УДК 519.6:532.5

Д. А. Номіровський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З СИНГУЛЯРНИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ*

We consider analogs of the Galerkin method for a linear wave equation of the fifth order with distributions on the right-hand side. We prove theorems of the convergence of approximate method depending on the singularity order of the right-hand side.

Розглядаються аналоги методу Гальоркіна для лінійного хвильового рівняння п'ятого порядку з узагальненими функціями у правій частині. Доведено теореми збіжності наближеного методу в залежності від порядку сингулярності правої частини.

Будемо досліджувати лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними п'ятого порядку

$$\mathcal{L} u \equiv A(u_{tt}) + B^2(u_t) + DC(u) = f, \tag{1}$$

де A, B, C, D — диференціальні оператори другого порядку за просторовими змінними.

У застосуваннях рівняння типу (1) виникають, наприклад, при дослідженні динаміки плоских рухів нестисливої в'язкої рідини [1 – 3]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u - \nu\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u + \omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} u = f, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}.$$

Рівняння (1) також описує лінійні хвилі на гвинтовій течії [4], малі коливання рухомої стратифікованої рідини [5] і багато інших хвильових процесів.

Рівняння (1) узагальнює рівняння типу С. Л. Соболева $(B = 0, D = 1)$. Застосовуючи прості заміни змінних, легко вказати окремі випадки, коли рівняння (1) зводиться до псевдопараболічного, псевдогіперболічного або класичного параболічного чи гіперболічного рівнянь.

Перші дослідження хвильових процесів такого типу відносилися, головним чином, до вивчення стаціонарних режимів або обмежувалися дослідженнями в областях спеціальної форми [5 – 7]. Достатньо загальні дослідження крайових задач для рівняння (1) були виконані в роботах [8 – 11]. Для деяких операторів A, B, C, D доведено єдину розв'язність задачі при регулярних початкових даних [10, 11], а також узагальнену розв'язність у класі узагальнених функцій скінченного порядку [8, 9]. У випадку, коли права частина є узагальненою функцією деякого скінченного порядку, для певних типів операторів (1) доведено узагальнену розв'язність та досліджено деякі питання оптимізації [8, 12, 13]. Зауважимо, що ці дослідження були проведені для оператора $\mathcal{L}$, що діє в одній парі соболевських просторів, у випадку невід'ємних операторів A, B, C, D без доданків менших порядків.

У даній роботі пропонується наближений метод типу Гальоркіна для розв'язання хвильового рівняння (1) та досліджується збіжність цього методу. Дослідження базуються на доведенні для деяких розширень оператора $\mathcal{L}$ ланцюгів апріорних оцінок. При цьому для доведення оцінок „знизу" використовуються нові для таких задач допоміжні інтегро-диференціальні оператори. Це дозволило встановити зліченну шкалу (за гладкістю правої частини рівняння) теорем збіжності методу Гальоркіна для операторів A, B, C, D з членами менших порядків та покращити гладкість розв'язку задачі. Необхідність в резуль-

* Частково підтримано грантом GP/F8-038 Президента України.

татах такого типу виникає, наприклад, при розв'язанні задач оптимального керування системами із зосередженими впливами, зокрема імпульсними [13].

1. Основні позначення та простори. В циліндричній області $(t,\xi)\in Q = (0,T)\times\Omega$, де $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — обмежена однозв'язна область з регулярною межею $\partial\Omega$, розглянемо загальне хвильове рівняння (1), $u(t,\xi)$ — функція стану, що задовольняє крайові умови

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \qquad u|_{\xi\in\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\vec{\mu}_B}\Big|_{\xi\in\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$\vec{\mu}_B = \mathbf{B}\vec{n}$ — вектор конормалі до поверхні $\partial\Omega$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}(\xi)\}_{i,j=1}^n$ — матриця коефіцієнтів оператора B, $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Оператор A не залежить від змінної t і задається диференціальним виразом другого порядку

$$A(u) \equiv -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_j}\right) + \sum_{i=1}^n a_i(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_i} + a(\xi)u,$$

B, C, D — аналогічні оператори.

Нехай L_0 — множина нескінченно диференційовних в $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють умови

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \ldots = 0, \qquad u|_{\xi\in\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\vec{\mu}_B}\Big|_{\xi\in\partial\Omega} = 0,$$

W_0^1, H_0^1, V_0^1 — поповнення L_0 за нормами

$$\|u\|^2_{W_0^1} = \sum_{i,j=1}^n \int_Q u^2_{t\xi_i\xi_j}\,dQ,$$

$$\|u\|^2_{H_0^1} = \sum_{i=1}^n \int_Q u^2_{t\xi_i}\,dQ + \sum_{i,j=1}^n \int_Q u^2_{\xi_i\xi_j}\,dQ, \tag{3}$$

$$\|u\|^2_{V_0^1} = \|u\|^2_{H_0^1} + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u^2_{\xi_i\xi_j}\big|_{t=T}\,d\Omega.$$

Аналогічно, L_T — множина нескінченно диференційовних в $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють спряжені умови

$$v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = \ldots = 0, \qquad v|_{\xi\in\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial\vec{\mu}_B}\Big|_{\xi\in\partial\Omega} = 0,$$

W_T^1, H_T^1, V_T^1 — поповнення множини L_T за нормами просторів $\|\cdot\|_{W_0^1}$, $\|\cdot\|_{H_0^1}$ і

$$\|v\|^2_{V_T^1} = \|v\|^2_{H_T^1} + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v^2_{\xi_i\xi_j}\big|_{t=0}\,d\Omega$$

відповідно.

Далі нам будуть потрібні визначення просторів W_0^k, W_T^k, $H_0^k, \ldots$ для довільних цілих k. Позначимо через W_0^k поповнення множини L_0 за нормою $\|\cdot\|_{W_0^k}$, де норма простору W_0^k визначається за індукцією:

$$\left\|u^{(1)}\right\|_{W_0^{k-1}} = \|u\|_{W_0^k}, \quad \|u\|_{W_0^{k-1}} = \left\|u^{(-1)}\right\|_{W_0^k}, \quad u^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u^{(-1)} = \int_0^t u(\tau,\xi)\,d\tau$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Норма W_0^1 визначається рівністю (3).

Решта просторів визначаються аналогічно $\Big($для просторів W_T^k, H_T^k, V_T^k з нижнім індексом T замість $u^{(-1)}$ слід брати $v^{[-1]} = \int_T^t v(\tau, \xi)\, d\tau\Big)$.

Лема 1. *Для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ *мають місце щільні неперервні вкладення*:

1) $W_0^k \subset V_0^k \subset H_0^k \subset W_0^{k-1}$;

2) $W_T^k \subset V_T^k \subset H_T^k \subset W_T^{k-1}$.

Крім цього, $H_0^0 \subset L_2(Q)$, $H_T^0 \subset L_2(Q)$.

Доведення. Необхідно порівняти норми відповідних просторів на множині L_0 (або, відповідно, на L_T) та перевірити умову π) [14].

Позначимо через $(W_0^k)^*$, $(W_T^k)^*$, $(H_0^k)^*, \ldots$ відповідні спряжені простори. Зрозуміло, що $(W_0^k)^*$, $(W_T^k)^*$, $(H_0^k)^*, \ldots$ — певні класи узагальнених функцій. На парах прямого і спряженого просторів задано природні білінійні форми, наприклад $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_0^k}$ означає білінійну форму над $(W_0^k)^* \times W_0^k$.

2. Узагальнена постановка. Позначимо

$$\langle Au, v \rangle_Q = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{\xi_i}, v_{\xi_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} (a_i u_{\xi_i}, v)_{L_2(Q)} + (au, v)_{L_2(Q)}$$

для всіх u, $v \in W_2^{0,1}(Q)$ і

$$\langle Au, v \rangle_\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{\xi_i}, v_{\xi_j})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (a_i u_{\xi_i}, v)_{L_2(\Omega)} + (au, v)_{L_2(\Omega)}$$

для всіх u, $v \in W_2^1(\Omega)$, де $W_2^{0,1}(Q)$ — поповнення множини функцій $u \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови

$$u|_{\xi \in \partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{\mu}_B}|_{\xi \in \partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

за нормою $\|u\|^2_{W_2^{0,1}(Q)} = \sum_{i=1}^n \left\| u_{\xi_i} \right\|^2_{L_2(Q)}$, $W_2^1(\Omega)$ — поповнення функцій класу $C^\infty(\overline{\Omega})$, що також задовольняють умови (4), за нормою $\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \left\| u_{\xi_i} \right\|^2_{L_2(\Omega)}$. Позначимо через $W_2^2(\Omega)$ поповнення множини гладких в $\overline{\Omega}$ функцій $u(\xi)$ що задовольняють умови (4), за нормою

$$\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u^2_{\xi_i \xi_j}\, d\Omega,$$

$W_2^{-2}(\Omega)$ — відповідний негативний простір.

Для функцій $u \in H_0^0$, $v \in W_T^2$, $f \in (W_T^2)^*$ розглянемо рівність

$$\langle Au, v_{tt} \rangle_Q + (Bu^{(-1)}, B^* v_{tt})_{L_2(Q)} + (Cu^{(-2)}, D^* v_{tt})_{L_2(Q)} = \langle f, v \rangle_{W_T^2}, \tag{5}$$

де

$$B^*(v) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(b_{ij}(\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (b_i(\xi) v)}{\partial \xi_i} + b(\xi) v,$$

оператор D^* визначається аналогічно.

Обмеження на коефіцієнти оператора є такими:

A) $a_{ij} = a_{ji}$, a_i, a, b, c, $d \in C(\overline{\Omega})$ і $b_{ij} = b_{ji}$, c_{ij}, d_{ij}, b_i, c_i, $d_i \in C^1(\overline{\Omega})$.

Будемо також припускати, що оператори A, B задовольняють умови еліптичності:

B$_1$) $\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in W_2^{0,1}(Q)$: $\langle Au, u\rangle_Q \geq \alpha \sum_{i=1}^n \int_Q u_{\xi_i}^2 \, dQ$;

B$_2$) $\exists \alpha_B > 0 \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall \xi \in \overline{\Omega}$: $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha_B \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Ліва частина рівності (5) визначає лінійний неперервний оператор $\mathcal{L}_0 \colon H_0^0 \to (W_T^2)^*$ і лінійний спряжений оператор $\mathcal{L}_0^* \colon W_T^2 \to (H_0^0)^*$, який також є неперервним. Зрозуміло, що $\mathcal{L}_0$ — розширення класичного оператора $\mathcal{L}$ (рівняння (1)). Інтегруючи частинами, легко ввести й означення оператора $\mathcal{L}_k \colon H_0^k \to (W_T^{2-k})^*$ та спряженого оператора $\mathcal{L}_k^* \colon W_T^{2-k} \to (H_0^k)^*$. Наприклад, оператор $\mathcal{L}_1 \colon H_0^1 \to (W_T^1)^*$ задається рівністю

$$-\langle Au_t, v_t\rangle_Q - (Bu, B^* v_t)_{L_2(Q)} - (Cu^{(-1)}, D^* v_t)_{L_2(Q)} = \langle f, v\rangle_{W_T^1}.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{L}_{k+1} \subset \mathcal{L}_k$.

Використовуючи формулу інтегрування частинами

$$(Bu^{(k-1)}, B^* v^{[2-k]})_{L_2(Q)} + (Cu^{(k-2)}, D^* v^{[2-k]})_{L_2(Q)} =$$
$$= -(Bu^{(k)}, B^* v^{[1-k]})_{L_2(Q)} - (Cu^{(k-1)}, D^* v^{[1-k]})_{L_2(Q)},$$

легко показати, що у випадку, коли $u \in W_0^k$, значення оператора належить простору $\mathcal{L}_k u \in (H_T^{2-k})^* \subset (V_T^{2-k})^*$, тобто маємо звуження $\mathcal{L}_k$ на W_0^k. Відповідний до цього звуження спряжений оператор буде діяти у просторах $\overline{\mathcal{L}}_k^* \colon V_T^{2-k} \to (W_0^k)^*$.

3. Властивості операторів $\mathcal{L}_k$. Доведемо допоміжну лему.

Лема 2. *Оператор* $l(v) = \beta v_{tt} - v_t + v$, $0 < \beta < 1/2$, *що діє у просторах* $l \colon W_T^2 \to W_0^0$, *здійснює гомеоморфізм між цими просторами.*

Доведення. Один із шляхів доведення може бути таким. Застосовуючи нерівність Фрідріхса, легко показати, що $\| l(v)\|_{W_0^0} \leq c \| v \|_{W_T^2}$. Оцінимо $\| l(v)\|_{W_0^0}$ знизу. Інтегруючи частинами, дістаємо

$$\| l(v)\|_{W_0^0}^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_Q (\beta v_{tt\xi_i\xi_j} - v_{t\xi_i\xi_j} + v_{\xi_i\xi_j})^2 dQ =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \int_Q \left(\beta^2 v_{tt\xi_i\xi_j}^2 + v_{t\xi_i\xi_j}^2 + v_{\xi_i\xi_j}^2\right) dQ + I_1 + I_2 + I_3,$$

де

$$I_1 = -2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \beta v_{tt\xi_i\xi_j} v_{t\xi_i\xi_j} \, dQ = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \beta v_{t\xi_i\xi_j}^2 |_{t=0} \, d\Omega,$$

$$I_2 = 2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \beta v_{tt\xi_i\xi_j} v_{\xi_i\xi_j} \, dQ = -2 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \beta v_{t\xi_i\xi_j} v_{\xi_i\xi_j} |_{t=0} \, d\Omega - 2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \beta v_{t\xi_i\xi_j}^2 \, dQ,$$

$$I_3 = -2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q v_{t\xi_i\xi_j} v_{\xi_i\xi_j}\, dQ = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_{\xi_i\xi_j}^2 |_{t=0} d\Omega.$$

Звідси маємо $\|l(v)\|_{W_0^0} \ge c^{-1}\|v\|_{W_T^2}$. Беручи до уваги щільність $R(l)$ в W_0^0 і доведені нерівності, робимо висновок, що оператор l здійснює гомеоморфізм між W_T^2 і W_0^0.

Лему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** Застосовуючи більш точні оцінки, можна довести лему для всіх комплексних $\beta \ne 0$.

***Зауваження* 2.** Аналогічно доводиться, що той самий диференціальний оператор l здійснює гомеоморфізм і між іншими парами просторів, наприклад V_T^2 та V_0^0.

***Зауваження* 3.** Аналогічно можна довести, що оператор $\bar{l}(v) = -\beta v_t + v$, $\beta \ne 0$, здійснює гомеоморфізм між W_T^1 і W_0^0.

Як і в роботі [15], доводяться дві наступні леми.

Лема 3. *Існують такі досить великі сталі M, $c > 0$ та досить мала $\beta > 0$, що для довільних функцій $u \in W_0^0$, $v \in V_T^2$, які пов'язані співвідношенням $u = e^{Mt} l(v)$, де оператор l визначено в лемі* 2, *має місце нерівність*

$$c\langle \mathcal{L}_0 u, v\rangle_{V_T^2} \ge \|u\|_{V_0^0}^2.$$

Лема 4. *Існують такі досить великі сталі M, $c > 0$ та досить мала $\beta > 0$, що для довільних функцій $u \in H_0^1$, $v \in W_T^1$, які пов'язані співвідношенням $u = e^{Mt}\bar{l}(v)$, де оператор $\bar{l}$ визначено у зауваженні* 3, *має місце нерівність*

$$c\langle \mathcal{L}_1 u, v\rangle_{W_T^1} \ge \|u\|_{W_0^0}^2.$$

Лема 5. *Нехай $I^k u = (-1)^k (l^{-1}(e^{-Mt}u^{(k)}))^{[k]}$. Тоді для всіх $u \in W_0^k$ мають місце нерівності*

$$c_1\|u\|_{W_0^k}^2 \ge \langle \mathcal{L}_k u, I^k u\rangle_{V_T^{2-k}} \ge c_2\|u\|_{V_0^k}^2.$$

Доведення. Оскільки $u \in W_0^k$, то $u^{(k)} \in W_0^0$ та $l^{-1}(e^{-Mt}u^{(k)}) \in W_T^2$. Таким чином, $I^k u \in W_T^{2-k} \subset V_T^{2-k}$.

Покладемо $v = ((-1)^k I^k u)^{[-k]}$. Тоді функції $u^{(k)}$ та v пов'язані співвідношенням $u^{(k)} = e^{Mt} l(v)$, що дає можливість застосувати лему 3. Маємо

$$\langle \mathcal{L}_k u, I^k u\rangle_{V_T^{2-k}} = \langle Au^{(k)}, v_{tt}\rangle_Q - (Bu^{(k)}, B^* v_t)_{L_2(Q)} - (Cu^{(k-1)}, D^* v_t)_{L_2(Q)} =$$

$$= \langle \mathcal{L}_0 u^{(k)}, v\rangle_{V_T^2} \ge c^{-1}\left\|u^{(k)}\right\|_{V_0^0}^2 = c^{-1}\|u\|_{V_0^k}^2.$$

З іншого боку, зважаючи на неперервність оператора $\overline{\mathcal{L}}_0^*: V_T^2 \to (W_0^0)^*$ і лему 2, маємо

$$\langle \mathcal{L}_k u, I^k u\rangle_{V_T^{2-k}} = \langle \mathcal{L}_0 u^{(k)}, v\rangle_{V_T^2} = \langle u^{(k)}, \overline{\mathcal{L}}_0^* v\rangle_{W_0^0} \le \left\|u^{(k)}\right\|_{W_0^0}\left\|\overline{\mathcal{L}}_0^* v\right\|_{(W_0^0)^*} \le$$

$$\le c\|u\|_{W_0^k}\|v\|_{V_T^2} \le c_1\|u\|_{W_0^k}\|v\|_{W_T^2} \le c_2\|u\|_{W_0^k}\|l(v)\|_{W_0^0} =$$

$$= c_2\|u\|_{W_0^k}\left\|e^{-Mt}u^{(k)}\right\|_{W_0^0} \le c_3\|u\|_{W_0^k}^2.$$

Лему 5 доведено.

***Наслідок* 1.** *Для всіх* $u \in W_0^k$ *має місце нерівність*

$$\left\| \mathcal{L}_k u \right\|_{(V_T^{2-k})^*} \geq c_2 \| u \|_{V_0^k},$$

звідки, зокрема, випливає ін'єктивність оператора $\mathcal{L}_k$.

Доведення. Достатньо лише скористатися означенням $I^k u$ та встановити оцінку $\left\| I^k u \right\|_{V_T^{2-k}} \leq c \| u \|_{V_0^k}$.

Лема 6. *Нехай* $\bar{I}^k u = (-1)^{k-1} (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u^{(k-1)}))^{[k-1]}$. *Тоді для всіх* $u \in H_0^k$ *має місце нерівність*

$$c \langle \mathcal{L}_k u, \bar{I}^k u \rangle_{W_T^{2-k}} \geq \| u \|^2_{W_0^{k-1}}.$$

Доведення. Оскільки $u \in H_0^k$, то $u^{(k-1)} \in H_0^1 \subset W_0^0$ та $\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u^{(k-1)}) \in W_T^1$. Таким чином, $\bar{I}^k u \in W_T^{2-k}$.

Покладемо $v = ((-1)^{k-1} \bar{I}^k u)^{[1-k]}$. Тоді функції $u^{(k-1)}$ та v пов'язані співвідношенням $u^{(k-1)} = e^{Mt} \bar{l}(v)$, що дає можливість застосувати лему 4. Маємо

$$\langle \mathcal{L}_k u, \bar{I}^k u \rangle_{W_T^{2-k}} =$$

$$= -\langle A u_t^{(k-1)}, v_t \rangle_Q - (B u^{(k-1)}, B^* v_t)_{L_2(Q)} - (C (u^{(-1)})^{(k-1)}, D^* v_t)_{L_2(Q)} =$$

$$= \langle \mathcal{L}_1 u^{(k-1)}, v \rangle_{W_T^1} \geq c^{-1} \left\| u^{(k-1)} \right\|^2_{W_0^0} \geq c^{-1} \| u \|^2_{W_0^{k-1}}.$$

4. Наближений метод Гальоркіна. Нехай $f \in (V_T^{2-k})^*$. Будемо шукати наближений розв'язок рівняння $\mathcal{L}_k u = f$ у вигляді

$$u_s(t, \xi) = \sum_{i=1}^{s} g_i(t) \omega_i(\xi),$$

де $g_i(t)$ — розв'язок задачі Коші для системи s лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами другого порядку

$$\sum_{i=1}^{s} \Big((g_i)^{(k)} \langle A \omega_i, \omega_j \rangle_\Omega + (g_i)^{(k-1)} (B \omega_i, B^* \omega_j)_{L_2(\Omega)} + (g_i)^{(k-2)} (C \omega_i, D^* \omega_j)_{L_2(\Omega)} \Big) =$$

$$= \langle f^{(k-2)}, \omega_j \rangle_{W_2^2(\Omega)}, \tag{6}$$

$$g_m^{(l)}(0) = 0, \quad m = \overline{1, s}, \quad l \leq k-1, \quad j = \overline{1, s},$$

де $\{\omega_i(\xi)\}$ — послідовність лінійно незалежних функцій класу $W_2^2(\Omega)$ таких, що має місце рівність

$$W_T^k = \text{з. л. о.} \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i,$$

де

$$M_i = \Big\{ \varphi(t) \omega_i(\xi) \mid \varphi(t) \in C^\infty([0, T]),\ \varphi^{[l]}(T) = 0 \Big\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Неважко зрозуміти, що $u_s \in W_0^k$.

Лема 7. *Нехай* $f \in (V_T^{1-k})^*$. *Тоді має місце нерівність*

$$\| u_s \|_{W_0^k} \leq c \| f \|_{(W_T^{1-k})^*}.$$

Доведення. Оскільки $f \in (V_T^{2-(k+1)})^*$, то $u_s \in W_0^{k+1} \subset H_0^{k+1}$. Застосовуючи лему 6, дістаємо

$$c \langle \mathcal{L}_{k+1} u_s, \bar{I}^{k+1} u_s \rangle_{W_T^{1-k}} \geq \| u_s \|^2_{W_0^k}. \tag{7}$$

З іншого боку, маємо

$$\langle \mathcal{L}_{k+1} u, \bar{I}^{k+1} u \rangle_{W_T^{1-k}} = (-1)^{k+1} \times$$

$$\times \left(\langle A u^{(k+1)}, (\bar{I}^{k+1} u)^{[1-k]} \rangle_Q + (B u^{(k)}, B^* (\bar{I}^{k+1} u)^{[1-k]})_{L_2(Q)} + (C u^{(k-1)}, D^* (\bar{I}^{k+1} u)^{[1-k]})_{L_2(Q)} \right).$$

Зважаючи на означення оператора $\bar{I}^{k+1} u$, дістаємо

$$\langle \mathcal{L}_{k+1} u, \bar{I}^{k+1} u \rangle_{W_T^{1-k}} = \left(\langle A u^{(k+1)}, (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u^{(k)}))^{[1]} \rangle_Q + \right.$$

$$\left. + (B u^{(k)}, B^* (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u^{(k)}))^{[1]})_{L_2(Q)} + (C u^{(k-1)}, D^* (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u^{(k)}))^{[1]})_{L_2(Q)} \right).$$

Здиференціюємо рівність (6) по t, помножимо на $(\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} g_j^{(k)}))^{[1]}$, підсумуємо по j від 1 до s та зінтегруємо по t від 0 до T. У підсумку дістанемо

$$\langle \mathcal{L}_{k+1} u_s, \bar{I}^{k+1} u_s \rangle_{W_T^{1-k}} = \left\langle f^{(k-1)}, (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u_s^{(k)}))^{[1]} \right\rangle_{W_T^0} =$$

$$= (-1)^{k-1} \left\langle f, (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u_s^{(k)}))^{[k]} \right\rangle_{W_T^{1-k}} \leq$$

$$\leq \| f \|_{(W_T^{1-k})^*} \left\| (\bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u_s^{(k)}))^{[k]} \right\|_{W_T^{1-k}} = \| f \|_{(W_T^{1-k})^*} \left\| \bar{l}^{-1}(e^{-Mt} u_s^{(k)}) \right\|_{W_T^1} \leq$$

$$\leq c \| f \|_{(W_T^{1-k})^*} \left\| e^{-Mt} u_s^{(k)} \right\|_{W_0^0} \leq c_1 \| f \|_{(W_T^{1-k})^*} \| u_s \|_{W_0^k},$$

що разом з (7) і доводить лему.

Зауваження **4.** З огляду на означення норми $\| u \|_{W_0^k}$ та нерівність леми легко довести, що існує слабко збіжна в W_0^k підпослідовність $u_{s_m} \xrightarrow{w} u^*$. Крім того, цю підпослідовність можна вибрати таким чином, що послідовності $\{(u_{s_m})^{(l)}\}$, $\{(u_{s_m})^{(l)}_{\xi_i}\}$, $\{(u_{s_m})^{(l)}_{\xi_i \xi_j}\}$, $l \leq k$, збігаються слабко в $L_2(Q)$ до відповідної узагальненої похідної функції $u^* \in W_0^k$. А внаслідок властивостей оператора l послідовність $I^k u_{s_m} = (-1)^k (l^{-1}(e^{-Mt} u_{s_m}^{(k)}))^{[k]}$ буде збігатися до $I^k u^*$ слабко в W_T^{2-k}.

Теорема 1. *Нехай $f \in (V_T^{1-k})^*$. Тоді послідовність наближень $\{u_s\}$ збігається до розв'язку $u^* \in W_0^k$ рівняння $\mathcal{L}_k u = f$ у нормі простору V_0^k.*

Доведення. Помножимо співвідношення (6) на $(l^{-1}(e^{-Mt} g_j^{(k)}))^{[2]}$, підсумуємо по j від 1 до s_m та зінтегруємо по t від 0 до T. Тоді дістанемо

$$\langle \mathcal{L}_k u_{s_m}, I^k u_{s_m} \rangle_{W_T^{2-k}} = \left\langle f^{(k-2)}, (l^{-1}(e^{-Mt} u_{s_m}^{(k)}))^{[2]} \right\rangle_{W_T^0} =$$

$$= \left\langle f, (-1)^k (l^{-1}(e^{-Mt} u_{s_m}^{(k)}))^{[k]} \right\rangle_{W_T^{2-k}} = \langle f, I^k u_{s_m} \rangle_{W_T^{2-k}}.$$

Властивості підпослідовності $\{u_{s_m}\}$ описано у зауваженні 4, тому маємо слабку збіжність $I^k u_{s_m} \xrightarrow{w} I^k u^*$ в W_T^{2-k}. Звідси

$$\lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{L}_k u_{s_m}, I^k u_{s_m} \rangle_{W_T^{2-k}} = \lim_{m\to\infty} \langle f, I^k u_{s_m} \rangle_{W_T^{2-k}} = \langle f, I^k u^* \rangle_{W_T^{2-k}}.$$

З леми 5 маємо

$$c_1 \left\| u_{s_m} - u^* \right\|_{V_0^k}^2 \le \langle \mathcal{L}_k u_{s_m}, I^k u_{s_m} \rangle_{W_T^{2-k}} - \langle \mathcal{L}_k u^*, I^k u_{s_m} \rangle_{W_T^{2-k}} + $$
$$+ \langle \mathcal{L}_k u^* - \mathcal{L}_k u_{s_m}, I^k u^* \rangle_{W_T^{2-k}}.$$

Зважаючи на зауваження 4, отримуємо, що права частина прямує до $\langle f, I^k u^* \rangle_{W_T^{2-k}} - \langle \mathcal{L}_k u^*, I^k u^* \rangle_{W_T^{2-k}}$. Доведемо, що $\mathcal{L}_k u^* = f$. Справді, якщо помножити (6) на $\varphi_j^{[2-k]}$, де $\varphi_j(t) \in C^\infty([0,T])$, $\varphi_j^{[l]}(T) = 0$, підсумувати по j від 1 до p та зінтегрувати по t від 0 до T, то дістанемо $\langle \mathcal{L}_k u_{s_m}, v_p \rangle_{W_T^{2-k}} = \langle f, v_p \rangle_{W_T^{2-k}}$, де $v_p = (-1)^k \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \omega_j$, $p = \overline{1, s_m}$. Переходячи до границі при $m \to \infty$, маємо $\langle \mathcal{L}_k u^*, v_p \rangle_{W_T^{2-k}} = \langle f, v_p \rangle_{W_T^{2-k}}$. Звідси, враховуючи умови, накладені на функції ω_j, маємо $\mathcal{L}_k u^* = f$. Таким чином, $u_{s_m} \to u^*$ в просторі V_0^k.

Оскільки розв'язок рівняння $\mathcal{L}_k u \to f$ єдиний, то можна не вибирати підпослідовність $\{u_{s_m}\}$.

Лема 8. *Нехай* $f \in (V_T^{2-k})^*$. *Має місце нерівність* $\| u_s \|_{V_0^k} \le c \| f \|_{(V_T^{2-k})^*}$.

Доведення. Помножимо співвідношення (6) на $(l^{-1}(e^{-Mt} g_j^{(k)}))^{[2]}$, підсумуємо по j від 1 до s та зінтегруємо по t від 0 до T. Дістанемо

$$\langle \mathcal{L}_k u_s, I^k u_s \rangle_{W_T^{2-k}} = \langle f, I^k u_s \rangle_{W_T^{2-k}} = \langle f, I^k u_s \rangle_{V_T^{2-k}}.$$

Застосовуючи лему 5, маємо

$$\| u_s \|_{V_0^k}^2 \le c \langle \mathcal{L}_k u_s, I^k u_s \rangle_{V_T^{2-k}}.$$

З іншого боку,

$$\langle f, I^k u_s \rangle_{V_T^{2-k}} \le \| f \|_{(V_T^{2-k})^*} \left\| I^k u_s \right\|_{V_T^{2-k}} = \| f \|_{(V_T^{2-k})^*} \left\| l^{-1}(e^{-Mt} u_s^{(k)}) \right\|_{V_T^2} \le$$
$$\le c_1 \| f \|_{(V_T^{2-k})^*} \left\| e^{-Mt} u_s^{(k)} \right\|_{V_0^0} \le c_2 \| f \|_{(V_T^{2-k})^*} \| u_s \|_{V_0^k}.$$

Теорема 2. *Для довільної* $f \in (V_T^{2-k})^*$ *послідовність наближень* $\{u_s\}$ *збігається до розв'язку* $u^* \in V_0^k$ *рівняння* $\mathcal{L}_k u = f$ *у нормі простору* V_0^k.

Доведення. Нехай $f^m \in (V_T^{1-k})^*$ — послідовність функцій, що збігається до f у просторі $(V_T^{2-k})^*$, u_s^m — послідовність наближень до розв'язку рівняння $\mathcal{L}_k u = f^m$, u_s — послідовність наближень до розв'язку рівняння $\mathcal{L}_k u = f$.

Застосовуючи лему 8, маємо

$$\left\| u_{s_1} - u_{s_2} \right\|_{V_0^k} \le \left\| u_{s_1} - u_{s_1}^m \right\|_{V_0^k} + \left\| u_{s_1}^m - u_{s_2}^m \right\|_{V_0^k} + \left\| u_{s_2}^m - u_{s_2} \right\|_{V_0^k} \le$$
$$\le 2c \left\| f - f^m \right\|_{(V_T^{2-k})^*} + \left\| u_{s_1}^m - u_{s_2}^m \right\|_{V_0^k}.$$

Виберемо таке $m \in \mathbb{N}$, щоб $4c\left\| f - f^m \right\|_{(V_T^{2-k})^*} \le \varepsilon$. Використавши теорему 1, знайдемо такий номер $s \in \mathbb{N}$, що для всіх s_1, $s_2 \ge s$ виконується нерівність $2\left\| u_{s_1}^m - u_{s_2}^m \right\|_{V_0^k} \le \varepsilon$, тобто u_s — фундаментальна послідовність у просторі V_0^k. Отже, $u_s \to u^*$ в V_0^k. Нехай u^m — розв'язки рівняння $\mathcal{L}_k u = f^m$. Тоді

$$\left\| u^m - u^* \right\|_{V_0^k} \le \left\| u^m - u_s^m \right\|_{V_0^k} + \left\| u_s^m - u_s \right\|_{V_0^k} + \left\| u_s - u^* \right\|_{V_0^k} \le$$

$$\le \left\| u^m - u_s^m \right\|_{V_0^k} + c\left\| f^m - f \right\|_{(V_T^{2-k})^*} + \left\| u_s - u^* \right\|_{V_0^k} \to 0$$

при $s \to \infty$, $m \to \infty$. Але, використовуючи неперервність оператора $\mathcal{L}_k : H_0^k \to (W_T^{2-k})^*$, маємо

$$\left\| \mathcal{L}_k u^* - f \right\|_{(W_T^{2-k})^*} \le \left\| \mathcal{L}_k u^* - \mathcal{L}_k u^m \right\|_{(W_T^{2-k})^*} + \left\| \mathcal{L}_k u^m - f \right\|_{(W_T^{2-k})^*} \le$$

$$\le c\left\| u^* - u^m \right\|_{H_0^k} + c\left\| \mathcal{L}_k u^m - f \right\|_{(V_T^{2-k})^*} \le$$

$$\le c_1\left\| u^* - u^m \right\|_{V_0^k} + c\left\| f^m - f \right\|_{(V_T^{2-k})^*} \to 0$$

при $m \to \infty$. Отже, u^* — розв'язок рівняння $\mathcal{L}_k u = f$.

1. *Габов С. А., Малышева Г. Ю.* О задаче Коши для одного класса движений вязкой стратифицированной жидкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 3. – С. 467 – 471.
2. *Габов С. А., Малышева Г. Ю., Свешников А. Г.* О некотором уравнении динамики вязкой стратифицированной жидкости // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 7. – С. 1156 – 1165.
3. *Свешников А. Г., Симаков С. Т.* Фундаментальное решение и формула Грина для семьи уравнений, возникающих в теории стратифицированной вязкой жидкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – **30**, № 10. – С. 1502 – 1512.
4. *Greenspan H. P.* The theory of rotating fluids. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1968. – 327 p.
5. *Trustrum K.* Rotating and stratified fluid flow // J. Fluid Mech. – 1964. – № 19. – P. 415 – 432.
6. *Fraenkel L. E.* On the flow of rotating fluid past bodies in a pipe // Proc. Roy. Soc. A. – 1955. – **233,** № 1195. – P. 506 – 526.
7. *Nigam S. D., Nigam P. D.* Wave propagation in rotating fluids // Ibid. – 1962. – **266**, № 1325. – P. 247 – 256.
8. *Ляшко С. И., Редько С. Е.* Оптимальное импульсно-точечное управление динамикой вязкой стратифицированной жидкости // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 11. – С. 1890 – 1897.
9. *Ляшко С. И., Редько С. Е.* Приближенное решение задачи динамики вязкой стратифицированной жидкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1987. – **27**, № 5. – С. 720 – 729.
10. *Тикиляйнен А. А.* О гироскопических волнах в средах с течением и вращением, переменными во времени // Там же. – 1990. – **30**, № 2. – С. 270 – 277.
11. *Тикиляйнен А. А.* Об одном методе решения задачи Коши для некоторого класса уравнений математической физики // Там же. – 1989. – **29**, № 8. – С. 1144 – 1152.
12. *Ляшко С. И., Номировский Д. А.* Обобщенное решение и оптимальное управление в системах, описывающих динамику вязкой стратифицированной жидкости // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 1. – С. 84 – 91.
13. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.
14. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
15. *Номировский Д. А.* Разрешимость и траекторно-финальная управляемость псевдогиперболических систем // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 12. – С. 1707 – 1716.

Одержано 03.09.2004,
після доопрацювання — 17.11.2005