УДК 517.54

А. К. Бахтин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНЫМИ ПОЛЮСАМИ НА ОКРУЖНОСТИ*

Let $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ and let $r(B, a)$ denote the inner radius of a domain B lying in the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}}$ with respect to a point $a \in B$. In terms of quadratic differentials, we give the complete description of extremal configurations in the problem of maximization of the functional $\left(\frac{r(B_1, a_1)\ r(B_3, a_3)}{|a_1 - a_3|^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r(B_2, a_2)\ r(B_4, a_4)}{|a_2 - a_4|^2}\right)^{\alpha_2}$ that is defined on all collections consisting of points $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ and mutually disjoint domains $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ such that $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, $a_3 \in B_3$, and $a_4 \in B_4$.

Нехай $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ та $r(B, a)$ — внутрішній радіус області B, що лежить у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$, відносно точки $a \in B$. У термінах квадратичних диференціалів отримано повний опис екстремальних конфігурацій в задачі максимізації функціонала $\left(\frac{r(B_1, a_1)\ r(B_3, a_3)}{|a_1 - a_3|^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r(B_2, a_2)\ r(B_4, a_4)}{|a_2 - a_4|^2}\right)^{\alpha_2}$, визначеного на всіх наборах, що складаються з точок $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ та областей $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$, які попарно не перетинаються між собою, таких, що $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, $a_3 \in B_3$, $a_4 \in B_4$.

Введение. В теории однолистных функций экстремальные задачи о неналегающих областях составляют активно развивающееся направление. Возникновение этого направления связано с классической работой М. А. Лаврентьева [1], в которой была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей. Впоследствии эта тематика развивалась во многих работах (см., например, [2 – 14]).

В настоящей статье рассматриваются новые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности. Первая задача подобного рода была предложена в [5].

Сформулируем основные результаты работы. Как обычно, $\overline{\mathbb{C}}$ — стандартная одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^n$ — система попарно непересекающихся областей в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. При каждом $k = \overline{1, n}$ только конечное число компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k$ могут содержать внутри себя какую-то из областей B_j, $j = \overline{1, n}$, $j \neq k$; такие компоненты мы называем существенными. Область, полученную исключением из $\overline{\mathbb{C}}$ всех существенных компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k$, будем обозначать $\tilde{B}_k$. Ясно, что $B_k \subset \tilde{B}_k$, $k = \overline{1, n}$, и $\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^n$ — система конечносвязных взаимно непересекающихся об-

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0102U000917.

ластей без изолированных граничных точек. Эту систему областей будем называть *заполнением* системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$.

Для области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точки $a \in B$ обозначим через $r(B, a)$ внутренний радиус области B относительно точки a. Для борелевского множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ через $\operatorname{cap} E$ обозначим его логарифмическую емкость. (Все необходимые определения даны в следующей части работы.) Как обычно, i — мнимая единица.

Всюду ниже α_1 и α_2 — положительные действительные числа. Пусть точки a_k^0 и области B_k^0 являются соответственно полюсами и круговыми областями *квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)w^4 - 2(\alpha_2 + \alpha_1)w^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)}{(w^4 - 1)^2}\,dw^2, \tag{1}$$

$a_k^0 = i^{k-1} \in B_k^0$, $k = \overline{1,4}$. Положим

$$M_0(\alpha_1, \alpha_2) := \left(\frac{r(B_1^0, a_1^0)\; r(B_3^0, a_3^0)}{\left|a_1^0 - a_3^0\right|^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r(B_2^0, a_2^0)\; r(B_4^0, a_4^0)}{\left|a_2^0 - a_4^0\right|^2}\right)^{\alpha_2}.$$

В принятых выше обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Каковы бы ни были точки* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{T}$ *и попарно непересекающиеся области* $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $0 \le \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ *и* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, *имеет место неравенство*

$$\left(\frac{r(B_1, a_1)\; r(B_3, a_3)}{|a_1 - a_3|^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r(B_2, a_2)\; r(B_4, a_4)}{|a_2 - a_4|^2}\right)^{\alpha_2} \le M_0(\alpha_1, \alpha_2). \tag{2}$$

Знак равенства в (2) *достигается в том и только в том случае, когда выполнены равенства* $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$ *и существует такое дробно-линейное отображение* S, *являющееся автоморфизмом единичного круга* $\mathbb{D}$, *что* $a_k = S(a_k^0)$ *и* $\tilde{B}_k = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$.

Этот результат был ранее установлен автором [15] при дополнительном требовании односвязности областей B_1, B_2, B_3, B_4. Поскольку для односвязных областей гиперболического типа внутренний радиус совпадает с *конформным*, для этого случая теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

***Следствие* 1.** *Каковы бы ни были функции* f_1, f_2, f_3 *и* f_4, *конформно и однолистно отображающие единичный круг* $\mathbb{D}$ *на попарно непересекающиеся области в* $\overline{\mathbb{C}}$ *и такие, что*

$$|f_1(0)| = |f_2(0)| = |f_3(0)| = |f_4(0)| = 1,$$

$$0 \le \arg f_1(0) < \arg f_2(0) < \arg f_3(0) < \arg f_4(0) < 2\pi,$$

имеет место неравенство

$$\left|\frac{f_1'(0)\, f_3'(0)}{f_1(0) - f_3(0)}\right|^{\alpha_1} \left|\frac{f_2'(0)\, f_4'(0)}{f_2(0) - f_4(0)}\right|^{\alpha_2} \le M_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

знак равенства в котором достигается в том и только в том случае, когда су-

ществует такое дробно-линейное отображение S, *являющееся автоморфизмом единичного круга* $\mathbb{D}$, *что* $f_k(0) = S(a_k^0)$ *и* $f(B_k) = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$.

Отметим в связи с формулировкой теоремы 1 и следствия 1, что точки a_k^0 и области B_k^0, $k = \overline{1,4}$, используются в качестве экстремального набора в работе [12].

Пусть точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{T}$ и попарно непересекающиеся области $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ выбраны такими, что $0 \le \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$. Тогда, используя теорему 1 и очевидные неравенства $|a_1 - a_3| \le 2$ и $|a_2 - a_4| \le 2$, получаем двойное неравенство

$$\left(r(B_1, a_1)\, r(B_3, a_3)\right)^{\alpha_1} \left(r(B_2, a_2)\, r(B_4, a_4)\right)^{\alpha_2} \le$$

$$\le \left(\frac{r(B_1, a_1)\; r(B_3, a_3)}{2^{-2}|a_1 - a_3|^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r(B_2, a_2)\; r(B_4, a_4)}{2^{-2}|a_2 - a_4|^2}\right)^{\alpha_2} \le 4^{\alpha_1+\alpha_2} M_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

причем знак равенства в первом неравенстве достигается в том и только в том случае, когда $a_1 = -a_3$ и $a_2 = -a_4$, а во втором — когда имеет место равенство в (2). Поскольку любой автоморфизм круга $\mathbb{D}$, переводящий две пары диаметрально противоположных точек в пары точек $\{1, -1\}$ и $\{i, -i\}$, является вращением относительно начала координат O, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2** [14, 16]. *Каковы бы ни были точки* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{T}$ *и попарно непересекающиеся области* $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $0 \le \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ *и* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, *имеет место неравенство*

$$\left(r(B_1, a_1)\, r(B_3, a_3)\right)^{\alpha_1} \left(r(B_2, a_2)\, r(B_4, a_4)\right)^{\alpha_2} \le 4^{\alpha_1+\alpha_2} M_0(\alpha_1, \alpha_2). \tag{3}$$

Знак равенства в (3) *достигается в том и только в том случае, когда выполнены равенства* $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$ *и существует такое вращение* S *плоскости* $\mathbb{C}$ *относительно начала координат* O, *что* $a_k = S(a_k^0)$ *и* $\tilde{B}_k = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$.

Следствие 2 содержит в себе результат Г. В. Кузьминой [11], которая доказала неравенство (3) для случая, когда $a_1 = -a_3 = 1$, $a_2 = e^{i\varphi}$, $a_4 = e^{-i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$, а области B_1, B_2, B_3 и B_4 односвязны.

В следующей теореме n — натуральное число, $n \ge 3$.

Теорема 2. *Каковы бы ни были точки* $a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{T}$, $a_{2n+1} := a_1$, *и попарно непересекающиеся области* $B_1, \ldots, B_{2n} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $0 \le \arg a_1 < \ldots$ $\ldots < \arg a_{2n} < 2\pi$, $a_{2k-1} \in B_{2k-1}$ *и* $a_{2k} \in B_{2k} \subset \{z \in \mathbb{C} : \arg a_{2k-1} < \arg z < \arg a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, *имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(r(B_{2k-1}, a_{2k-1})\right)^{\alpha_1} \left(r(B_{2k}, a_{2k})\right)^{\alpha_2} \le \left(\frac{4}{n}\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)} \left(M_0(\alpha_1, \alpha_2)\right)^{n/2}, \tag{4}$$

знак равенства в котором достигается в том и только в том случае, когда выполнены равенства $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$ *и существует вращение* S *плоскости*

$\mathbb{C}$ *относительно начала координат* O, *переводящее точки* a_k *и области* $\tilde{B}_k$ *в соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = w^{n-2}\frac{(\alpha_2-\alpha_1)w^{2n}-2(\alpha_2+\alpha_1)w^n+(\alpha_2-\alpha_1)}{(w^{2n}-1)^2}\,dw^2, \qquad (5)$$

такое, что $S(a_1)=1$, $k=\overline{1,2n}$.

В работе [11] показано, что теорема 2 остается в силе, если в ее формулировке заменить условие

$$B_{2k}\subset\{z\in\mathbb{C}:\arg a_{2k-1}<\arg z<\arg a_{2k+1}\},\quad k=\overline{1,n},$$

на односвязность всех областей B_k.

Работа состоит из трех частей. В первой мы вводим обозначения, напоминаем необходимые определения и приводим вспомогательные результаты. Вторая и третья части посвящены доказательству соответственно теорем 1 и 2.

1. Определения и вспомогательные результаты. Пусть G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $G\neq\overline{\mathbb{C}}$. Напомним, что функцией Грина области G называется такая вещественная функция $g_G(z,w)$, определенная при всех z, $w\in G$, $z\neq w$, что при каждом фиксированном $w\in G$ выполнены следующие условия: а) функция $g_G(z,w)$ гармонична как функция от z в области $G\setminus\{w\}$; б) если $z\to w$, то $g_G(z,w)\to+\infty$, при этом разность $g_G(z,w)-\log|z-w|^{-1}$ остается ограниченной для конечного w и разность $g_G(z,\infty)-\log|z|$ ограничена для $w=\infty$; в) при приближении к границе ∂G функция $g_G(z,w)$ стремится к нулю. Если для области G существует функция Грина (последнее, например, имеет место в случае, когда ∂G состоит из конечного числа замкнутых жордановых кривых), то из приведенного определения вытекает симметричность и положительность функции g_G (см., например, [2]):

$$g_G(z,w)=g_G(w,z)>0\quad\forall z,w\in G,\quad z\neq w.$$

Произвольную область $G\subset\overline{\mathbb{C}}$ всегда можно исчерпать последовательностью областей $G_1\Subset G_2\Subset\ldots$, для каждой из которых существует функция Грина. В этом случае из теоремы Харнака о возрастающих последовательностях гармонических функций (см., например, [2], гл. 1) следует, что для каждого $w\in$ $\in G\setminus\{\infty\}$ последовательность гармонических функций

$$h_{G_k,w}(z):=g_{G_k}(z,w)-\log\frac{1}{|z-w|},\quad z\in G\setminus\{w\},$$

доопределенная по непрерывности в точке w, равномерно сходится на компактных подмножествах области G при $k\to\infty$ либо к $+\infty$, либо к некоторой гармонической функции $h_{G,w}(z)$, которая не зависит от выбора исчерпывающих областей $G_1, G_2, \ldots$. В последнем случае функция $g_G(z,w):=$ $:=h_{G,w}(z)+\log|z-w|^{-1}$ называется обобщенной функцией Грина области G, а величина $r(G,w):=\exp(h_{G,w}(w))$ — внутренним радиусом области G относительно точки w (см. [9, 17]). В случае, когда последовательность $h_{G_k,w}(z)$ равномерно сходится на компактных подмножествах области G к $+\infty$ при $k\to\infty$, полагаем $r(G,w)=+\infty$. Все изложенное выше справедливо для $w=$ $=\infty$ со следующей модификацией: функции $h_{G_k,\infty}(z)$ определяются равенствами $h_{G_k,\infty}(z):=g_{G_k}(z,\infty)-\log|z|$. Если область G односвязна, $G\neq\mathbb{C}$, то для каждой точки $w \in G$ существует конформное отображение f области G на круг $|z| < r_0$, нормированное условиями $f(w) = 0$ и $f'(w) = 1$. При этом имеет место равенство $r_0 = r(G, w)$, а величина r_0 называется конформным радиусом области G относительно точки w (см. [2, 17]). Каждая область G, для которой существует обобщенная функция Грина, имеет свойство: для всех точек $\zeta \in \partial G$, за исключением, быть может, некоторого множества нулевой логарифмической емкости, и для всех $w \in G$ существует и равен нулю предел $\lim_{z \to \zeta} g_G(z, w)$; такие точки ζ называются регулярными граничными точками области G (см., например, [2]).

В дальнейшем под емкостью будем подразумевать логарифмическую емкость. Для компакта $F \subset \mathbb{C}$ его (логарифмическая) емкость определяется следующими равенствами: $\operatorname{cap} F := 1/r(\overline{\mathbb{C}} \setminus F, \infty)$, если величина $r(\overline{\mathbb{C}} \setminus F, \infty)$ конечна, и $\operatorname{cap} F := 0$ — в противном случае. Для произвольного борелевского множества E, лежащего в $\overline{\mathbb{C}}$, определяем $\operatorname{cap} E$ как точную верхнюю грань величин $\operatorname{cap} F$, взятую по всем компактам $F \subseteq E \bigcap \mathbb{C}$. Отметим, что борелевские множества нулевой емкости всегда имеют нулевую хаусдорфову размерность и при конформных отображениях переходят в множества нулевой емкости.

Напомним теперь определение квадратичного дифференциала — одно из основных в настоящей работе (см. [4, 6]). Пусть $\mathfrak{R}$ — ориентируемая риманова поверхность (открытая или замкнутая). Будем говорить, что на $\mathfrak{R}$ задан квадратичный дифференциал, если каждому локальному параметру z поверхности $\mathfrak{R}$ сопоставлена функция $Q(z)$, мероморфная в соответствующей окрестности и удовлетворяющая следующему условию: если z^* — другой локальный параметр для $\mathfrak{R}$ и $Q^*(z^*)$ — такая же функция для z^*, причем окрестности, соответствующие параметрам z и z^*, пересекаются, то в общих точках этих окрестностей имеет место равенство $Q^*(z^*) = Q(z)\left(\dfrac{dz}{dz^*}\right)^2$. Квадратичные дифференциалы будем обозначать символом $Q(z)dz^2$. Точка $a \in \mathfrak{R}$ называется нулем или полюсом порядка k квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, если для каждого локального параметра z она изображается точкой, которая является нулем или полюсом порядка k для функции $Q(z)$. В дальнейшем будем рассматривать только случай $\mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$.

Траекторией квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ называется максимальная кривая, которая задается уравнением $z = z(t)$, где $z(t)$ — комплекснозначная аналитическая функция вещественного аргумента $t \in (t_1, t_2)$, $-\infty \le t_1 < t_2 \le \infty$, такая, что для всех $t \in (t_1, t_2)$ выполнено неравенство $Q(z(t))\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2 > 0$. Из определения квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ следует, что траектории связаны с ним внутренним образом, т. е. не зависят от выбора локальных параметров.

Область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *круговой областью* квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, если она удовлетворяет следующим условиям: а) любая траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, пересекающаяся с областью G, целиком лежит в G; б) G содержит единственный двойной полюс a дифференциала $Q(z)dz^2$; в) область $G \setminus \{a\}$ заполнена траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых является жордановой кривой, отделяющей точку a от границы области G; г) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c

функция $w = \exp\left\{c\int (Q(z))^{1/2}dz\right\}$, доопределенная равенством $w(a) = 0$, конформно отображает область G на круг $|w| < r$; д) G — максимальная (по включению) область, удовлетворяющая условиям а) – г).

Фундаментальная роль квадратичных дифференциалов, как универсального средства для решения экстремальных задач геометрической теории функций, была впервые отмечена О. Тейхмюллером, сформулировавшим в 1939 г. принцип, согласно которому решение каждой такой задачи связано с некоторым квадратичным дифференциалом. Этот принцип нашел свое выражение в виде так называемой „общей теоремы о коэффициентах”, сформулированной и доказанной позднее Дж. Дженкинсом (см. [4]), которая в дальнейшем дополнялась и уточнялась в работах многих авторов. Другие понятия и результаты, относящиеся к теории квадратичных дифференциалов и их приложениям, а также более подробные исторические комментарии со ссылками на работы указанных выше авторов см. в [4, 6].

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, (r, φ) — полярные координаты в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{O\}$ комплексной переменной $z: z = r\exp i\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Напомним (см., например, [17]), что *круговая симметризация* множества G с центром в начале координат O относительно луча $l_{\varphi_0} := \{\varphi = \varphi_0\}$ определяется как множество G^*, полученное из G следующим образом: $O \in G^* \Leftrightarrow O \in G$; для каждого $\rho > 0$ пересечение множества G^* с окружностью $C_\rho := \{r = \rho\}$ состоит либо из окружности C_ρ, если $C_\rho \subset G$, либо пусто, если $C_\rho \cap G = \varnothing$, либо, если не выполнен ни один из перечисленных выше случаев, является дугой

$$\left\{r = \rho,\ |\varphi - \varphi_0| < \frac{d}{2\rho}\right\},$$

где d — сумма длин дуг множества $C_\rho \cap G$. Отметим следующие свойства круговой симметризации с центром в точке O относительно луча l_{φ_0} (см., например, [17]): а) круговая симметризация открытого множества является открытым множеством; б) круговая симметризация области G является областью, и для каждой точки $a \in G \cap l_{\varphi_0}$ внутренние радиусы области G и симметризованной области G^* удовлетворяют неравенству $r(G, a) \le r(G^*, a)$; в) круговая симметризация односвязной области G является односвязной областью, причем, как показал Дж. Дженкинс [18, 19], если $a \in G \cap l_{\varphi_0}$, то равенство $r(G, a) = r(G^*, a)$ возможно в том и только в том случае, когда области G и G^* совпадают.

При доказательстве теоремы 1 будет использован один вспомогательный результат. Для его формулировки введем следующие обозначения. Пусть $\varphi \in (0, \pi/2]$. Через $\Delta(\varphi)$ обозначим множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные четверки $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ попарно непересекающихся односвязных областей в $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что $1 \in B_1$, $e^{i\varphi} \in B_2$, $-1 \in B_3$, $e^{-i\varphi} \in B_4$. На множестве $\Delta(\varphi)$ рассмотрим функционал J, действие которого на элемент $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4) \in \Delta(\varphi)$ определяется равенством

$$J(\delta) = \left(r(B_1, 1)\, r(B_3, -1)\right)^{\alpha_1} \left(r(B_2, e^{i\varphi})\, r(B_4, e^{-i\varphi})\right)^{\alpha_2}.$$

В принятых обозначениях имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *существует единственный элемент* $\delta^0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0) \in \Delta(\varphi)$ *такой, что* $\sup\limits_{\delta \in \Delta(\varphi)} J(\delta) = J(\delta^0)$;

2) *экстремали* δ^0 *соответствует единственный* (*с точностью до положительного постоянного множителя*) *квадратичный дифференциал*

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{P(w)}{(w^2-1)^2(w^2-e^{2i\varphi})^2}\,dw^2, \tag{6}$$

где $P(w)$ — *полином не выше четвертой степени, причем точки* $a_1^0 = 1$, $a_2^0 = e^{i\varphi}$, $a_3^0 = -1$, $a_4^0 = e^{-i\varphi}$ *и области* $B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0$ *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (6), *а замыкание множества* $\bigcup_{p=1}^4 B_p^0$ *совпадает с расширенной комплексной плоскостью* $\overline{\mathbb{C}}$;

3) *для каждого* $p = 1, 2, 3, 4$ *в некоторой окрестности точки* a_p^0 *имеет место разложение*

$$Q(w)\,dw^2 = \left(-\frac{\mu_p}{(w-a_p^0)^2} + \ldots\right)dw^2,$$

где $\mu_1 = \mu_3 = \alpha_1$, $\mu_2 = \mu_4 = \alpha_2$;

4) *каждая функция* $w = f_p(\zeta)$, $f_p(0) = a_p^0$, *реализующая однолистное и конформное отображение единичного круга* $\mathbb{D}$ *на область* B_p^0, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$Q(w)\,dw^2 = -\mu_p\left(\frac{dz}{z}\right)^2, \qquad p = 1, 2, 3, 4;$$

5) *экстремальные области* B_1^0, B_2^0, B_3^0 *и* B_4^0 *симметричны относительно единичной окружности* $\mathbb{T}$;

6) *структура траекторий квадратичного дифференциала* (6) *имеет центральную симметрию.*

Доказательство. Вначале рассмотрим следующую вспомогательную задачу: для заданного $\varphi \in (0, \pi/2]$ на множестве всех пар (B_1, B_2) непересекающихся односвязных областей $B_1 \ni 1$ и $B_2 \ni e^{2i\varphi}$ таких, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus (B_1 \cup B_2) \supset \{0, \infty\}$ (в дальнейшем будем называть такую пару *допустимой*), найти точную верхнюю грань M величины $r^{\alpha_1}(B_1, 1)\, r^{\alpha_2}(B_2, e^{2i\varphi})$ $\left(r^{\alpha}(B, a) := [r(B, a)]^{\alpha}\right)$. Покажем, что $M < \infty$ и

$$M = r^{\alpha_1}(B_1^0, 1)\, r^{\alpha_2}(B_2^0, e^{2i\varphi}) \tag{7}$$

для единственной допустимой пары (B_1^0, B_2^0).

Для этого для произвольной допустимой пары (B_1, B_2) обозначим через $f_1(z)$ и $f_2(z)$ функции, реализующие однолистные и конформные отображения единичного круга $\mathbb{D}$ на области B_1 и B_2 соответственно. При этом $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = e^{2i\varphi}$, $f_k(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{D}$, $k = 1, 2$. Согласно теореме Кебе (см., например, [4]), для каждой точки $w \in \partial f_1(\mathbb{D})$ выполняется неравенство

$[r(B_1,1)]^{-1}|w-1| \geq 1/4$, откуда $r(B_1,1) \leq \left|1-e^{2i\varphi}\right|$. Аналогично, $r(B_2,e^{2i\varphi}) \leq$ $\leq \left|1-e^{2i\varphi}\right|$ и, следовательно,

$$r^{\alpha_1}(B_1,1)\, r^{\alpha_2}(B_2,e^{2i\varphi}) \;\leq\; \left|1-e^{2i\varphi}\right|^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Поскольку последнее справедливо для произвольной допустимой пары (B_1, B_2), то

$$M \;\leq\; \left|1-e^{2i\varphi}\right|^{\alpha_1+\alpha_2} \;<\; \infty.$$

Пусть $\{(B_1^n, B_2^n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность допустимых пар областей, для которой

$$\lim_{n\to\infty} r^{\alpha_1}(B_1^n,1)\, r^{\alpha_2}(B_2^n,e^{2i\varphi}) \;=\; M,$$

и при каждом $n = 1, 2, \ldots$ функции $f_1^n(z)$ и $f_2^n(z)$ реализуют однолистные и конформные отображения круга $\mathbb{D}$ на области B_1^n и B_2^n соответственно, причем $f_1^n(0) = 1$, $f_2^n(0) = e^{2i\varphi}$, $f_k^n(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{D}$, $k = 1, 2$. Последнее условие означает, что каждая из последовательностей функций $\{f_1^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f_2^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ является нормальным семейством и, согласно теореме Монтеля (см. [2, с. 67 – 70]), существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что каждая из подпоследовательностей функций $\{f_1^{n(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{f_2^{n(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится в круге $\mathbb{D}$ к некоторой регулярной функции, либо к ∞. Случай сходимости к ∞ исключается тем, что $f_1^n(0) = 1$ и $f_2^n(0) = e^{2i\varphi}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, поэтому функции $f_1^0(z) = \lim_{k\to\infty} f_1^{n(k)}(z)$ и $f_2^0(z) = \lim_{k\to\infty} f_2^{n(k)}(z)$ регулярны и однолистны в круге $\mathbb{D}$, области $B_1^0 = f_1^0(\mathbb{D})$ и $B_2^0 = f_2^0(\mathbb{D})$ не пересекаются и удовлетворяют равенству (7). Для дальнейшего исследования экстремальной пары (B_1^0, B_2^0) применим известную вариационную формулу [2, с. 157, 158]

$$w^{\varepsilon} \;=\; w \;+\; \varepsilon w \frac{(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(w-w_1)(w-w_2)},$$

где w_1, $w_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0,1,e^{2i\varphi}\}$, $w_1 \neq w_2$. Функция $w^{\varepsilon}(w)$ регулярна в $\mathbb{C}\setminus\{w_1,w_2\}$ (0, 1, $e^{2i\varphi}$ — ее неподвижные точки) и при достаточно малых комплексных ε она будет однолистной в $\mathbb{C}\setminus\{w_1,w_2\}$ (см. [2, с. 157]). Если w_1 и w_2 являются внутренними точками множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\overline{B_1^0 \cup B_2^0})$, то отсюда следует, что при достаточно малых комплексных ε функции

$$f_1^{\varepsilon}(z) \;=\; f_1^0(z) \;+\; \varepsilon f_1^0(z) \frac{(f_1^0(z)-1)(f_1^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_1^0(z)-w_1)(f_1^0(z)-w_2)}$$

и

$$f_2^{\varepsilon}(z) \;=\; f_2^0(z) \;+\; \varepsilon f_2^0(z) \frac{(f_2^0(z)-1)(f_2^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_2^0(z)-w_1)(f_2^0(z)-w_2)}$$

конформно и однолистно отображают круг $\mathbb{D}$ на области соответственно B_1^{ε} и B_2^{ε}, образующие допустимую пару, и

$$\left|(f_1^{\varepsilon})'(0)\right| = \left|(f_1^{0})'(0)\right|\left\{1 + \operatorname{Re}\frac{\varepsilon(1-e^{2i\varphi})}{(1-w_1)(1-w_2)}\right\},$$

$$\left|(f_2^{\varepsilon})'(0)\right| = \left|(f_2^{0})'(0)\right|\left\{1 + \operatorname{Re}\frac{\varepsilon e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$r^{\alpha_1}(B_1^{\varepsilon},1)\, r^{\alpha_2}(B_2^{\varepsilon},e^{2i\varphi}) = \left|(f_1^{\varepsilon})'(0)\right|^{\alpha_1}\left|(f_2^{\varepsilon})'(0)\right|^{\alpha_2} =$$

$$= \left|(f_1^{0})'(0)\right|^{\alpha_1}\left|(f_2^{0})'(0)\right|^{\alpha_2} \times$$

$$\times \left\{1+|\varepsilon|e^{i\theta}\left[\frac{\alpha_1(1-e^{2i\varphi})}{(1-w_1)(1-w_2)} + \frac{\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right]+O(\varepsilon^2)\right\}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\theta}$. Используя экстремальное свойство пары (B_1^0, B_2^0), заключаем, что при всех $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\left[\frac{\alpha_1(1-e^{2i\varphi})}{(1-w_1)(1-w_2)} + \frac{\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right]\right\} \le 0,$$

и, следовательно,

$$\alpha_1(1-e^{2i\varphi})(w_1-e^{2i\varphi})(w_2-e^{2i\varphi}) + \alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)(w_1-1)(w_2-1) = 0 \tag{8}$$

для всех w_1, w_2, принадлежащих внутренности множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\overline{B_1^0 \cup B_2^0})$. Полагая $w_1 = w$, $w_2 = w+h$ и разлагая левую часть равенства (8) по степеням w, непосредственными вычислениями находим, что коэффициент при w^2 равен $(\alpha_1-\alpha_2 e^{2i\varphi})(1-e^{2i\varphi}) \ne 0$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что множество $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\overline{B_1^0 \cup B_2^0})$ не содержит внутренних точек.

Пусть точки $w_1 = f_1(z_1)$ и $w_2 = f_1(z_2)$ принадлежат области B_1, z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \ne z_2$. Рассмотрим функцию

$$f_{1,\varepsilon}(z) = f_1^0(z) + \varepsilon\frac{f_1^0(z)(f_1^0(z)-1)(f_1^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_1^0(z)-w_1)(f_1^0(z)-w_2)} = g_\varepsilon(f_1^0(z)), \tag{9}$$

где

$$g_\varepsilon(w) := w + \varepsilon w\frac{(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(w-w_1)(w-w_2)} = w\left(1 + \varepsilon\frac{(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(w-w_1)(w-w_2)}\right). \tag{10}$$

При достаточно малых ε функция (9) однолистна и регулярна в некотором кольце $r < |z| < 1$, $r > 0$. Обозначим через B_1^{ε} область, полученную присоединением к образу кольца $r < |z| < 1$ при отображении $f_{1,\varepsilon}$ замкнутой области, внутренней по отношению к образу окружности $|z| = r$ при этом отображении. Применяя к функции $f_{1,\varepsilon}$ вариационную лемму Г. М. Голузина [2, с. 99], заключаем, что существует однолистное конформное отображение f_1^{ε}

круга $\mathbb{D}$ на область B_1^ε такое, что при всех $z \in \mathbb{D}$ справедливо асимптотическое равенство

$$f_1^\varepsilon(z) = f_1^0(z) + \varepsilon \frac{f_1^0(z)(f_1^0(z)-1)(f_1^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_1^0(z)-w_1)(f_1^0(z)-w_2)} -$$

$$- \varepsilon z (f_1^0)'(z) \frac{w_1(w_1-1)(w_1-e^{2i\varphi})}{[z_1(f_1^0)'(z_1)]^2(w_1-w_2)} \frac{z_1}{z-z_1} -$$

$$- \varepsilon z (f_1^0)'(z) \frac{w_2(w_2-1)(w_2-e^{2i\varphi})}{[z_2(f_1^0)'(z_2)]^2(w_2-w_1)} \frac{z_2}{z-z_2} +$$

$$+ \varepsilon z (f_1^0)'(z) \frac{\overline{w_1(w_1-1)(w_1-e^{2i\varphi})}}{[z_1(f_1^0)'(z_1)]^2(w_1-w_2)} \frac{z\bar{z}_1}{1-z\bar{z}_1} +$$

$$+ \varepsilon z (f_1^0)'(z) \frac{\overline{w_2(w_2-1)(w_2-e^{2i\varphi})}}{[z_2(f_1^0)'(z_2)]^2(w_2-w_1)} \frac{z\bar{z}_2}{1-z\bar{z}_2} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \tag{11}$$

При достаточно малых ε функция

$$f_2^\varepsilon(z) := g_\varepsilon\big(f_2^0(z)\big) = f_2^0(z) + \varepsilon \frac{f_2^0(z)(f_2^0(z)-1)(f_2^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_2^0(z)-w_1)(f_2^0(z)-w_2)} \tag{12}$$

однолистно отображает круг $\mathbb{D}$ на односвязную область B_2^ε, причем из (9), (10) и (12) легко заключить, что пара $(B_1^\varepsilon, B_2^\varepsilon)$ будет допустимой (при малых ε). Положим $k^* = 1$ при $k = 2$, $k^* = 2$ при $k = 1$. Из (11) и (12) получаем соотношения

$$\left|(f_1^\varepsilon)'(0)\right| = \left|(f_1^0)'(0)\right| \left| 1 + \varepsilon \frac{1-e^{2i\varphi}}{(1-w_1)(1-w_2)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{k=1}^{2} \frac{f_1^0(z_k)(f_1^0(z_k)-1)(f_1^0(z_k)-e^{2i\varphi})}{(w_k-w_{k^*})\big(z_k(f_1^0)'(z_k)\big)^2} + O(\varepsilon^2) \right|, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\left|(f_2^\varepsilon)'(0)\right| = \left|(f_2^0)'(0)\right| \left| 1 + \varepsilon \frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)} \right|,$$

которые влекут следующую цепочку равенств:

$$r^{\alpha_1}(B_1^\varepsilon, 1)\, r^{\alpha_2}(B_2^\varepsilon, e^{2i\varphi}) = \left|(f_1^\varepsilon)'(0)\right|^{\alpha_1} \left|(f_2^\varepsilon)'(0)\right|^{\alpha_2} =$$

$$= \left|(f_1^0)'(0)\right|^{\alpha_1} \left|(f_2^0)'(0)\right|^{\alpha_2} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \operatorname{Re} \varepsilon \left[\alpha_1 \frac{1-e^{2i\varphi}}{(1-w_1)(1-w_2)} + \alpha_2 \frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_1 \sum_{k=1}^{2} \frac{f_1^0(z_k)(f_1^0(z_k)-1)(f_1^0(z_k)-e^{2i\varphi})}{(w_k-w_{k^*})\big(z_k(f_1^0)'(z_k)\big)^2} \right] + O(\varepsilon^2) \right\}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Поскольку

$$\left|(f_1^0)'(0)\right|^{\alpha_1}\left|(f_2^0)'(0)\right|^{\alpha_2} = r^{\alpha_1}(B_1^0,1)\,r^{\alpha_2}(B_2^0,e^{2i\varphi}),$$

отсюда вытекает равенство

$$\alpha_1\frac{f_1^0(z_1)(f_1^0(z_1)-1)(f_1^0(z_1)-e^{2i\varphi})}{(w_1-w_2)\big(z_1(f_1^0)'(z_1)\big)^2} -$$

$$-\ \alpha_1\frac{f_1^0(z_2)(f_1^0(z_2)-1)(f_1^0(z_2)-e^{2i\varphi})}{(w_1-w_2)\big(z_2(f_1^0)'(z_2)\big)^2} +$$

$$+\ \frac{\alpha_1(1-e^{2i\varphi})}{w_1-w_2}\left[\frac{1}{w_2-1}-\frac{1}{w_1-1}\right] +$$

$$+\ \frac{\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{w_1-w_2}\left[\frac{1}{w_2-e^{2i\varphi}}-\frac{1}{w_1-e^{2i\varphi}}\right] = 0.$$

Полагая в этом равенстве $w_1 = w+h$, $w_2 = w$ и переходя к пределу при $h\to 0$, последовательно получаем

$$\frac{d}{dw}\left[\alpha_1\frac{w(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(z(f_1^0)'(z))^2}-\alpha_1\frac{1-e^{2i\varphi}}{w-1}-\alpha_2\frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{w-e^{2i\varphi}}\right] = 0,$$

$$\alpha_1\frac{w(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(z(f_1^0)'(z))^2} = \alpha_1\frac{1-e^{2i\varphi}}{w-1}+\alpha_2\frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{w-e^{2i\varphi}}+\mathrm{const}.$$

В терминах квадратичных дифференциалов это означает, что функция $w = f_1^0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$-\alpha_1\frac{dz^2}{z^2} = \frac{P_1(w)\,dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2},$$

где P_1 — полином второй степени, а вблизи точек $w = 1$ и $w = e^{2i\varphi}$ имеют место разложения

$$\frac{P_1(w)\,dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} = \left[-\frac{\alpha_1}{(w-1)^2}+\ldots\right]dw^2 \tag{13}$$

и

$$\frac{P_1(w)\,dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} = \left[-\frac{\alpha_2}{(w-e^{2i\varphi})^2}+\ldots\right]dw^2. \tag{14}$$

Аналогично, функция $w = f_2^0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$-\,\alpha_2\frac{dz^2}{z^2} = \frac{P_2(w)\,dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2},$$

где P_2 — полином второй степени, и вблизи точек $w = 1$ и $w = e^{2i\varphi}$ имеют место разложения (14) и (15) с заменой P_1 на P_2. Таким образом, области B_1^0 и B_2^0 являются круговыми областями квадратичных дифференциалов

$$\frac{P_1(w)\,dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} \tag{15}$$

и

$$\frac{P_2(w)\,dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} \tag{16}$$

соответственно. Покажем, что на самом деле $P_1 \equiv P_2$ в $\mathbb{C}$. Для этого воспользуемся структурными теоремами для квадратичных дифференциалов (см. [4], теоремы 3.2, 3.4 и 3.5), применение которых показывает, что общая граница $\Gamma = \overline{\mathbb{C}} \setminus (B_1^0 \cup B_2^0)$ областей B_1^0 и B_2^0 состоит из конечного числа аналитических кривых, которые являются траекториями обоих квадратичных дифференциалов (15) и (16) с концами в особых точках (нулях и полюсах) дифференциалов (15) и (16), причем нули этих дифференциалов, принадлежащие Γ, совпадают. Отсюда и из определения траектории квадратичного дифференциала следует, что функция $\dfrac{P_2(w)}{P_1(w)}$ является голоморфной в области B_1^0, непрерывна на ее замыкании, не имеет нулей и принимает только вещественные значения на $\Gamma = \partial B_1^0$. Следовательно, согласно принципу максимума для гармонических функций, мнимая часть функции $\dfrac{P_2(w)}{P_1(w)}$ тождественно равна нулю в B_1^0 и, значит, $P_2 \equiv cP_1$, где c — вещественный положительный множитель. Сравнивая разложения дифференциалов (15) и (16) вблизи точек $w = 1$ и $w = e^{2i\varphi}$, заключаем, что $c = 1$ и $P_1 \equiv P_2$. Таким образом, B_1^0 и B_2^0 являются круговыми областями квадратичного дифференциала (15), $\overline{B_1^0 \cup B_2^0} = \overline{\mathbb{C}}$. Согласно теореме Дженкинса [4] (теорема 7.1), отсюда следует, что каковы бы ни были непересекающиеся односвязные области $B_1 \ni 1$ и $B_2 \ni e^{2i\varphi}$ такие, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus (B_1 \cup B_2) \supset \{0, \infty\}$, выполняется неравенство

$$r^{\alpha_1}(B_1, 1)\, r^{\alpha_2}(B_2, e^{2i\varphi}) \;\le\; r^{\alpha_1}(B_1^0, 1)\, r^{\alpha_2}(B_2^0, e^{2i\varphi}),$$

знак равенства в котором реализуется в том и только в том случае, когда $B_1 = B_1^0$ и $B_2 = B_2^0$.

Чтобы получить теперь утверждение леммы 1, нужно рассмотреть квадратичный дифференциал

$$Q(t)\,dt^2 \;=\; \frac{4P_1(t^2)\,dt^2}{(t^2-1)^2(t^2-e^{2i\varphi})^2},$$

который при отображении $w = t^2$ переводится в квадратичный дифференциал (15). Тогда вблизи полюсов $t = \pm 1$ и $t = \pm e^{i\varphi}$ справедливы разложения

$$Q(t)\,dt^2 \;=\; \left[-\frac{\alpha_1}{(t\pm 1)^2} + \ldots\right] dt^2$$

и

$$Q(t)\,dt^2 \;=\; \left[-\frac{\alpha_2}{(t\pm e^{2i\varphi})^2} + \ldots\right] dt^2.$$

Отсюда с помощью упомянутой теоремы Дженкинса получаем все утверждения леммы 1.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть Δ — множество, состоящее из всех упорядоченных восьмерок $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$, где B_1, B_2, B_3, B_4 — попарно непересекающиеся (вообще говоря, многосвязные) области в $\overline{\mathbb{C}}$, a_1, a_2, a_3, a_4 — точки на единичной окружности $\mathbb{T}$ такие, что

$$0 \le \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$$

и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$. Мы рассматриваем множество $\Delta(\varphi)$, $\varphi \in (0, \pi/2]$, как подмножество Δ посредством отождествления каждого элемента $(B_1, B_2, B_3, B_4) \in \Delta(\varphi)$ с элементом $(B_1, B_2, B_3, B_4, 1, e^{i\varphi}, -1, -e^{i\varphi}) \in \Delta$. На множестве Δ рассмотрим функционал J, действие которого на элемент $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Delta$ определяется равенством

$$J(\delta) := \left(\frac{r(B_1, a_1)\, r(B_3, a_3)}{|a_1 - a_3|^2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r(B_2, a_2)\, r(B_4, a_4)}{|a_2 - a_4|^2}\right)^{\alpha_2}.$$

Классическая теорема М. А. Лаврентьева [1] утверждает, что каковы бы ни были точки $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и непересекающиеся односвязные области $B_1, B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ такие, что $a_1 \in B_1$ и $a_2 \in B_2$, имеет место неравенство $r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2) \le \le |a_1 - a_2|^2$. При этом легко понять, что предположение об односвязности областей B_1 и B_2 в этой теореме можно опустить. Отсюда следует, что $J_0 := \sup\limits_{\delta \in \Delta} J(\delta) \le 1$.

Пусть $\{\delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов множества Δ, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} J(\delta^n) = J_0$. Для произвольного элемента $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \in \Delta$ неевклидовы геодезические, соединяющие a_1 с a_3 и a_2 с a_4, пересекаются в единственной точке $b \in \mathbb{D}$. Тогда отображение $t = e^{i\theta}(w - b)(1 - \bar{b}w)^{-1}$, $0 \le \theta < 2\pi$, является автоморфизмом круга $\mathbb{D}$, $t(a_1) = t(-a_3)$, $t(a_2) = -t(-a_4)$, причем параметр θ можно выбрать так, что $t(a_1) = 1$, а выполняя, в случае необходимости, циклическую перенумерацию точек a_1, a_2, a_3, a_4 и областей B_1, B_2, B_3, B_4, можно, очевидно, считать, что $t(a_2) = e^{i\theta}$, где $\varphi \in (0, \pi/2]$. Функционал J инвариантен относительно дробно-линейных автоморфизмов расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а, с другой стороны, из леммы 1 и из теоремы В. Н. Дубинина [9] (теорема 2.15) следует, что для любого $\varphi \in (0, \pi/2]$ точная верхняя грань величины

$$\left(r(B_1, 1)\, r(B_3, -1)\right)^{\alpha_1} \left(r(B_2, e^{i\varphi})\, r(B_4, e^{-i\varphi})\right)^{\alpha_2}$$

на множестве всех попарно непересекающихся (вообще говоря, многосвязных) областей $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $1 \in B_1$, $e^{i\varphi} \in B_2$, $-1 \in B_3$, $e^{-i\varphi} \in B_4$, конечна и достигается на некоторой четверке односвязных областей. Поэтому без уменьшения общности можно считать, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ элемент δ^n принадлежит множеству $\Delta(\varphi_n)$ при некотором $\varphi_n \in (0, \pi/2]$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно также считать, что существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n =: \varphi_0$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2]$ (в противном случае должно быть $J_0 = 0$). Далее, как и при доказательстве леммы 1, рассуждение с использованием теоремы Монтеля о нормальных семействах функций показывает, что существует элемент $\delta^0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0) \in \Delta(\varphi_0)$ такой, что $J(\delta_0) = J_0$.

Для получения дополнительной информации об экстремальном элементе δ^0 применим вариационную формулу Дюрена – Шиффера [20]

$$w^{\rho, w_0} = w^{\rho, w_0}(w) = w + \frac{A\rho^2}{w_0}\frac{w}{w - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}}\frac{w^2}{1 - w\overline{w_0}} + O(\rho^3), \quad \rho \to 0, \tag{17}$$

где ρ — достаточно малый вещественный положительный параметр, $w_0 \in \mathbb{C}$, $A = A(\rho)$ — параметр граничной вариации, $\rho^{-3}\left|O(\rho^3)\right|$ — величина, равномерно ограниченная на каждом компактном подмножестве области $\mathbb{C} \setminus \{w_0, (\overline{w_0})^{-1}\}$. При этом для всех $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 \in \mathbb{T} \setminus \{w_0\}$ и $\rho > 0$ выполняется условие $w^{\rho, w_0}(w) \in \mathbb{T}$. Далее, как и при доказательстве леммы 1, обозначим через $f_k^0(z)$ функцию, реализующую конформное и однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на область B_k^0 с $f_k^0(0) = a_k^0$, $k = \overline{1,4}$. Рассмотрим варьированные функции $f_k^{\rho, w_0}(z) := w^{\rho, w_0}(f_k^0(z))$. Пусть $B_k^\rho = f_k^{\rho, w_0}(\mathbb{D})$, $a_k^\rho = f_k^{\rho, w_0}(0)$, $k = \overline{1,4}$. Здесь $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^4 B_k^0\right)$. Из равенства (17) получаем

$$(f_k^\rho)'(0) = (f_k^0)'(0)\left\{1 - \frac{A\rho^2}{(a_k^0 - w_0)^2} - \frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}}\frac{2\overline{a_k^0} - \overline{w_0}}{(\overline{a_k^0} - \overline{w_0})^2} + O(\rho^3)\right\}$$

при $\rho \to 0$. Поскольку для односвязных областей гиперболического типа внутренний радиус совпадает с конформным и при всех $c \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\left|1 - c\rho^2\right| = 1 - \rho^2 \operatorname{Re} c + o(\rho^3), \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \rho \to 0+, \tag{18}$$

отсюда следует

$$r(B_k^\rho, a_k^\rho) = r(B_k^0, a_k^0)\left\{1 - \rho^2 \operatorname{Re}\frac{2Aa_k^0}{w_0(a_k^0 - w_0)^2} + O(\rho^3)\right\}, \quad \rho \to 0. \tag{19}$$

Используя то, что $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0 \in \mathbb{T}$ и $a_1^0 + a_3^0 = a_2^0 + a_4^0 = 0$, из (17) и (18) легко заключаем, что при $\rho \to 0$ имеют место равенства

$$\left|a_1^\rho - a_3^\rho\right| = \left|a_1^0 - a_3^0\right|(1 + O(\rho^3)), \qquad \left|a_2^\rho - a_4^\rho\right| = \left|a_2^0 - a_4^0\right|(1 + O(\rho^3)).$$

Вместе с (19) это дает следующее равенство для значения функционала J на элементе $\delta^\rho = (B_1^\rho, B_2^\rho, B_3^\rho, B_4^\rho, a_1^\rho, a_2^\rho, a_3^\rho, a_4^\rho)$, принадлежность которого к множеству Δ при малых значениях параметра ρ непосредственно следует из свойств вариации Дюрена – Шиффера (17):

$$J(\delta^\rho) =$$

$$= J(\delta^0)\left\{1 - 2\rho^2 \operatorname{Re}\left(\frac{A}{w_0}\left[\frac{\alpha_1 a_1^0}{(a_1^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_2 a_2^0}{(a_2^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_1 a_3^0}{(a_3^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_2 a_4^0}{(a_4^0 - w_0)^2}\right]\right) + O(\rho^3)\right\},$$

$$\rho \to 0.$$

Поскольку элемент δ^0 реализует максимум функционала J на множестве Δ, отсюда получаем, что при любых допустимых значениях w_0 и параметра $A(\rho)$ выполняется неравенство

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{A(\rho)}{w_0}\left[\frac{\alpha_1 a_1^0}{(a_1^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_2 a_2^0}{(a_2^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_1 a_3^0}{(a_3^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_2 a_4^0}{(a_4^0 - w_0)^2}\right]\right) + O(\rho) \ \geq\ 0,$$

из которого с помощью основной леммы метода граничной вариации Шиффера [21] заключаем, что множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{4} B_k^0$ является замыканием объединения конечного числа траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 \ = \ -2\left[\frac{\alpha_1 a_1^0}{(a_1^0 - w)^2} + \frac{\alpha_2 a_2^0}{(a_2^0 - w)^2} + \frac{\alpha_1 a_3^0}{(a_3^0 - w)^2} + \frac{\alpha_2 a_4^0}{(a_4^0 - w)^2}\right]\frac{dw^2}{w} \ =$$

$$= \ -8e^{2i\varphi_0}\,\frac{(\alpha_2 + e^{-2i\varphi_0}\alpha_1)w^4 - 2(\alpha_2 + \alpha_1)w^2 + (\alpha_2 + e^{2i\varphi_0}\alpha_1)}{(w^2-1)^2(w^2 - e^{2i\varphi_0})^2}\,dw^2. \qquad (20)$$

Отсюда следует, что для этого дифференциала справедливо равенство $Q(-w)\,d(-w)^2 = Q(w)\,dw^2$ и структура его траекторий имеет симметрию относительно окружности $\mathbb{T}$ и центральную симметрию относительно начала координат O. Теперь доказательство первого утверждения теоремы 1 завершается аналогично тому, как это сделано в работе [16]. Для этого проводим следующую круговую симметризацию экстремальных областей B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0 с центром в начале координат O: при каждом $k = 1, 2, 3, 4$ область B_k^0 симметризуется относительно луча $\{z = te^{(k-1)\pi/2} : t > 0\}$; полученную таким образом область обозначим через B_k^*. Положим $a_1^* = 1$, $a_2^* = i$, $a_3^* = -1$, $a_4^* = -i$. Тогда, используя известные свойства круговой симметризации, приведенные в первой части работы, заключаем, что при каждом $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ область B_k^* односвязна и имеет место неравенство $r(B_k^0, a_k^0) \leq r(B_k^*, a_k^*)$, откуда получаем, что для элемента $\delta^* = (B_1^*, B_2^*, B_3^*, B_4^*, a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*) \in \Delta(\pi/2)$ выполнена цепочка соотношений $J_0 = J(\delta^0) \leq J(\delta^*) \leq J(\delta^1) \leq J_0$, где элемент $\delta^1 = (B_1^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1\ a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) \in \Delta(\pi/2)$ выбран таким образом, что на нем достигается максимум функционала J на множестве $\Delta(\pi/2)$. Следовательно, имеют место равенства $J(\delta^0) = J(\delta^*) = J(\delta^1) = J_0$, первое из которых влечет равенство $r(B_k^0, a_k^0) = r(B_k^*, a_k^*)$, $k = \overline{1,4}$, а второе, в силу утверждения первого пункта леммы 1 о единственности экстремали, дает совпадение экстремалей δ^* и δ^1. Отсюда и из приведенного в первой части настоящей работы результата Дж. Дженкинса о единственности при круговой симметризации односвязных областей и из структуры траекторий квадратичного дифференциала (20) вытекает, что при каждом $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ справедливы равенства $B_k^0 = B_k^*$ и $a_k^0 = a_k^*$. Это означает, что $\varphi_0 = \pi/2$, квадратичный дифференциал (20) принимает вид (1), точки a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0 и области B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0 являются соответственно его полюсами и круговыми областями, для любых точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{T}$ и для каждой четверки попарно непересекающихся между собой областей B_1, B_2, B_3, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, выполняется неравенство (2). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось изучить случай равенства в (2). Пусть $\delta^1 = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$ — элемент множества Δ, на котором достигается максимум J_0 функционала J, и $\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^4$ — система областей, полученная в результате заполнения системы $\{B_k\}_{k=1}^4$, $\tilde{\delta} = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$. Тогда $J(\delta) = J(\tilde{\delta}) = J_0$, откуда получаем равенства $r(B_k, a_k) = r(\tilde{B}_k, a_k)$, $k = \overline{1, 4}$. Пусть $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда при $w \to a_k^1$ справедливы равенства

$$g_{\tilde{B}_k}(w, a_k) = -\log|w - a_k| + \log r(\tilde{B}_k, a_k) + o(1)$$

и

$$g_{B_k}(w, a_k) = -\log|w - a_k| + \log r(B_k, a_k) + o(1),$$

которые означают, что: а) функция $h_k(w) := g_{\tilde{B}_k}(w, a_k) - g_{B_k}(w, a_k)$ гармонична в области B_k; б) в каждой регулярной точке $z \in \partial B_k$ существует неотрицательный предел $\lim\limits_{w \to z, w \in B_k} h(w)$; с) $h(a_k) = 0$. Поскольку каждая точка границы области B_k, за исключением, возможно, множества нулевой емкости, является регулярной, из обобщенного принципа максимума для гармонических функций заключаем, что $h_k(w) \equiv 0$ в области B_k. Если предположить, что емкость (борелевского) множества $E_k := \tilde{B}_k \setminus B_k$ положительна, то в каждой точке $z \in E_k$, за исключением, быть может, некоторого множества E_k^0 нулевой емкости, существует и равен нулю предел $\lim\limits_{w \to z, w \in B_k} g_{B_k}(w, a_k)$, но в то же время $g_{\tilde{B}_k}(z, a_k) > 0$ в силу положительности функции Грина во внутренних точках области. Следовательно, неравенство $\lim\limits_{w \to z, w \in B_k} h(w) > 0$ имеет место для всех точек $z \in E_k \setminus E_k^0$, и в силу обобщенного принципа максимума для гармонических функций отсюда следует положительность функции h_k в области B_k. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{cap} E_k = 0$.

В дальнейшем, используя конформную инвариантность функционала J и, если нужно, применяя точно так же, как и выше, подходящее дробно-линейное преобразование, будем считать, что при некотором $\varphi \in (0, \pi/2]$ справедливы равенства $a_1 = 1$, $a_2 = e^{i\varphi}$, $a_3 = -1$, $a_4 = -e^{i\varphi}$. Проведенные выше рассуждения с использованием леммы 1, теоремы В. Н. Дубинина [9] (теорема 2.15) и теоремы Дж. Дженкинса о единственности при круговой симметрии показывают, что $\varphi = \pi/2$. Таким образом, имеем две экстремали: $\tilde{\delta} = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4, 1, i, -1, -i)$ и $\delta_0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0, 1, i, -1, -i)$, где B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0 — круговые области квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, определенного равенством (1) ($a_k = i^{k-1} \in B_k^0$, $k = \overline{1, 4}$). Отсюда, согласно теореме В. Н. Дубинина [22] (теорема 1), следует, что для каждого $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ существуют такие действительные числа s_k и q_k, что функция Грина области $\tilde{B}_k$ с полюсом в точке i^{k-1} имеет вид

$$g_{\tilde{B}_k}(w, i^{k-1}) = s_k \operatorname{Im} \zeta_k + q_k, \tag{21}$$

где $\zeta_k = \zeta_k(w)$ — выбранная надлежащим образом однозначная ветвь функции $\int_0^w Q^{1/2}(w)\,dw$.

Предположим, что $\tilde{\delta} \neq \delta^0$. Из того, что замыкание объединения областей B_1^0, B_2^0, B_3^0 и B_4^0 совпадает с расширенной комплексной плоскостью и из структурных теорем для квадратичных дифференциалов (см., например, [4], теорема 3.5) следует, что найдется траектория γ квадратичного дифференциала (1) и номер $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ такие, что: а) γ не имеет общих точек ни с одной из областей B_1^0, B_2^0, B_3^0 и B_4^0; б) множество $\gamma \bigcap \tilde{B}_k$ непусто. Не уменьшая общности, будем для определенности считать, что $k = 1$. Тогда равенство (21) показывает, что функция $g_{\tilde{B}_1}(w, 1)$ постоянна на множестве $\gamma \bigcap \tilde{B}_1$. Из определения области $\tilde{B}_1$ следует, что каждая ее граничная точка является регулярной. Поэтому если множество $\gamma \bigcap \tilde{B}_1$ имеет предельные точки на $\partial\tilde{B}_1$, то $g_{\tilde{B}_1}(w, 1) \equiv 0$ на $\gamma \bigcap \tilde{B}_1$, что противоречит положительности функции $g_{\tilde{B}_1}(w, 1)$ внутри области $\tilde{B}_1$. Тогда, снова используя структурные теоремы для квадратичных дифференциалов, заключаем, что имеет место один из следующих двух случаев: либо $\tilde{B}_k = B_k^0$, $k = \overline{1, 4}$, либо найдется такой номер $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, что все нули квадратичного дифференциала (1) принадлежат области $\tilde{B}_k$. Предположим, что выполняется второй из них. Тогда из вида квадратичного дифференциала (1) следует, что в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ он имеет четыре простых нуля в области $\tilde{B}_k$, которые являются точками ветвления первого порядка для функции $\int_0^w Q^{1/2}(w)dw$ (в этом легко убедиться с помощью разложения этой функции в ряд Пюизо с центром в нулях квадратичного дифференциала (1)), что противоречит возможности выделения ее однозначной ветви в области $\tilde{B}_k$. Если же $\alpha_1 = \alpha_2$, то дифференциал (1) имеет два нуля второго порядка в точках $w = 0$ и $w = \infty$. В этом случае дословным повторением рассуждений работы [8, с. 55] устанавливается нарушение принципа максимума для гармонических функций.

Таким образом, показано, что если для попарно непересекающихся областей $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{T}$ таких, что $0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, имеет место случай равенства в (2), то выполнены равенства $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$ и существует такое дробно-линейное отображение S, являющееся автоморфизмом единичного круга $\mathbb{D}$, что $a_k = S(a_k^0)$ и $\tilde{B}_k = S(B_k^0)$, где a_k^0 и B_k^0, $k = \overline{1, 4}$, — соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (1). Из проведенного выше анализа следует и обратное: если для попарно непересекающихся областей B_1, B_2, B_3, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{T}$ таких, что $0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, справедливы равенства $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$ и существует такое дробно-линейное отображение S, являющееся автоморфизмом единичного круга $\mathbb{D}$, что $a_k = S(a_k^0)$ и $\tilde{B}_k = S(B_k^0)$, $k = \overline{1, 4}$, то в (1) имеет место случай равенства.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть n — натуральное число ($n \geq 3$), $a_1, \ldots, a_{2n}$ — точки на единичной окружности $\mathbb{T}$, $a_{2n+1} := a_1$, $0 \leq \arg a_1 < \ldots \ldots < \arg a_{2n} < 2\pi$, $B_1, \ldots, B_{2n}$ — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$ такие, что $a_{2k-1} \in B_{2k-1}$ и

$$a_{2k} \in B_{2k} \subset L(a_{2k-1}, a_{2k+1}) := \{z \in \mathbb{C} : \arg a_{2k-1} < \arg z < \arg a_{2k+1}\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Положим $\sigma_k := (\arg a_{2k+1} - \arg a_{2k-1})/\pi$, $k = \overline{1,n}$, $\sigma_{n+1} := \sigma_1$. Ясно, что $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k = 2$. Пусть $\zeta_k(w)$ — однозначная ветвь функции $(e^{-i\arg a_{2k-1}}w)^{1/\sigma_k}$, выделяемая условием $\zeta_k(a_{2k-1}) = -i$. Наши дальнейшие рассуждения основаны на применении так называемого *кусочно-разделяющего преобразования,* предложенного в работах [7 – 9].

Для каждого $k \in \{1,\ldots,n\}$ функция ζ_k отображает угол $L(a_{2k-1}, a_{2k+1})$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Определим области G_k^l, $l = \overline{1,4}$, $k = \overline{1,n}$, следующим образом. Область G_k^1 является образом области B_{2k} при отображении ζ_k; G_k^3 — область, симметричная области G_k^1 относительно мнимой оси. Рассмотрим образ области $B_{2k+1} \bigcap L(a_{2k-1}, a_{2k+1})$ при отображении ζ_k, возьмем его замыкание и объединим полученное таким образом множество с множеством, симметричным ему относительно мнимой оси. Внутренность множества, полученного в результате выполнения всех указанных выше действий, является, очевидно, областью, которую обозначаем через G_k^2. Аналогично, рассматривая образ области $B_{2k-1} \bigcap L(a_{2k-1}, a_{2k+1})$ при отображении ζ_k и повторяя все только что описанные действия, получаем область G_k^4. Пусть $c_k^1 = \zeta_k(a_{2k})$, c_k^3 — образ точки c_k^1 при отображении относительно мнимой оси, $c_k^2 = i$, $c_k^4 = -i$, $k = \overline{1,n}$. Из определений областей G_k^1, G_k^2, G_k^3 и G_k^4 и точек c_k^1, c_k^2, c_k^3 и c_k^4 следует, что для всех $k = 1,\ldots,n$ эти области попарно не пересекаются и $c_k^l \in G_k^l$, $l = \overline{1,4}$. Применяя следствие 2, для всех $k = 1,\ldots,n$ получаем неравенство

$$\left(r(G_k^1, c_k^1)\, r(G_k^3, c_k^3)\right)^{\alpha_1} \left(r(G_k^2, c_k^2)\, r(G_k^4, c_k^4)\right)^{\alpha_2} \le 4^{\alpha_1+\alpha_1} M_0(\alpha_1, \alpha_2). \tag{22}$$

Из вида отображения ζ_k вытекают следующие асимптотические равенства:

$$|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_{2k-1})| = (1/\sigma_k)|w - a_{2k-1}|(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad w \to a_{2k-1},$$

$$|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_{2k+1})| = (1/\sigma_k)|w - a_{2k+1}|(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad w \to a_{2k+1}.$$

Из этих равенств, применяя теорему В. Н. Дубинина [9] (теорема 1.9), получаем неравенства

$$r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \le \left[\sigma_k \sigma_{k-1}\, r(G_k^4, c_k^4)\, r(G_{k-1}^2, c_{k-1}^2)\right]^{1/2}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{23}$$

где $G_0^2 := G_n^2$, $c_0^2 := c_n^2 = i$. С другой стороны, из определения внутреннего радиуса следуют равенства

$$r(G_k^1, c_k^1) = |\zeta_k'(a_{2k})|\, r(B_{2k}, a_{2k}) = \frac{1}{\sigma_k} r(B_{2k}, a_{2k}), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Поскольку $r(G_k^1, c_k^1) = r(G_k^3, c_k^3)$ для всех $k = 1,\ldots,n$, имеем

$$r(B_{2k}, a_{2k}) = \sigma_k \left[r(G_k^1, c_k^1)\, r(G_k^3, c_k^3)\right]^{1/2}, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{24}$$

Используя (22) – (24) и неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем цепочку соотношений

$$\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1}, a_{2k-1})\right)^{\alpha_1} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k}, a_{2k})\right)^{\alpha_2} \le$$

$$\leq \left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(r(G_k^1,c_k^1)\,r(G_k^3,c_k^3)\right)^{\alpha_1}\left(r(G_k^2,c_k^2)\,r(G_k^4,c_k^4)\right)^{\alpha_2}\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\left(4^{\alpha_1+\alpha_2}M_0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{n/2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)}\left(2^{\alpha_1+\alpha_2}M_0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{n/2} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)}\left(4^{\alpha_1+\alpha_2}M_0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{n/2} = \left(\frac{4}{n}\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)}\left(M_0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{n/2},$$

в которой все неравенства превращаются в равенства тогда и только тогда, когда для каждого $k\in\{1,\ldots,n\}$ выполняются следующие условия: а) области $\tilde{G}_k^1,\ \tilde{G}_k^2,\ \tilde{G}_k^3,\ \tilde{G}_k^4$ и точки $c_k^1,\ c_k^2,\ c_k^3,\ c_k^4$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (1); б) $\operatorname{cap}\tilde{G}_k^1\setminus G_k^1 = \operatorname{cap}\tilde{G}_k^2\setminus G_k^2 = \operatorname{cap}\tilde{G}_k^3\setminus G_k^3 = \operatorname{cap}\tilde{G}_k^4\setminus G_k^4 = 0$; в) $\sigma_k = 2/n$. Выполняя, если необходимо, поворот плоскости $\mathbb{C}$ относительно начала координат O, можно без уменьшения общности считать, что $a_1 = 1$. В силу определения областей $G_k^1,\ G_k^2,\ G_k^3,\ G_k^4$ и точек $c_k^1,\ c_k^2,\ c_k^3,\ c_k^4$ выполнение условий а) и в) означает, что $a_k = \exp[i(k-1)\pi/n]$, $k=\overline{1,2n}$, и $\zeta_k(w) = (-1)^{k-1}(\sqrt{w}_+)^n$, $k=\overline{1,n}$, где $\sqrt{w}_+$ — однозначная ветвь функции $\sqrt{w}$, выделяемая условием $\sqrt{1}_+ = 1$, а выполнение условий б) и в) — что $\operatorname{cap}\tilde{B}_k\setminus B_k = 0$, $k=\overline{1,2n}$. Тогда, выполняя в квадратичном дифференциале (1) последовательно замены локальных параметров $w=\zeta$ и $\zeta = w^{n/2}$, получаем квадратичный дифференциал (5), причем точки a_k и области $\tilde{B}_k$, $k=\overline{1,2n}$, являются соответственно его полюсами и круговыми областями. Это наблюдение завершает доказательство теоремы 2.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
4. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
5. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
6. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
9. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи. мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3 – 76.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций. – Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2003. – 116 с.
11. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. Петербург. отд-ния Мат. ин-та РАН. – 2003. – **302**. – С. 52 – 67.
12. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Там же. – 2002. – **286**. – С. 103 – 114.

13. *Ковалев Л. В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 82 – 87.
14. *Бахтин А. К.* Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 6. – С. 723 – 731.
15. *Бахтин А. К.* О некоторых задачах в теории неналегающих областей // Int. Conf. Complex Analysis and Potential Theory: Abstrs. – Kiev: Inst. Math. NAS Ukraine. – 2001. – P. 64.
16. *Бахтин А. К.* О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1454 – 1464.
17. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
18. *Jenkins J. A.* Some uniquiness results in the theory of symmetrization // Ann. Math. – 1955. – **61**, № 1. – P. 106 – 115.
19. *Jenkins J. A.* Some uniquiness results in the theory of symmetrization II // Ibid. – 1962. – **75**, № 2. – P. 223 – 230.
20. *Duren P. L., Schiffer M.* A variation method for function schlicht in annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9**. – P. 260 – 272.
21. *Schiffer M.* A method of variation within the family of simple functions // Proc. London Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 432 – 449.
22. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 1. – С. 110–123.

Получено 01.12.2003,
после доработки — 30.05.2005