УДК 512.542

В. Г. Сафонов (Гомел. ун-т, Беларусь)

О МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We study τ-closed totally saturated formations of finite groups.

Вивчаються τ-замкнені тотально насичені формації скінченних груп.

1. Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Развитие формационных методов исследования непростых конечных групп неразрывно связано с изучением внутреннего строения формаций того или иного типа. Универсальными инструментами таких исследований являются методы и конструкции общей теории решеток. Доказанная в 1986 г. А. Н. Скибой [1] модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех насыщенных формаций дала возможность использовать решеточные методы для решения многих открытых вопросов теории формаций.

Основные понятия и результаты теории тотально насыщенных формаций изложены в монографиях [2, 3]. Исследование различных свойств тотально насыщенных формаций проведено в работах [4–6]. Так, в работе [4] описаны тотально насыщенные формации, все тотально насыщенные подформации которых наследственны. Н. Н. Воробьевым [5] установлена индуктивность решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций. В работе [6] изучены тотально насыщенные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка тотально насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, является решеткой с дополнениями. В работе автора [7] описаны неоднопорожденные тотально насыщенные формации, у которых все собственные тотально насыщенные подформации однопорождены.

В 1997 г. А. Н. Скибой был поставлен следующий вопрос: модулярна ли решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций (см. [3], вопрос 4.2.14)?

В данной работе дается положительный ответ на этот вопрос. Основной результат анонсирован в [8, 9]. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [2, 3].

Напомним некоторые из используемых определений и обозначений. Непустую систему формаций θ называют полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из θ также принадлежит θ и во множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$. Формации из θ называют θ-формациями.

Пусть A, B — группы, $\varphi :\ A \to\ B$ — эпиморфизм, Ω и Σ — некоторые системы подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ω^{φ} обозначим множество $\{H^{\varphi} \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ — множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех групп из Σ.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп и любой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Следуя А. Н. Скибе [3], будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (или, иначе, τ — подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для любого эпиморфизма $\varphi :\ A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\varphi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор τ называется тривиальным, если $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{X}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Любую формацию конечных групп называют 0-кратно насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно насыщенной, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию, n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n, называют тотально насыщенной. Если при этом формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой n-кратно насыщенной и, соответственно, τ-замкнутой тотально насыщенной формацией.

Относительно операций $\vee_\infty^\tau$ и $\cap$ совокупность всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций l_∞^τ является полной решеткой формаций (для любых $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ из l_∞^τ через $\mathfrak{M} \vee_\infty^\tau \mathfrak{H}$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{M} \vee_\infty^\tau \mathfrak{H} = l_\infty^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$).

Экран, все непустые значения которого — l_∞^τ-формации, называется l_∞^τ-значным.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая система l_∞^τ-значных экранов. Тогда через $\vee_\infty^\tau(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой экран f, что $f(p) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(\cup_{i \in I} f_i(p))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. В противном случае полагают $f(p) = \varnothing$.

Полную решетку формаций θ называют индуктивной, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i | \, i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^l$ и для любого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних θ-значных экранов f_i, где f_i — экран формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF(\vee_\theta(\, f_i \mid i \in I)).$$

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают

$$\mathfrak{X}_\infty^\tau(p) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(G/F_p(G) | G \in \mathfrak{X}),$$

если $p \in \pi(\mathfrak{X})$, и $\mathfrak{X}_\infty^\tau(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$.

Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n}$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (A/F_{p_1}(A) | A \in \mathfrak{X})$;
2) $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n} = (A/F_{p_n}(A) | A \in \mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}})$.

Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называют подходящей для $\mathfrak{X}$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число $p_i \in \pi(\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}})$.

Для произвольной τ-замкнутой тотально насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}_\infty^\tau$ обозначают ее минимальный l_∞^τ-значный локальный экран. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ последовательность. Тогда тотально локальный экран $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 = (\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1))_\infty^\tau$;
2) $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 \ldots p_n = \left(\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 \ldots p_{n-1}(p_n)\right)_\infty^\tau$.

2. Вспомогательные результаты. Для доказательства основного результата нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций групп, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1 [2, с. 32]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщенна в том и только в том случае, когда для любого простого числа p имеет место $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_\infty^\tau(p) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 2 [2, с. 33]. *Пусть* $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{X}$ — *непустой класс групп. Тогда если* f — *минимальный* l_∞^τ*-значный экран формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \mathfrak{X}_\infty^\tau(p) = \mathfrak{F}_\infty^\tau(p)$ *при всех простых числах* p;

3) *если* h — *произвольный* l_∞^τ*-значный экран формации* $\mathfrak{F}$, *то при любом* $p \in \pi(\mathfrak{X})$ *имеет место* $f(p) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(A | A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\, O_p(A) = 1)$.

Лемма 3 [2, с. 41]. *Пусть* A — *монолитическая группа с неабелевым монолитом,* $\mathfrak{M}$ — *некоторая* τ*-замкнутая полуформация и* $A \in l_n^\tau \mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Лемма 4 [2, с. 78]. *Если* $\mathfrak{F} = LF(f)$ *и* $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 5 [3, с.152]. *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_k = \mathrm{Soc}(G)$, *где* $k > 1$, G — *группа с* $O_p(G) = 1$, *и* M_i — *наибольшая нормальная в* G *подгруппа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$, *но не содержащая* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *фактор-группа* G/M_i *монолитична и ее монолит* $N_i M_i / M_i$ G*-изоморфен* N_i *и* $O_p(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$.

Лемма 6 [2, с. 75]. *Множество тотально насыщенных формаций является подполугруппой в полугруппе всех формаций.*

Лемма 7 [3, с.41]. *Пусть* A — *монолитическая группа с монолитом* $R \not\subseteq \Phi(A)$. *Тогда формация* $\mathfrak{F} = \tau \mathrm{form} A$ τ*-неприводима и в ней имеется единственная максимальная* τ*-замкнутая подформация* $\mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}(\{A/R\} \cup \mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ — *совокупность всех собственных* τ*-подгрупп группы* A.

Следующая лемма является частным случаем леммы 4.1.2 [3, с. 152].

Лемма 8. *Пусть* $\mathfrak{F}_i \in l_\infty^\tau$, $i \in I$. *Тогда* $\vee_\infty^\tau (\mathfrak{F}_{i\,\infty}^\tau | i \in I)$ — *минимальный* l_∞^τ*-значный локальный экран формации* $\vee_\infty^\tau (\mathfrak{F}_i | i \in I)$.

Лемма 9 [5]. *Решетка всех* τ*-замкнутых тотально насыщенных формаций* l_∞^τ *индуктивна.*

3. Модулярность решетки l_∞^τ**.** Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутые тотально насыщенные формации, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда для любой подходящей для $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ последовательности простых чисел $p_1, \ldots, p_n$ через $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau$, $\widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau$, $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau p_1$, $\widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau p_1, \ldots, \widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau p \ldots p_n, \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau p \ldots p_n$ обозначим такие l_∞^τ-значные локальные экраны, что

$$\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau = \mathfrak{X}_\infty^\tau \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M}_\infty^\tau \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau), \qquad \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau = (\mathfrak{X}_\infty^\tau \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}_\infty^\tau) \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau,$$

$$\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau p_1 = \mathfrak{X}_\infty^\tau p_1 \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M}_\infty^\tau p_1 \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau p_1), \qquad \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau p_1 = (\mathfrak{X}_\infty^\tau p_1 \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}_\infty^\tau p_1) \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau p_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n = \mathfrak{X}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n),$$

$$\widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n = (\mathfrak{X}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n) \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Доказательство следующей леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{F}_i \in l_\infty^\tau$, $i \in I$. *Тогда если* $\mathfrak{F} = \cap(\mathfrak{F}_i | i \in I)$, *то* $f = \cap(\mathfrak{F}_{i\,\infty}^\tau | i \in I)$ — *внутренний* l_∞^τ*-значный локальный экран формации* $\mathfrak{F}$.

Лемма 11. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{F}$ — τ*-замкнутые тотально насыщенные формации,* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. *Тогда если* $\mathfrak{L} = \mathfrak{X} \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = (\mathfrak{X} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$, *то*:

1) $\pi(\mathfrak{L}) = \pi(\mathfrak{H})$;

2) *для любой подходящей для $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ последовательности простых чисел $p_1, \ldots, p_n$ экраны $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty$, $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty$, $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty p_1$, $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty p_1, \ldots$, $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_n$, $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_n$ являются внутренними l^τ_∞-значными локальными экранами формаций $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{H}$, $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty(p_1)$, $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty(p_1), \ldots, \widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{n-1}(p_n)$, $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{n-1}(p_n)$ соответственно.*

Доказательство. Покажем справедливость п. 1 леммы. Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\pi(\mathfrak{L}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{H}) \setminus \pi(\mathfrak{L})$. Тогда $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{X} \vee^\tau_\infty \mathfrak{M})$. Обозначим через t минимальный l^τ_∞-значный локальный экран формации $\mathfrak{X} \vee^\tau_\infty \mathfrak{M}$. Согласно лемме 8 $t(p) = \mathfrak{X}^\tau_\infty(p) \vee^\tau_\infty \mathfrak{M}^\tau_\infty(p)$. Поскольку $p \in \pi(\mathfrak{X} \vee^\tau_\infty \mathfrak{M})$, то $t(p) \neq \varnothing$. Если же $p \notin \pi(\mathfrak{X}) \cup \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{X}^\tau_\infty(p) = \varnothing$ и $\mathfrak{M}^\tau_\infty(p) = \varnothing$. Следовательно, $t(p) = \varnothing$. Противоречие. Значит, $p \in \pi(\mathfrak{X}) \cup \pi(\mathfrak{M})$. Но тогда $p \in \pi(\mathfrak{L})$. Таким образом, $\pi(\mathfrak{L}) = \pi(\mathfrak{H})$.

Докажем теперь п. 2. Поскольку $\mathfrak{X}^\tau_\infty$, $\mathfrak{M}^\tau_\infty$, $\mathfrak{F}^\tau_\infty$ — минимальные l^τ_∞-значные локальные экраны формаций $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, согласно лемме 8 $t = \mathfrak{X}^\tau_\infty \vee^\tau_\infty \mathfrak{M}^\tau_\infty$ — минимальный l^τ_∞-значный экран формации $\mathfrak{X} \vee^\tau_\infty \mathfrak{M}$. Поэтому в силу леммы 10 $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty = t \cap \mathfrak{F}^\tau_\infty$ — внутренний l^τ_∞-значный локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Далее, поскольку согласно лемме 10 $k = \mathfrak{M}^\tau_\infty \cap \mathfrak{F}^\tau_\infty$ — внутренний l^τ_∞-значный локальный экран формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$, в силу леммы 9 $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty = \mathfrak{X}^\tau_\infty \vee^\tau_\infty k$ — внутренний l^τ_∞-значный локальный экран формации $\mathfrak{L}$.

Таким образом, $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty$ и $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty$ — внутренние l^τ_∞-значные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $p_1, \ldots, p_n$ — некоторая подходящая для $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ последовательность простых чисел. Тогда, так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, данная последовательность является подходящей и для $\mathfrak{F}$. Поскольку по определению $\mathfrak{X}^\tau_\infty p_1 \ldots p_i$, $\mathfrak{M}^\tau_\infty p_1 \ldots p_i$, $\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 \ldots p_i$ — минимальные l^τ_∞-значные локальные экраны формаций $\mathfrak{X}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{i-1}(p_i)$, $\mathfrak{M}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{i-1}(p_i)$ и $\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{i-1}(p_i)$, $i = \overline{1, n}$, соответственно, снова применяя леммы 8–10, получаем, что $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_i$, $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_i$ — внутренние l^τ_∞-значные локальные экраны формаций $\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{i-1}(p_i)$ и $\widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty p_1 \ldots p_{i-1}(p_i)$ соответственно.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустая наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$, $H \in \tau(G)$. Покажем, что $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. В силу наследственности формации $\mathfrak{M}$ и τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ утверждение очевидно, если $G \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Пусть $G \notin \mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}$. Поскольку $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$, то $K = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$.

Если $H \subseteq K$, то так как $K \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, $H \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{F}$.

Пусть $H \nsubseteq K$. Если при этом $H \in \mathfrak{M}$, то $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Следовательно, $H \notin \mathfrak{M}$. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi : G \to G/K$. Поскольку $H^\varphi = HK/K$ и $(\tau(G))^\varphi \subseteq \tau(G/K)$, то $HK/K \in \tau(G/K) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $HK/K \in \mathfrak{F}$. Вследствие изоморфизма $HK/K \simeq H/H \cap K$ имеем $H/H \cap K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap K$. Поскольку $K \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, то $H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$. Значит, $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация.*

Доказательство. Как известно (см. пример 1.3.3 [3, с. 28]), произведение $\mathfrak{N}^n(\mathfrak{S}\mathfrak{F})$ является n-кратно насыщенной формацией $(n \geq 1)$. Но $\mathfrak{N}^n(\mathfrak{S}\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Поэтому формация $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ является n-кратно насыщенной при любом целом неотрицательном n. Следовательно, $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. В силу леммы 12 формация $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутые тотально насыщенные формации $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{X} \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap (\mathfrak{X} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M})$, A — монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда если $A \in \mathfrak{H}$, то $A \in \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Пусть A — группа из условия леммы. Тогда $A \in \mathfrak{X} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M} = l_\infty^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$. В силу леммы 13 $\mathfrak{S}\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}) \in l_\infty^\tau$. Значит,

$$l_\infty^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{S}\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}).$$

Поскольку A — монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой, то $A \in \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$. Но тогда согласно лемме 3 $A \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}$. Поэтому

$$A \in \mathfrak{X} \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{X} \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{L}.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций l_∞^τ модулярна.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие τ-замкнутые тотально насыщенные формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ и

$$\mathfrak{X} \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \neq (\mathfrak{X} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}.$$

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{X} \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = (\mathfrak{X} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$. Поскольку включение $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ очевидно, то $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{L}$. Выберем в $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$ группу минимального порядка A. Тогда A — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{L}$-группа и $\mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{L}} \not\subseteq \Phi(A)$. Предположим, что $P = \mathrm{Soc}(A)$ — неабелева группа. Тогда, поскольку $A \in \mathfrak{H} = (\mathfrak{X} \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$, в силу леммы 14 имеем $A \in \mathfrak{L}$. Противоречие. Поэтому P — абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{H})$. В силу леммы 11 $\pi(\mathfrak{L}) = \pi(\mathfrak{H})$ и, кроме того, формации $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ имеют такие внутренние l_∞^τ-значные экраны $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau$ и $\widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau$ соответственно, что

$$\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) = \mathfrak{X}_\infty^\tau(p) \vee_\infty^\tau (\mathfrak{M}_\infty^\tau(p) \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau(p)),$$

$$\widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p) = (\mathfrak{X}_\infty^\tau(p) \vee_\infty^\tau \mathfrak{M}_\infty^\tau(p)) \cap \mathfrak{F}_\infty^\tau(p).$$

Поэтому A не является p-группой и $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) \neq \varnothing$. Поскольку $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $P = O_p(A) = F_p(A)$ и $A = [P]A_1$, где A_1 — некоторая максимальная подгруппа из A. Отметим, что поскольку включение $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) \subseteq \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p)$ очевидно и $A \notin \mathfrak{L}$, то $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) \subset \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p)$. Действительно, если $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) = \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p)$, то

$$A/O_p(A) = A/F_p(A) \in \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p) = \widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p),$$

и тогда согласно лемме 4 $A \in \mathfrak{L}$, что невозможно. Заметим также, что условие $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) \subset \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p)$ влечет $\mathfrak{X}_\infty^\tau(p) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}_\infty^\tau(p) \neq \varnothing$, так как в противном случае $\widehat{\mathfrak{L}}_\infty^\tau(p) = \widehat{\mathfrak{H}}_\infty^\tau(p)$. Следовательно, $p \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \pi(\mathfrak{M})$.

Таким образом, $A_1 \simeq A/F_p(A) \in \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}(p) \setminus \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p)$.

Поскольку $A_1 \notin \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p) \neq \varnothing$, найдется такое простое число $p_1 \in \pi(A_1)$, что $A_1/F_{p_1}(A_1) \notin \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)$. Согласно лемме 11 $\pi(\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p)) = \pi(\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}(p))$ и формации $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p)$ и $\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}(p)$ имеют такие внутренние l^{τ}_{∞}-значные локальные экраны $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p$ и $\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p$ соответственно, что

$$\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) = \mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \vee^{\tau}_{\infty} (\mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p(p_1)),$$

$$\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) = (\mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \vee^{\tau}_{\infty} \mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}p(p_1)) \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p(p_1).$$

Далее, так как $p_1 \in \pi(\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}(p))$, то $p_1 \in \pi(\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p))$ и $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \neq \varnothing$. Очевидно, $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \subseteq \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)$. Кроме того, поскольку $A_1/F_{p_1}(A_1) \in \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \setminus \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)$, то $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \subset \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)$. Поэтому $\mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \neq \varnothing$. Следовательно, $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}(p)) \cap \pi(\mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}(p))$.

Допустим, что $F_{p_1}(A_1) = 1$. Тогда, очевидно, любая минимальная нормальная подгруппа из A_1 является неабелевой p_1d-группой. Если A_1 — монолитическая группа, то, так как

$$A_1 \in \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}(p) = (\mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}(p) \vee^{\tau}_{\infty} \mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}(p)) \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(p),$$

в силу леммы 14 получаем

$$A_1 \in \mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}(p) \vee^{\tau}_{\infty} (\mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}(p) \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(p)) = \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p).$$

Противоречие. Поэтому группа A_1 не является монолитической.

Пусть $\mathrm{Soc}(A_1) = N_1 \times \ldots \times N_k$, $k \geq 2$, где $\{N_1, \ldots, N_k\}$ — совокупность всех минимальных нормальных подгрупп группы A_1. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы A_1, содержащую $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$ и не содержащую N_i. Тогда в силу леммы 5 $B_i = A_1/M_i$ — монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой N_iM_i/N_i, A_1-изоморфной N_i. Поскольку $B_i \in \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}(p) = (\mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}(p) \vee^{\tau}_{\infty} \mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}(p)) \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(p)$, применяя лемму 14, получаем, что $B_i \in \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p)$. Но тогда в силу леммы 5 $A_1 \in \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}(p)$ как подпрямое произведение групп, изоморфных $B_1, \ldots, B_k$. Противоречие. Поэтому остается заключить, что $F_{p_1}(A_1) \neq 1$. Заметим также, что $F_{p_1}(A_1) \neq A_1$, так как в противном случае $A_1/F_{p_1}(A_1) \simeq 1 \in \mathfrak{L}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \neq \varnothing$, что противоречит выбору p_1.

Таким образом,

$$A_1/F_{p_1}(A_1) \in \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \setminus \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1), \qquad \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \neq \varnothing,\ 1 \neq F_{p_1}(A_1) \subset A_1.$$

Пусть $A_2 = A_1/F_{p_1}(A_1)$. Согласно лемме 11 $\pi(\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)) = \pi(\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1))$, формации $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)$ и $\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}p(p_1)$ имеют такие внутренние l^{τ}_{∞}-значные локальные экраны $\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}pp_1$ и $\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}pp_1$ соответственно, что

$$\widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}pp_1 = \mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}pp_1 \vee^{\tau}_{\infty} (\mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}pp_1 \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}pp_1),$$

$$\widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}pp_1 = (\mathfrak{X}^{\tau}_{\infty}pp_1 \vee^{\tau}_{\infty} \mathfrak{M}^{\tau}_{\infty}pp_1) \cap \mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}pp_1.$$

Поскольку $A_2 \notin \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}p(p_1) \neq \varnothing$, найдется такое $p_2 \in \pi(A_2)$, что $A_2/F_{p_2}(A_2) \notin$ $\notin \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}pp_1(p_2)$. Значит,

$$A_2/F_{p_2}(A_2) \in \widehat{\mathfrak{H}}^{\tau}_{\infty}pp_1(p_2) \setminus \widehat{\mathfrak{L}}^{\tau}_{\infty}pp_1(p_2).$$

Проведя для группы A_2 такие же рассуждения, как и для группы A_1, получим, что $p_2 \in \pi(\mathfrak{X}^\tau_\infty p(p_1)) \cap \pi(\mathfrak{M}^\tau_\infty p(p_1))$,

$$A_2/F_{p_2}(A_2) \in \widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty pp_1(p_2) \setminus \widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty pp_1(p_2), \qquad \widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty pp_1(p_2) \neq \varnothing, \quad 1 \neq F_{p_2}(A_2) \subset A_2.$$

Пусть $A_3 = A_2/F_{p_2}(A_2)$. Тогда по тем же соображениям группа A_3 будет удовлетворять аналогичным условиям. Поэтому, продолжив этот процесс, получим группы $A_4 = A_3/F_{p_3}(A_3), \ldots, A_n = A_{n-1}/F_{p_{n-1}}(A_{n-1}), \ldots$. При этом для любого i выполняются условия

$$A_i = A_{i-1}/F_{p_{i-1}}(A_{i-1}) \in \widehat{\mathfrak{H}}^\tau_\infty pp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}) \setminus \widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty pp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}),$$
$$\widehat{\mathfrak{L}}^\tau_\infty pp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}) \neq \varnothing, \qquad 1 \neq F_{p_{i-1}}(A_{i-1}) \subset A_{i-1}.$$

В силу условия $F_{p_{i-1}}(A_{i-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп $A, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ имеем

$$|A| > |A_1| > |A_2| > |A_3| > \ldots > |A_n| > \ldots.$$

Поскольку группа A конечна, то через некоторое число шагов m получим $A_m = 1$. Далее, так как при этом $A_m = A_{m-1}/F_{p_{m-1}}(A_{m-1})$, то $F_{p_{m-1}}(A_{m-1}) = A_{m-1}$. Противоречие.

Таким образом, наше предположение неверно и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Для любых двух τ-замкнутых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ имеет место решеточный изоморфизм*

$$\mathfrak{M} \vee^\tau_\infty \mathfrak{F}/^\tau_\infty \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{F}/^\tau_\infty \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}.$$

1. *Скиба А. Н* О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135 – 149.
2. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
3. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
4. *Каморников С. Ф.* О некоторых свойствах тотально локальных формаций // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 1. – С. 24 – 29.
5. *Воробьев Н. Н.* Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп // Вопросы алгебры. – 1999. – Вып. 14. – С. 132 – 140.
6. *Guo W., Shum K. P.* On totally local formations of groups // Communs Algebra. – 2002. – **30**, № 5. – P. 2117 – 2131.
7. *Сафонов В. Г.* Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп // Алгебра и логика. – 2003. – **42**, № 6. – С. 727 – 736.
8. *Сафонов В. Г.* О свойствах решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций. – Гомель, 2004. – 26 с. – (Препринт / Гомел. ун-т; № 3).
9. *Сафонов В. Г.* О решетке всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций // Материалы междунар. конф. „Алгебра, логика и кибернетика”. – Иркутск, 2004. – С. 93.

Получено 12.04.2005