcal{A}$-широко сходящаяся к γ. Очевидно,

$$\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, g, f) \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f). \tag{38}$$

Лемма 9. *Класс $\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст, причем*

$$\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f) = \mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, g, f). \tag{39}$$

Из каждой направленности из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ можно выделить поднаправленность, сходящуюся сильно и $\mathcal{A}$-широко к некоторому $\gamma \in \mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Доказательство. Из (21) вытекает, что экстремальная характеристика $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$ не изменится, если класс допустимых мер $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ сузить до класса $\mathcal{E}^0_f(\mathcal{A}, a, g)$. Другими словами,

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = \inf_{\mu \in \mathcal{E}^0_f(\mathcal{A}, a, g)} \mathcal{F}_f(\mu). \tag{40}$$

Вследствие (35) и (40) класс $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст; зафиксируем произвольно его элемент $(\mu_s)_{s\in S}$. Согласно лемме 8, направленность $(\mu_s)_{s\in S}$ сильно фундаментальна; поэтому, не ограничивая общности доказательства, будем считать ее сильно ограниченной.

Применяя к $(\mu_s)_{s\in S}$ леммы 3 и 4, находим, что существует ее $\mathcal{A}$-широкая предельная точка γ, причем

$$\gamma \in \mathcal{E}(\,\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g) \tag{41}$$

и $\mu_s \to \gamma$ сильно. Замечая, что класс $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ замкнут относительно перехода к поднаправленностям, в силу принятых определений получаем $\gamma \in \mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Поскольку эти рассуждения инварианты относительно выбора направленности из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ и ее $\mathcal{A}$-широкой предельной точки, из доказанного вытекает соотношение $\mathcal{M}'(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$. Комбинируя его с (38), получаем (39).

Лемма 9 доказана.

Учитывая соотношение (41), получаем следующее утверждение.

***Следствие* 4.** $\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \mathcal{E}(\,\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$.

Справедливы следующие утверждения; их доказательства приведены в пп. 7 и 8.

Лемма 10. *Для каждого $\gamma \in \mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ существует и единствен набор (конечных) чисел $b_i(\gamma)$, $i \in I$, удовлетворяющих соотношениям* (3) *и* (4) *с $\mu \equiv \gamma$. Если γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$, то $b_i(\gamma_1)$ и $b_i(\gamma_2)$, $i \in I$, связаны между собой равенствами*

$$b_i(\gamma_1) + \alpha_i \int f\, d\gamma_1^i = b_i(\gamma_2) + \alpha_i \int f\, d\gamma_2^i, \quad i \in I. \tag{42}$$

Лемма 11. *В случае* (5) *лемма* 10 *останется в силе, если в ее формулировке класс $\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ заменить на $\mathfrak{N} \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.*

6. Потенциалы сильных предельных точек минимизирующих направленностей. Пусть выполняется условие (35) или, что равносильно, (36). Из [11] вытекает следующее утверждение, дающее описание потенциалов мер $\xi \in \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Теорема 7. *Существует и единствен набор (конечных) чисел η_i, $i \in I$, таких, что для каждого $\xi \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ выполняется*

$$\alpha_i\, a_i\, \frac{\kappa(x, \xi) - f(x)}{g(x)} \geqslant \eta_i \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I, \tag{43}$$

$$2 \sum_{i \in I} \eta_i = \|\xi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{44}$$

Справедливо представление

$$\eta_i = \lim_{s \in S}\ \alpha_i \left[\kappa(\mu_s^i, \mu_s) - \int f\, d\mu_s^i\right], \quad i \in I, \tag{45}$$

где $(\mu_s)_{s \in S}$ — произвольная направленность из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Отметим, что в принятых условиях класс $\mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст (см. (38) и лемму 9).

7. Доказательство леммы 10. Зафиксируем $\gamma \in \mathcal{W}^0_*(\mathcal{A}, a, g, f)$. Обозначим

$$b_i(\gamma) := \eta_i - \alpha_i \int f\, d\gamma^i, \quad i \in I, \tag{46}$$

где η_i, $i \in I$, — числа, однозначно определенные теоремой 7. Вычитая из обеих частей неравенства (43), взятого при $\xi = \gamma$, величину $\alpha_i \int f\, d\gamma^i$, в силу определения (2) находим соотношения (3) с $\mu \equiv \gamma$ и только что определенными числами $b_i(\gamma)$, $i \in I$. Покажем, что эти числа удовлетворяют также соотношению (4).

Пусть $(\mu_s)_{s \in S}$ — направленность из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, сильно и $\mathcal{A}$-широко сходящаяся к γ. Тогда справедливы соотношения (30) и (31), взятые при $\mu \equiv \gamma$. Комбинируя их с (45) и (46), находим, что числа $b_i(\gamma)$, $i \in I$, определенные формулой (46), допускают представление

$$b_i(\gamma) = \alpha_i \left[\kappa(\gamma^i, \gamma) - 2 \int f\, d\gamma^i\right], \quad i \in I. \tag{47}$$

Суммируя (47) по $i \in I$, в силу (30) и (31) с $\mu \equiv \gamma$ получаем

$$\sum_{i\in I} b_i(\gamma) = \sum_{i\in I} \alpha_i \left[\kappa(\gamma^i,\gamma) - 2\int f\,d\gamma^i\right] = \mathcal{F}_f(\gamma) =$$

$$= \lim_{s\in S} \sum_{i\in I} \alpha_i \left[\kappa(\mu_s^i,\mu_s) - 2\int f\,d\mu_s^i\right] = \lim_{s\in S} \mathcal{F}_f(\mu_s),$$

что вместе с (1) доказывает соотношение (4), а также равенство

$$\mathcal{F}_f(\gamma) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{48}$$

Тем самым для каждого фиксированного $\gamma \in \mathcal{W}_*^0(\mathcal{A},a,g,f)$ доказано *существование* (конечных) чисел $b_i(\gamma)$, $i \in I$, удовлетворяющих соотношениям (3) и (4) с $\mu \equiv \gamma$. Для доказательства их *единственности* достаточно доказать тождества (42), где $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathcal{W}_*^0(\mathcal{A},a,g,f)$, а $b_i(\gamma_j)$, $i \in I$, $j = 1, 2,$ — *произвольные* (конечные) числа, удовлетворяющие соотношениям (3) и (4) с $\mu \equiv \gamma_j$.

Пользуясь соотношениями (4) и (48), взятыми соответственно при $\mu \equiv \gamma_j$ и $\gamma \equiv \gamma_j$, находим

$$2\sum_{i\in I} \left[b_i(\gamma_j) + \alpha_i \int f\,d\gamma_j^i\right] = 2\left[\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g) + \int f\,d\gamma_j\right] =$$

$$= \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g) + \mathcal{F}_f(\gamma_j) + 2\int f\,d\gamma_j = \|\gamma_j\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{49}$$

С другой стороны, вследствие (2) и (3) при $\mu \equiv \gamma_j$ имеем

$$\alpha_i\,a_i\,\frac{\kappa(x,\gamma_j) - f(x)}{g(x)} \geqslant b_i(\gamma_j) + \alpha_i \int f\,d\gamma_j^i \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I. \tag{50}$$

Сравнивая соотношения (49) и (50) соответственно с (44) и (43), в силу утверждения единственности из теоремы 7 выводим искомые тождества (42).

Лемма 10 доказана.

8. Доказательство леммы 11. Зафиксируем меры $\xi \in \mathfrak{R} \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f)$ и $\gamma \in \mathcal{W}_*^0(\mathcal{A},a,g,f)$; тогда они эквивалентны в $\mathcal{E}$. Применяя лемму 3.2.1 из [3], в силу условия (5) отсюда находим

$$\int f\,d\xi = \int f\,d\gamma \tag{51}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{F}_f(\xi) = \mathcal{F}_f(\gamma).$$

Комбинируя это равенство с (48), получаем

$$\mathcal{F}_f(\xi) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{52}$$

Обозначим

$$b_i(\xi) := \eta_i - \alpha_i \int f\,d\xi^i, \quad i \in I, \tag{53}$$

где η_i, $i \in I$, определены теоремой 7. В силу (43) числа $b_i(\xi)$, $i \in I$, удовлетворяют соотношениям (3) с $\mu \equiv \xi$. Покажем, что для них выполняется также тождество (4).

Действительно, в силу утверждения единственности из леммы 10 числа $b_i(\gamma)$, $i \in I$, фигурирующие в ее формулировке, представимы в виде (46). Суммируя равенства (46) по $i \in I$, вследствие (51) и (53) получаем

$$\sum_{i\in I} b_i(\gamma) = \sum_{i\in I} b_i(\xi),$$

что вместе с соотношением (4) при $\mu \equiv \gamma$ доказывает требуемое.

Тем самым для каждого $\xi \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ доказано существование (конечных) чисел $b_i(\xi)$, $i \in I$, удовлетворяющих соотношениям (3) и (4) с $\mu \equiv \xi$. Для завершения доказательства достаточно доказать тождества

$$b_i(\xi_1) + \alpha_i \int f\, d\xi_1^i = b_i(\xi_2) + \alpha_i \int f\, d\xi_2^i, \quad i \in I,$$

где ξ_1, $\xi_2 \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, а $b_i(\xi_j)$, $i \in I$, $j = 1, 2$, — произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям (3) и (4) с $\mu \equiv \xi_j$. А их доказательство вполне аналогично доказательству тождеств (42) (см. п. 7), но с использованием соотношения (52) при $\xi \equiv \xi_j$ вместо (48).

Лемма 11 доказана.

9. Доказательство теоремы 2. Вначале предположим, что $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = \infty$. Тогда не существует меры μ, принадлежащей классу $\Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ (поскольку в этом случае условие $b_i(\mu) \in \mathbb{R}$, $i \in I$, и соотношение (4) несовместимы), и поэтому $\mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g) = \infty$.

Теперь пусть $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty$. Тогда, согласно леммам 9 и 10, класс $\mathcal{W}_*^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст и для каждого его фиксированного элемента γ выполняется

$$\gamma \in \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{54}$$

Учитывая соотношение (48), отсюда находим

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{F}_f(\gamma) \geqslant \mathcal{G}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Следовательно, доказательство теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\mathcal{F}_f(\mu) \geqslant \mathcal{F}_f(\gamma), \tag{55}$$

где $\mu \in \Gamma_f(\mathcal{A}, a, g)$ произвольно фиксировано.

Рассмотрим направленность $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, сходящуюся к γ $\mathcal{A}$-широко и сильно (а поэтому и $\mathcal{E}$-слабо). Поскольку меры μ_s^i, $s \in S$, $i \in I$, имеют конечную энергию и компактный носитель, на основании леммы 2.3.1 из [3] заключаем, что неравенство в (3) выполняется μ_s^i-почти всюду. Умножим его на $g(x)$, а затем проинтегрируем полученное соотношение относительно μ_s^i, учитывая при этом равенства $\int g\, d\mu_s^i = a_i$, $i \in I$. В результате для каждого $s \in S$ получим

$$\alpha_i \left[\kappa(\mu_s^i, \mu) - \int f\, d\mu_s^i \right] \geqslant \alpha_i \int f\, d\mu^i + b_i(\mu), \quad i \in I.$$

Суммируя эти неравенства по $i \in I$, вследствие соотношений (4) и (48) находим

$$\kappa(\mu_s, \mu) - \int f\, d\mu_s \geqslant \int f\, d\mu + \mathcal{F}_f(\gamma), \quad s \in S. \tag{56}$$

Переходя в (56) к пределу по $s \in S$ и принимая при этом во внимание условия (5) или (6), в силу сходимости $(\mu_s)_{s\in S}$ к γ в $\mathcal{E}$-слабой и $\mathcal{A}$-широкой топологиях получаем

$$\kappa(\gamma,\mu) - \int f\,d\gamma \geqslant \int f\,d\mu + \mathcal{F}_f(\gamma).$$

С помощью элементарных преобразований это неравенство можно представить в виде

$$\mathcal{F}_f(\mu) \geqslant \|\mu-\gamma\|^2 + \mathcal{F}_f(\gamma), \tag{57}$$

откуда следует требуемое соотношение (55).

Теорема 2 доказана.

10. Доказательство теоремы 3. Пусть выполняется условие (10). Тогда, согласно тождеству (9), $\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g) < \infty$. Используя соотношения (9), (48) и (54), для каждого фиксированного γ из (непустого) класса $\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A},a,g,f)$ находим

$$\gamma \in \Gamma_f(\mathcal{A},a,g) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_f(\gamma) = \mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g).$$

Следовательно, $\mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g)$-задача разрешима, причем

$$\mathcal{W}^0_*(\mathcal{A},a,g,f) \subset \mathcal{G}^{\mathrm{sol}}_f(\mathcal{A},a,g).$$

Подставляя в левую часть этого включения соотношение (39), выводим (11).

Покажем, что минимизирующие в $\mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g)$-задаче меры ω равны между собой с точностью до слагаемого с нулевой полунормой. Действительно[4], применяя неравенство (57) к произвольному $\mu \equiv \omega \in \mathcal{G}^{\mathrm{sol}}_f(\mathcal{A},a,g)$, вследствие тождеств

$$\mathcal{F}_f(\omega) = \mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g) = \mathcal{F}_f(\gamma)$$

получаем $\|\omega-\gamma\| = 0$. Чтобы вывести отсюда требуемое соотношение (12), достаточно воспользоваться неравенством треугольника в $\mathcal{E}$.

Теорема 3 доказана.

11. Доказательство следствия 2. Утверждение следует из определений классов $\mathcal{F}^{\mathrm{sol}}_f(\mathcal{A},a,g)$ и $\mathcal{G}^{\mathrm{sol}}_f(\mathcal{A},a,g)$, теоремы 2 и включения

$$\mathcal{F}^{\mathrm{sol}}_f(\mathcal{A},a,g) \subset \Gamma_f(\mathcal{A},a,g),$$

которое, в свою очередь, вытекает из теоремы 1 работы [9].

12. Доказательство теоремы 4. Поскольку $\hat{\Gamma}_f(\mathcal{A},a,g) \subset \Gamma_f(\mathcal{A},a,g)$, имеем

$$\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A},a,g) \geqslant \mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{58}$$

При доказательстве обратного неравенства можно предположить выполненным условие (10). Тогда применимы теорема 3 и, вследствие (9), лемма 9 и следствие 4. Из этих утверждений вытекает, что класс $\mathcal{G}^{\mathrm{sol}}_f(\mathcal{A},a,g) \cap \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}},\leqslant a,g)$ не пуст. Зафиксировав его элемент $\hat{\omega}$, находим

$$\hat{\omega} \in \hat{\Gamma}_f(\mathcal{A},a,g)$$

[4] Впрочем, утверждение единственности можно также доказать с помощью стандартных рассуждений, основанных на использовании выпуклости класса $\Gamma_f(\mathcal{A},a,g)$ и тождества параллелограмма в $\mathcal{E}$ (см., например, доказательство леммы 6 в [9]).

и, следовательно,

$$\mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g)=\mathcal{F}_f(\hat{\omega})\geqslant\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A},a,g).$$

Комбинируя это соотношение с (9) и (58), получаем (15).

Предположим выполненным условие (16) или, что равносильно в силу (15), условие (10). Тогда применимы только что приведенные рассуждения; на их основании заключаем, что $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{A},a,g)$-задача разрешима, причем

$$\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A},a,g)\cap\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}},\leqslant a,g)\subset\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A},a,g).$$

Поскольку обратное включение очевидно вследствие (15), тождество (17), а вместе с ним и теорема 4, доказаны.

13. Доказательство теоремы 5. Пусть выполняются условия (5) и (10).

Докажем утверждение (i). Согласно (9) и (10), $\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g)<\infty$. Применяя лемму 11, для каждого фиксированного ξ из (непустого) класса $\mathfrak{N}\cap\mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f)$ находим

$$\xi\in\Gamma_f(\mathcal{A},a,g),$$

а комбинируя (9) и (52), получаем

$$\mathcal{F}_f(\xi)=\mathcal{G}_f(\mathcal{A},a,g).$$

Следовательно, имеет место включение

$$\mathfrak{N}\cap\mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f)\subset\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A},a,g). \tag{59}$$

Поскольку множество $\mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f)$ образует класс эквивалентности в $\mathcal{E}$, в то время как $\mathcal{G}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A},a,g)$ *содержится* в некотором классе эквивалентности в $\mathcal{E}$ (см. соответственно следствие 3 и соотношение (12)), заключаем, что включение (59) возможно только в случае, когда его правая и левая части совпадают. Это доказывает тождество (18).

Подставляя (18) в (17), получаем соотношение (19).

Чтобы доказать утверждение компактности (ii), зафиксируем $(\hat{\omega}_s)_{s\in S}\subset\subset\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A},a,g)$. Тогда в силу (19) $(\hat{\omega}_s)_{s\in S}$ содержится в классе эквивалентности $\mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f)$, и поэтому сильно фундаментальна, а также во множестве $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}},\leqslant a,g)$. Применяя леммы 3 и 4, выводим, что $(\hat{\omega}_s)_{s\in S}$ касается в сильной и, одновременно, $\mathcal{A}$-широкой топологиях некоторого $\hat{\omega}$, причем

$$\hat{\omega}\in\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}},\leqslant a,g). \tag{60}$$

Но класс $\mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f)$ сильно замкнут, поэтому

$$\hat{\omega}\in\mathcal{M}^0(\mathcal{A},a,g,f). \tag{61}$$

Комбинируя (19), (60) и (61), получаем $\hat{\omega}\in\hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{A},a,g)$, что и требуется.

Утверждение (iii) непосредственно следует из соотношений (18), (19) и леммы 11.

Теорема 5 доказана.

14. Доказательство теоремы 6. Пусть выполняются условия (5) и (16). Тогда в силу (21) и (22) $\mathcal{F}_f(\mathcal{K},a,g)$ и $\hat{\mathcal{G}}_f(\mathcal{K},a,g)$ конечны для всех $\mathcal{K}\succ\mathcal{K}'$, где $\mathcal{K}'\in\{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$

достаточно большое. Учитывая компактность K_i, $i \in I$, из теоремы 1 работы [10] и, соответственно, теоремы 4 выводим существование минимизирующих мер

$$\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{F}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{K}, a, g) \quad \text{и} \quad \hat{\omega}_{\mathcal{K}} \in \hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{K}, a, g), \quad \text{где} \quad \mathcal{K} \succ \mathcal{K}'.$$

Комбинируя соотношения (13) и (17), находим $\mathcal{F}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{K}, a, g) \subset \hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{K}, a, g)$. Значит, $\lambda_{\mathcal{K}} \in \hat{\mathcal{G}}_f^{\mathrm{sol}}(\mathcal{K}, a, g)$ и, следовательно,

$$\|\lambda_{\mathcal{K}} - \hat{\omega}_{\mathcal{K}}\| = 0. \tag{62}$$

Но в силу (21) имеет место включение

$$(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f), \tag{63}$$

и поэтому, согласно лемме 8, направленность $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$ сильно фундаментальна. Учитывая (62), видим, что свойство сильной фундаментальности справедливо и для $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$.

Кроме того, $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$ содержится в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g)$, что очевидно в силу принятых определений. Применяя к $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$ леммы 3 и 4, выводим, что существует ее поднаправленность $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_s})_{s \in S}$, $\mathcal{A}$-широко сходящаяся к некоторому $\hat{\omega}_{\mathcal{A}}$, причем

$$\hat{\omega}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}}, \leqslant a, g), \tag{64}$$

$$\hat{\omega}_{\mathcal{K}} \to \hat{\omega}_{\mathcal{A}} \quad \text{сильно}. \tag{65}$$

Но в силу (62) и (65) $\hat{\omega}_{\mathcal{A}}$ является сильным пределом также для $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$, откуда, согласно принятым определениям и соотношению (63), вытекает включение

$$\hat{\omega}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f).$$

Комбинируя его с включением (64), вследствие (19) получаем (23).

Из соотношений (22) и (23) выводим (24).

Наконец, докажем соотношение (25). Для этого достаточно доказать, что

$$b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{A}}) = b_i, \tag{66}$$

где b_i — произвольная предельная точка направленности $b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_s})$, $s \in S$.

Пусть $b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_n})$, $n \in \mathbb{N}$, — подпоследовательность направленности $b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_s})$, $s \in \in S$, сходящаяся к b_i. Применяя лемму 9 к соответствующей последовательности $(\lambda_{\mathcal{K}_n})_{n \in \mathbb{N}}$, выводим существование ее поднаправленности $(\lambda_{\mathcal{K}_t})_{t \in T}$, сильно и $\mathcal{A}$-широко сходящейся к некоторому $\lambda_{\mathcal{A}} \in \mathcal{W}_*^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Вследствие компактности K_i^t, $i \in I$ (здесь $\mathcal{K}_t = (K_i^t)_{i \in I}$), и принятых определений справедливо включение $\lambda_{\mathcal{K}_t} \in \mathcal{W}_*^0(\mathcal{K}_t, a, g, f)$. Поэтому, согласно утверждению единственности из леммы 10, числа $b_i(\lambda_{\mathcal{K}_t})$, $i \in I$, и, аналогично, $b_i(\lambda_{\mathcal{A}})$, $i \in I$, представимы с помощью соотношения (47), взятого при $\gamma \equiv \lambda_{\mathcal{K}_t}$ или, соответственно, $\gamma \equiv \lambda_{\mathcal{A}}$.

Подставляя полученные таким образом равенства в соотношение (20), взятое при $\omega_1 \equiv \hat{\omega}_{\mathcal{K}_t}$ и $\omega_2 \equiv \lambda_{\mathcal{K}_t}$ или, соответственно, $\omega_1 \equiv \hat{\omega}_{\mathcal{A}}$ и $\omega_2 \equiv \lambda_{\mathcal{A}}$, находим

$$b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_t}) = \alpha_i \left[\kappa(\lambda_{\mathcal{K}_t}^i, \lambda_{\mathcal{K}_t}) - \int f \, d\lambda_{\mathcal{K}_t}^i - \int f \, d\hat{\omega}_{\mathcal{K}_t}^i \right], \qquad i \in I, \quad t \in T, \tag{67}$$

$$b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{A}}) = \alpha_i \left[\kappa(\lambda^i_{\mathcal{A}}, \lambda_{\mathcal{A}}) - \int f\, d\lambda^i_{\mathcal{A}} - \int f\, d\hat{\omega}^i_{\mathcal{A}} \right], \quad i \in I. \tag{68}$$

Теперь перейдем в соотношениях (67) к пределу по $t \in T$, воспользовавшись при этом сильной и $\mathcal{A}$-широкой сходимостью $(\lambda_{\mathcal{K}_t})_{t\in T}$ к $\lambda_{\mathcal{A}}$, а $(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_t})_{t\in T}$ к $\hat{\omega}_{\mathcal{A}}$. Тогда на основании леммы 5 и тождеств (68) получаем

$$b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{A}}) = \lim_{t\in T} b_i(\hat{\omega}_{\mathcal{K}_t}) = b_i, \quad i \in I.$$

Соотношение (66), а вместе с ним и теорема 6 доказаны.

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
2. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
3. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta math. – 1960. – **103**, № 3-4. – P. 139 – 215.
4. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168 – 189.
5. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135 – 352.
6. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. – Berlin: Springer, 1997. – 505 p.
7. *Zorii N.* On the solvability of the Gauss variational problem // Comput. Methods Funct. Theory. – 2002. – **2**, № 2. – P. 427 – 448.
8. *Zorii N.* On the constrained Gauss variational problem // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź. – 2003. – **40**. – P. 25 – 40.
9. *Зорий Н. В.* Равновесные потенциалы с внешними полями // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1178 – 1195.
10. *Зорий Н. В.* Задачи равновесия для потенциалов с внешними полями // Там же. – № 10. – С. 1315 – 1339.
11. *Зорий Н. В.* Теория потенциала относительно согласованных ядер: теорема о полноте, последовательности потенциалов // Там же. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1513 – 1526.
12. *Зорий Н. В.* Необходимые и достаточные условия разрешимости вариационной задачи Гаусса // Там же. – 2005. – **57**, № 1. – С. 60 – 83.
13. *Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
14. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
15. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. math. France. – 1945. – **73**. – P. 74 – 106.
16. *Fuglede B.* Caractérisation des noyaux consistants en théorie du potentiel // Comptes Rendus. – 1962. – **255**. – P. 241 – 243.
17. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431 – 437.
18. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Рисса // Там же. – 1989. – **41**, № 1. – С. 34 – 41.
19. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I; II // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350 – 1360; 1996. – **48**, № 5. – С. 603 – 613.
20. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 2. – С. 265 – 269.
21. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I; II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494 – 500; № 11. – С. 1475 – 1480.
22. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II; III // Там же. – 2001. – **53**, № 4. – С. 466 – 488; № 6. – С. 758 – 782.

Получено 24.03.2005