УДК 517.925

В. М. Евтухов, В. А. Касьянова (Одес. нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. II

We establish asymptotic representations for a class of unbounded solutions of second-order differential equations whose right-hand sides contain the sum of terms with nonlinearities of more general form than nonlinearities of Emden–Fowler type.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу необмежених розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків з нелінійностями більш загального вигляду, ніж нелінійності типу Емдена – Фаулера.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{0.1}$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$, $k = 1, \ldots, m$, $p_k : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $k = 1, \ldots, m$, — непрерывно дифференцируемые функции, $r_k : [a, \omega[\to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_k(t) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{0.2}$$

$-\infty < a < \omega \le +\infty$, а $\varphi_k : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $k = 1, \ldots, m$, $0 < y_0 < +\infty$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$\lim_{y \to +\infty} \varphi_k(y) = \varphi_k^0 = \text{const} \ne 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, m_1, \tag{0.3}$$

$$\lim_{y \to +\infty} \varphi_k(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty \end{cases} \quad \text{при} \quad k = m_1 + 1, \ldots, m,^1 \tag{0.4}$$

причем

$$\varphi_k' \ne 0 \quad \text{при} \quad y \ge y_0 \quad \text{и} \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = \sigma_k = \text{const}, \tag{0.5}$$

если $k \in \{1, \ldots, m\}$ и отлично от тех $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, для которых $\varphi_k(y) \equiv \equiv \varphi_k^0$.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и введем следующее определение.

Решение $y : [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ $\big(t_0 \in [a, \omega[\big)$ уравнения (0.1) будем называть $\Pi_\omega(\mu_0)$-решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = +\infty$;

[1] Здесь и ниже полагаем $m_1 = 0$ $(m_1 = m)$, если выполняется только условие (0.4) (только условие (0.3)).

2) $y'(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty; \end{cases}$

3) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0$, причем $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1$, если $\mu_0 = \pm\infty$.

В работе [1] для каждого из возможных значений μ_0 и каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ указаны условия, при выполнении которых любое $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1) имеет свойство

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))} = 0 \quad \text{при любом} \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \text{отличном от} \quad i. \qquad (0.6)$$

Вопрос о существовании и асимптотике $\Pi_\omega(\mu_0)$-решений уравнения (0.1) выяснен в [1] полностью лишь в случае, когда $m_1 \ge 1$ и условия (0.6) выполняются при $i \in \{1, \ldots, m_1\}$. В случае, когда $m_1 < m$ и условия (0.6) выполняются при $i \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}$, этот вопрос решен в [1] лишь для $\Pi_\omega(\mu_0)$-решений, у которых $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Остальным $\Pi_\omega(\mu_0)$-решениям уравнения (0.1) посвящена настоящая статья.

1. Основные результаты. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ положим

$$I_{i1}(t) = \int_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\,ds, \qquad Q_{i1}(t) = \int_{A'_{i1}}^{t} I_{i1}(s)\,ds,$$

$$I_{i2}(t) = \int_{A_{i2}}^{t} \pi_\omega(s)p_i(s)\,ds, \qquad Q_{i2}(t) = \int_{A'_{i2}}^{t} \frac{p_i(s)\,ds}{I_{i2}(s)},$$

где

$$A_{i1} = \begin{cases} a, & \text{если } \displaystyle\int_a^\omega p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \displaystyle\int_a^\omega p_i(s)\,ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A_{i2} = \begin{cases} a, & \text{если } \displaystyle\int_a^\omega |\pi_\omega(s)|p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \displaystyle\int_a^\omega |\pi_\omega(s)|p_i(s)\,ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A'_{i1} = \begin{cases} a, & \text{если } \displaystyle\int_a^\omega I_{i1}(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \displaystyle\int_a^\omega I_{i1}(s)\,ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A'_{i2} = \begin{cases} a', & \text{если } \displaystyle\int_{a'}^\omega \frac{p_i(s)\,ds}{|I_{i2}(s)|} = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \displaystyle\int_{a'}^\omega \frac{p_i(s)\,ds}{|I_{i2}(s)|} < +\infty, \end{cases} \qquad a' \in]a, \omega[.$$

Кроме того, при $m_1 < m$ для каждого $i \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}$ введем функцию

$$\Phi_i(y) = \int\limits_{B_i}^{y} \frac{dz}{\varphi_i(z)}, \quad B_i = \begin{cases} y_0, & \text{если } \int\limits_{y_0}^{+\infty} \dfrac{dz}{\varphi_i(z)} = +\infty, \\ +\infty, & \text{если } \int\limits_{y_0}^{+\infty} \dfrac{dz}{\varphi_i(z)} < +\infty. \end{cases}$$

Для этой функции существует обратная функция Φ_i^{-1}, заданная на промежутке $[0, +\infty[$, если $B_i = y_0$, или на промежутке $[b_i, 0[$, где $b_i = -\int_{y_0}^{+\infty} \dfrac{dz}{\varphi_i(z)}$, если $B_i = +\infty$, причем для них

$$\lim_{y\to+\infty} \Phi_i(y) = +\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty} \Phi_i^{-1}(z) = +\infty \quad \text{при} \quad B_i = y_0,$$

$$\lim_{y\to+\infty} \Phi_i(y) = 0, \qquad \lim_{z\uparrow 0} \Phi_i^{-1}(z) = +\infty \quad \text{при} \quad B_i = +\infty,$$

Кроме того, при $\sigma_i \neq 0$ с использованием правила Лопиталя и (0.7) имеем

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\Phi_i(y)}{y/\varphi_i(y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1/\varphi_i(y)}{\dfrac{1}{\varphi_i(y)}\left(1 - \dfrac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\right)} = -\frac{1}{\sigma_i}. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $m_1 < m$ *и для некоторого* $i \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}$ *выполняется неравенство* $-1 < \sigma_i \neq 0$, *а также условия* (1.16), (1.17) *леммы* 1.6 *из работы* [1]. *Тогда для существования* $\Pi_\omega(\pm\infty)$*-решений уравнения* (0.1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{aligned} &\sin \pi_\omega(t) = \pm 1 \quad (\textit{соответственно}), \\ &\sigma_i I_{i1}(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[^2, \qquad \alpha_i = 1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_{i1}^2(t)}{p_i(t)Q_{i1}(t)} = 1. \tag{1.3}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\sigma_i^2 I_{i1}^2(t)}{p_i(t)}[1 + o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i1}(t)}[1 + o(1)]. \tag{1.4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y: [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — произвольное $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1), для которого μ_0 равно либо $+\infty$, либо $-\infty$. Тогда согласно лемме 1.1 из [1] $\omega = +\infty$ при $\mu_0 = +\infty$ и $\omega < +\infty$ при $\mu_0 = -\infty$, т. е. выполняется первое из условий (1.2). Кроме того, в силу условий леммы 1.6 из [1] для данного решения имеют место предельные соотношения (0.6). Поэтому с учетом (0.1) получим

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.5}$$

Отсюда в силу определения $\Pi_\omega(\pm\infty)$-решения, а также условий $p_i(t) > 0$ при $t \in [a, \omega[$ и $\varphi_i(y) > 0$ при $y \in [y_0, +\infty[$ следует, что $\alpha_i > 0$, т. е. выполняется третье из условий (1.2). Далее, принимая во внимание определение $\Pi_\omega(\pm\infty)$-решения и лемму 1.2 из [1], замечаем, что

---

[2] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_i(y(t))}\left[1 - \frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}\right] \sim -\sigma_i \frac{y''(t)}{\varphi_i(y(t))} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

С учетом этого асимптотического соотношения (1.5) можно переписать в виде

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)' = -\sigma_i\, p_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда в результате интегрирования на промежутке от t_0 до t $(t \in]t_0, \omega[)$ следует, что

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = c_i - \sigma_i I_{i1}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{1.6}$$

где c_i — некоторая постоянная.

Покажем, что $c_i = 0$ при $A_{i1} = \omega$. Действительно, если бы это было не так, то из (1.6) получили бы асимптотическое соотношение

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = c_i + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

которое с учетом (1.5) и неравенства $\alpha_i > 0$ приводит к соотношению вида

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = p_i(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя его на промежутке от t_0 до t, находим

$$\ln y'(t) = c + I_{i1}(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где c — некоторая постоянная. Но это невозможно, поскольку выражение, стоящее слева, согласно второму из условий определения $\Pi_\omega(\pm\infty)$-решения имеет бесконечный предел при $t \uparrow \omega$, а стоящее справа в силу условия $A_{i1} = \omega$ — конечный. Значит, при $A_{i1} = \omega$ постоянная $c_i = 0$. Поэтому при каждом из двух значений, которые может принимать A_{i1}, соотношение (1.6) допускает представление вида

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = -\sigma_i I_{i1}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.7}$$

Отсюда непосредственно вытекает второе из условий (1.2) и асимптотическое соотношение

$$\Phi_i(y(t)) = -\sigma_i Q_{i1}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.8}$$

Теперь, применяя правило Лопиталя, с использованием (1.7) и леммы 1.2 из [1] находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))Q_{i1}(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\dfrac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)'}{Q_{i1}'(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\left[1 - \dfrac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}\right]}{I_{i1}(t)} = \sigma_i^2.$$

Тем самым показано, что

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = \sigma_i^2 Q_{i1}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.9}$$

Поскольку согласно (1.5), где $\alpha_i = 1$, (1.7) и (1.9)

$$\frac{[\,y'(t)\,]^2}{y''(t)\,y(t)} = \left(\frac{y'(t)}{\varphi_i(\,y(t))}\right)^2 \frac{\varphi_i(\,y(t))}{y''(t)}\frac{\varphi_i(\,y(t))}{y(t)} = \frac{I_{i1}^2(t)}{p_i(t)\,Q_{i1}(t)}[\,1+o(1)\,] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

то в силу третьего из условий определения $\Pi_\omega(\pm\infty)$-решения имеет место предельное соотношение (1.3). Кроме того, из (1.7), (1.9) и (1.3) вытекают асимптотические представления (1.4).

Достаточность. Пусть $m_1 < m$ и при некотором $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ наряду с условиями теоремы выполняются условия (1.2), (1.3). В силу (1.3), второго из условий (1.2) и выбора пределов интегрирования A_{i1}, $A'_{i1}(t)$ функция Q_{i1} положительна на промежутке $]a, \omega[$ и такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} Q_{i1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_i > 0, \\ +\infty & \text{при } \sigma_i < 0, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{|\pi_\omega(t)\,I_{i1}(t)|}{Q_{i1}(t)} = +\infty. \tag{1.10}$$

Учитывая первое из предельных соотношений (1.10), подбираем число $t_1 \in\,]a, \omega[$ так, чтобы при $t\in[t_1, \omega[$ выполнялось неравенство $Q_{i1}(t) > 0$, если $\sigma_i < 0$, и $2b_i < -3\sigma_i Q_{i1}(t)$, если $\sigma_i > 0$, где $b_i = -\int_{y_0}^{+\infty}\frac{dz}{\varphi_i(z)}$. После этого уравнение (0.1) с помощью преобразования

$$\Phi_i(\,y(t)) = -\sigma_i\,Q_{i1}(t)[\,1+v_1(x)\,], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{I_{i1}(t)}{\sigma_i\,Q_{i1}(t)}[\,1+v_2(x)\,],$$
$$x = \beta\ln|Q_{i1}(t)|, \tag{1.11}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma_i < 0, \\ -1 & \text{при } \sigma_i > 0, \end{cases} \qquad t\in[t_1, \omega[,$$

сводим к системе уравнений

$$v_1' = \beta\left[-1 - v_1 + \frac{1+v_2}{\sigma_i^2\,Q_{i1}(t)}\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right],$$
$$v_2' = \beta\left[(1+v_2)\left(-q_i(t) + \frac{1+\sigma_i}{\sigma_i} + \frac{v_2}{\sigma_i}\right) - \right.$$
$$\left. -\,\sigma_i\left(\frac{Q_{i1}(t)}{Q'_{i1}(t)}\right)^2 \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k\,p_k(t)[\,1+r_k(t)\,]\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\right], \tag{1.12}$$

в которой

$$q_i(t) = \frac{p_i(t)\,Q_{i1}(t)}{I_{i1}^2(t)}, \qquad Y_i(t, v_1) = \Phi_i^{-1}(-\sigma_i\,Q_{i1}(t)(1+v_1)),$$

Φ_i^{-1} — функция, обратная для Φ_i, t — функция, обратная для $x = \beta\ln|Q_{i1}(t)|$.

В силу (1.3)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_i(t) = 1, \tag{1.13}$$

а в силу первого из условий (1.10), второго из условий (1.2) и вида функций Φ_i, Y_i

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y_i(t, v_1) = +\infty \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{1.14}$$

Согласно (1.14) из (0.3) – (0.5) и леммы 1.2 работы [1] следует, что при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, для которых $\varphi_k'(y) \neq 0$ при $y \geq y_0$, равномерно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_k''(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k'(Y_i(t, v_1))} = \sigma_k, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \varphi_k(Y_i(t, v_1)) = \varphi_k^0 \neq 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} Y_i(t, v_1)\varphi_k'(Y_i(t, v_1)) = 0, \quad \text{если} \quad k \in \{1, \ldots, m_1\}, \tag{1.16}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \varphi_k(Y_i(t, v_1)) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} = 1 + \sigma_k,$$

$$\text{если} \quad k \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial Y_i(t, v_1)}{\partial t} = -\sigma_i I_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t, v_1))(1 + v_1) \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \tag{1.17}$$

$\sigma_i \neq 0$ и выполняются условия (1.14) и (1.16), применяя правило Лопиталя в форме Штольца [2, с. 115], при каждом фиксированном $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ получаем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))Q_{i1}(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\dfrac{Y_i'(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\left(1 - \dfrac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right)}{I_{i1}(t)} = \sigma_i^2(1 + v_1). \tag{1.18}$$

Из (1.17) и (1.18) в силу второго из предельных соотношений (1.10) и второго из условий (1.2) следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)Y_i'(t, v_1)}{Y_i(t, v_1)} = \pm\infty \quad \text{при любом} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Значит, функция Y_i при каждом значении $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ имеет все свойства любого $\Pi_\omega(\pm\infty)$-решения уравнения (0.1), которые были использованы при установлении леммы 1.6 работы [1]. Поэтому при $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ будем иметь

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t)\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t, v_1))} = 0 \quad \text{для любого} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}. \tag{1.19}$$

Если же учесть (1.14), условия

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = 1 + \sigma_i > 0, \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} = 1 + \sigma_k, \quad \sigma_k < \sigma_i,$$

$$\text{при} \quad k \in \{m_1 + 1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$$

и равенство

$$\left(\frac{\varphi_k(y)}{\varphi_i(y)}\right)' = \frac{\varphi_k(y)}{y\varphi_i(y)}\left[\frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} - \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\right],$$

то нетрудно видеть, что (1.19) выполняется равномерно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Поскольку

$$\left(\frac{\varphi_i(y)}{y}\right)' = \frac{\varphi_i(y)}{y^2}\left(\frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} - 1\right)$$

и $\sigma_i \neq 0$, функция $\dfrac{\varphi_i(y)}{y}$ в некоторой окрестности $+\infty$ является возрастающей при $\sigma_i > 0$ и убывающей при $\sigma_i < 0$. Поэтому согласно (1.14) можно подобрать число $t_2 \in [t_1, \omega[$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)} \leq \frac{\varphi_i\left(Y_i\left(t, v_1^0\right)\right)}{Y_i\left(t, v_1^0\right)} \quad \text{при} \quad t \in [t_2, \omega[, \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \tag{1.20}$$

где

$$v_1^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } \sigma_i > 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{если } \sigma_i < 0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.12) на множестве $\Omega = [x_0, +\infty[\times D$, где

$$x_0 = \beta \ln|Q_{i1}(t_2)|, \qquad D = \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \leq \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right\}.$$

На этом множестве ее правые части непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменной v_1 до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right) = -\sigma_i Q_{i1}(t)\left[1 - \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right) =$$

$$= -\sigma_i^2 Q_{i1}^2(t)\left[\varphi_i'(Y_i(t, v_1)) + Y_i(t, v_1)\varphi_i''(Y_i(t, v_1)) - \frac{Y_i(t, v_1)[\varphi_i'(Y_i(t, v_1))]^2}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right]$$

и при $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\right) =$$

$$= -\sigma_i Q_{i1}(t)\left[\frac{\varphi_k'(Y_i(t, v_1))\varphi_i(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)} - \frac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))\varphi_i(Y_i(t, v_1))}{Y_i^2(t, v_1)}\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\right) = \sigma_i^2 Q_{i1}^2(t)\frac{\varphi_i^2(Y_i(t, v_1))\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i^3(t, v_1)}\left[\frac{Y_i^2(t, v_1)\varphi_k''(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_i^2(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))\varphi_k(Y_i(t, v_1))} - \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))} - \frac{2Y_i(t, v_1)\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} - 2\right].$$

Поэтому, разлагая в (1.12) функции $\dfrac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}$ и $\dfrac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}$, $k = 1, \ldots, m$, при фиксированном $t \in [t_1, \omega[$ в окрестности точки $v_1 = 0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и выделяя линейные части, получаем систему уравнений

$$v_j' = \beta\big[f_j(x) + c_{j1}(x)v_1 + c_{j2}(x)v_2 + V_j(x, v_1, v_2)\big], \quad j = 1, 2, \tag{1.21}$$

в которой

$$f_1(x(t)) = -1 + \frac{Y_i(t, 0)}{\sigma_i^2 Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t, 0))},$$

$$f_2(x(t)) = \frac{\sigma_i + 1}{\sigma_i} -$$

$$- q_i(t)\left[1 + \frac{\sigma_i Q_{i1}(t, v_1)\varphi_i(Y_i(t, 0))}{Y_i(t, 0)} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t, 0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t, 0))}\right],$$

$$c_{11}(x) = -1 + \frac{f_i(x)}{\sigma_i}, \quad c_{12}(x) = 1 + f_1(x), \quad c_{22}(t) = -q_i(t) + \frac{2 + \sigma_i}{\sigma_i},$$

$$c_{21}(x(t)) = q_i(t)\left[\frac{\sigma_i Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t, 0))}{Y_i(t, 0)}\right]^2 \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t, 0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t, 0))}\left[\frac{Y_i(t, 0)\varphi_k'(Y_i(t, 0))}{\varphi_k(Y_i(t, 0))} - 1\right],$$

$$V_1(x(t), v_1, v_2) = -\frac{1}{\sigma_i}\left[1 - \frac{Y_i(t, 0)\varphi_i'(Y_i(t, 0))}{\varphi_k(Y_i(t, 0))}\right] v_1 v_2 + \frac{Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t, \xi))}{2Y_i(t, \xi)} \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i(t, \xi)\varphi_i'(Y_i(t, \xi))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi))} + \frac{Y_i^2(t, \xi)\varphi_i''(Y_i(t, \xi))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi))} - \frac{Y_i^2(t, \xi)[\varphi_i'(Y_i(t, \xi))]^2}{\varphi_i^2(Y_i(t, \xi))}\right] v_1^2 (1 + v_2),$$

$$V_2(x(t), v_1, v_2) =$$

$$= -\frac{q_i(t)[\sigma_i Q_{i1}(t)]^3}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t, \xi_k))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t, \xi_k))}\left[\frac{\varphi_i(Y_i(t, \xi_k))}{Y_i(t, \xi_k)}\right]^3 \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i^2(t, \xi_k)\varphi_k''(Y_i(t, \xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t, \xi_k))} + \frac{Y_i^2(t, \xi_k)\varphi_i'(Y_i(t, \xi_k))\varphi_k'(Y_i(t, \xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi_k))\varphi_k(Y_i(t, \xi_k))} - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_i(t, \xi_k)\varphi_i'(Y_i(t, \xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi_k))} - \frac{2Y_i(t, \xi_k)\varphi_k'(Y_i(t, \xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t, \xi_k))} - 2\right] v_1^2 + \frac{v_2^2}{\sigma_i},$$

где $\xi = \xi(t, v_1)$ и $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$, $k = 1, \ldots, m$, таковы, что $|\xi(t, v_1)| < |v_1| \le 1/2$, $|\xi_k(t, v_1)| < |v_1| \le 1/2$, $k = 1, \ldots, m$, при $t \in [t_1, \omega[$.

Учитывая пределы (1.15), (1.16) и (1.19), которые имеют место равномерно по $v_1 \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, а также (1.20), замечаем, что

$$\frac{V_i(x, v_1, v_2)}{|v_2| + |v_1|} \to 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad |v_1| + |v_2| \to 0$$

$$\text{равномерно по} \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

Кроме того, в силу (1.13), (1.16), (1.18), (1.19) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = \frac{1}{\sigma_i}, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = \frac{1+\sigma_i}{\sigma_i}.$$

При этом ясно, что предельная матрица коэффициентов линейной части системы (1.21) не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

Значит, для системы дифференциальных уравнений (1.21) выполнены все условия теоремы 2.1 из [3]. Согласно этой теореме система (1.21) имеет, по крайней мере, одно решение $v_i : [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, где $x_1 \in [x_0, +\infty[$, которое стремится к нулю при $x \to +\infty$. Ему в силу замен (1.11) соответствует решение уравнения (0.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\Phi_i(y(t)) = -\sigma_i Q_{i1}(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{I_{i1}(t)}{\sigma_i Q_{i1}(t)}[1+o(1)].$$

Поскольку здесь $\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = +\infty$, в силу (1.1) и (1.2) эти представления можно переписать в виде (1.3). Используя их и (0.1), приходим к выводу, что данное решение уравнения (0.1) является $\Pi_\omega(\pm\infty)$-решением.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* $m_1 < m$ *и для некоторого* $i \in \{m_1+1, \ldots, m\}$ *выполняются условия* $\sigma_i \neq 0$ *и*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] < 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m, \quad j \neq i. \tag{1.22}$$

Тогда для существования $\Pi_\omega(-1)$*-решений уравнения* (0.1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_i \pi_\omega(t) < 0, \quad \sigma_i \pi_\omega(t) I_{i2}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{1.23}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t) Q_{i2}(t)} = -1. \tag{1.24}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = \alpha_i \sigma_i I_{i2}(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{\sigma_i} \frac{I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}[1+o(1)]. \tag{1.25}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — $\Pi_\omega(-1)$-решение уравнения (0.1). Тогда в силу условий (1.22) выполняются согласно лемме 1.4 из [1] предельные соотношения (0.6). Поэтому с учетом (0.1) имеем асимптотическое соотношение (1.7). Отсюда, принимая во внимание условие 3 определения $\Pi_\omega(-1)$-решения, получаем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = -\alpha_i p_i(t) \pi_\omega(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.26}$$

Поскольку $y'(t) > 0$, $\varphi_i(y(t)) > 0$ и $p_i(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$, из этого соотношения следует, что выполняется первое из неравенств (1.23). Кроме того, из (1.26), учитывая определение $\Pi_\omega(-1)$-решения, находим

$$\Phi_i(y(t)) = -\alpha_i I_{i2}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{1.27}$$

Далее, применяя правило Лопиталя в форме Штольца, с учетом (1.26), леммы 1.2 из [1] и условия $\sigma_i \neq 0$ получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)}{I_{i2}(t)\varphi_i(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\left(1 - \dfrac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}\right)}{\pi_\omega(t) p_i(t)} = \alpha_i \sigma_i.$$

Отсюда следует, что имеет место первое из асимптотических представлений (1.25). Из него и (1.26) вытекает второе из асимптотических представлений (1.25) и второе из неравенств (1.23).

Согласно лемме 1.1 из [1] для рассматриваемого $\Pi_\omega(-1)$-решения $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0$. Поэтому в силу второго из асимптотических представлений (1.25) имеет место первое из условий (1.24).

Теперь, учитывая (1.5) и первое из асимптотических представлений (1.25), получаем

$$\frac{y''(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поскольку здесь $\dfrac{y''}{y} = \left(\dfrac{y'}{y}\right)' + \left(\dfrac{y'}{y}\right)^2$, используя второе из асимптотических представлений (1.25) и первое из условий (1.24), имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = \frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}\left(1+o(1) - \frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{\sigma_i Q_{i2}(t)}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом определения $\Pi_\omega(-1)$-решения следует, что

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{Q_{i2}(t)}{\sigma_i}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Сравнивая это асимптотическое соотношение со вторым из асимптотических соотношений (1.25), получаем второе из условий (1.24).

Достаточность. Уравнение (0.1) с помощью преобразования

$$\begin{gathered}\Phi_i(y(t)) = -\alpha_i I_{i2}(t)[1+v_1(x)],\\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\sigma_i}Q_{i2}(t)[1+v_2(x)], \qquad x = \beta\ln|I_{i2}(t)|,\end{gathered} \tag{1.28}$$

где

$$\beta = \begin{cases}1, & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_{i2}(t) = \pm\infty,\\ -1, & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_{i2}(t) = 0,\end{cases}$$

сведем к системе уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta\left\{-1 - v_1 - \frac{\alpha_i g_i(t)Y_i(t,v_1)}{\sigma_i I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,v_1))}[1+v_2]\right\},\\ v_2' &= \frac{\beta}{h_i(t)}\left\{-1 - v_2 - \frac{h_i(t)g_i(t)}{\sigma_i}[1+v_2]^2 + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\sigma_i I_{i2}(t)}{p_i(t)}\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\frac{\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)}\right\},\end{aligned} \tag{1.29}$$

в которой

$$g_i(t) = \frac{I_{i2}(t)Q_{i2}(t)}{I'_{i2}(t)}, \qquad h_i(t) = \pi_\omega(t)Q_{i2}(t),$$
$$Y_i(t,v_1) = \Phi_i^{-1}(-\alpha_i I_{i2}(t)[1+v_1]),$$

Φ_i^{-1} — функция, обратная для Φ_i, t — функция, обратная для $x = \beta\ln|I_{i2}(t)|$. Учитывая (1.23), нетрудно заметить, что правые части этой системы непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным v_1 и v_2 до второго порядка включительно на множестве $[x_1, +\infty[\times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, где $x_1 = \beta\ln|I_{i2}(t_1)|$ и число $t_1 \in [a, \omega[$ выбрано так, чтобы при $t \in [t_1, \omega[$ выполнялось неравенство $\alpha_i I_{i2}(t) < 0$, если $\sigma_i < 0$, и $3\alpha_i I_{i2}(t) < 2\int\limits_{y_0}^{+\infty}\frac{dz}{\varphi_i(z)}$, если $\sigma_i > 0$.

Кроме того, здесь в силу (1.24)

$$\lim_{t\uparrow\omega} g_i(t) = -1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} h_i(t) = 0, \tag{1.30}$$

а в силу (1.23) и вида функций Φ_i, Y_i выполняется условие (1.14). Из (1.14), (0.3) – (0.5) и леммы 1.2 из [1] следует, что при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, для которых $\varphi_k'(y) \neq 0$ при $y \geq y_0$, имеют место (1.15), (1.16) равномерно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Применяя правило Лопиталя в форме Штольца, с использованием условий $\sigma_i \neq 0$, (1.14), (1.16) и очевидного равенства

$$\frac{\partial Y_i(t, v_1)}{\partial t} = -\alpha_i \pi_\omega(t) p_i(t)\varphi_i(Y_i(t, v_1))(1 + v_1) \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \ v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \tag{1.31}$$

получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1)) I_{i2}(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{Y_i'(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\left(1 - \dfrac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(y(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right)}{\pi_\omega(t) p_i(t)} = \alpha_i\sigma_i(1 + v_1). \tag{1.32}$$

Из (1.31), (1.33) и первого из предельных соотношений (1.24) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t) Y_i'(t, v_1)}{Y_i(t, v_1)} = 0 \quad \text{при любом} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Таким образом, функция Y_i при каждом значении $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ имеет все свойства любого $\Pi_\omega(-1)$-решения уравнения (0.1), с использованием которых была установлена лемма 1.4 из [1]. Согласно этой лемме при $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ имеют место условия (1.19). Далее, точно таким же образом, как при доказательстве теоремы 1.1, устанавливаем, что (1.19) выполняются равномерно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и имеет место неравенство (1.20), где t_2 — некоторое число из промежутка $[t_1, \omega[$.

Разложив теперь при каждом фиксированном $t \in [t_2, \omega[$ функции $\dfrac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}$ и $\dfrac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}$, $k = 1, \ldots, m$, по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $v_1 = 0$ до второго порядка включительно, перепишем систему дифференциальных уравнений (1.29) в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta[f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_1(x, v_1, v_2)], \\ v_2' &= \frac{\beta}{h_i(t(x))}[f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_2(x, v_1, v_2)], \end{aligned} \tag{1.33}$$

где

$$c_{11}(x) = -1 + \frac{g_i(t)}{\sigma_i}\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right], \qquad c_{12}(x) = -\frac{\alpha_i g_i(t) Y_i(t,0)}{\sigma_i I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))},$$

$$c_{21}(x) =$$

$$= -\frac{\alpha_i \sigma_i I_{i2}^2(t)\varphi_i^2(Y_i(t,0))}{Y_i^2(t,0)} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}\left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_k'(Y_i(t,0))}{\varphi_k(Y_i(t,0))} - 1\right],$$

$$c_{22}(x) = -1 - \frac{2}{\sigma_i} g_i(t) h_i(t), \qquad f_1(x) = -1 - \frac{\alpha_i g_i(t) Y_i(t,0)}{\sigma_i \varphi_i(Y_i(t,0)) I_{i2}(t)},$$

$$f_2(x) = -1 - \frac{h_i(t) g_i(t)}{\sigma_i} + \frac{\sigma_i I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))},$$

$$V_1(x, v_1, v_2) = \frac{g_i(t)}{\sigma_i}\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right] v_1 v_2 + \frac{\alpha_i g_i(t) I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,\xi))}{2\sigma_i Y_i(t,\xi)} \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i(t,\xi)\varphi_i'(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))} + \frac{Y_i^2(t,\xi)\varphi_i''(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))} - \left(\frac{Y_i(t,\xi)\varphi_i'(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))}\right)^2\right] v_1^2 (1 + v_2),$$

$$V_2(x, v_1, v_2) = -\frac{g_i(t) h_i(t)}{\sigma_i} v_2^2 + \frac{\sigma_i I_{i2}^3(t)}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))} \times$$

$$\times \frac{\varphi_i^3(Y_i(t,\xi_k))}{Y_i^3(t,\xi_k)} \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}\left(\frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_k''(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))} + \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))} - 2\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))} + 2\right] v_1^2$$

и $\xi = \xi(t, v_1)$, $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$, $k = 1, \ldots, m$, таковы, что $|\xi(t, v_1)| < |v_1| \le 1/2$, $|\xi_k(t, v_1)| < |v_1| \le 1/2$, $k = 1, \ldots, m$, при $t \in [t_2, \omega[$.

Здесь в силу условий (1.30), (1.32), (1.15), (1.16), (1.19) и (1.20)

$$\lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_i(x, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_2, +\infty[,$$

где $x_2 = \beta \ln|I_{i2}(t_2)|$. Кроме того, имеем

$$\int_{x_2}^{+\infty} \frac{dx}{h_i(t(x))} = \beta \int_{t_2}^{\omega} \frac{p_i(t)\,dt}{Q_{i2}(t) I_{i2}(t)} = \beta \ln|Q_{i2}(t)|\Big|_{t_2}^{\omega} = \pm\infty. \tag{1.34}$$

Чтобы установить существование исчезающего на бесконечности решения у полученной системы дифференциальных уравнений, сведем ее к более удобному для исследования виду с помощью дополнительного преобразования

$$v_1(x) = w_2(x) - h_i(t) w_1(x), \qquad v_2(x) = w_1(x). \tag{1.35}$$

В результате этого преобразования система дифференциальных уравнений (1.33) примет вид

$$\begin{aligned} w_1' &= \frac{\beta}{h_i(t(x))}\big[\, F_1(x) + C_{11}(x)w_1 + C_{12}(x)w_2 + W_1(x, w_1, w_2)\,\big], \\ w_2' &= \beta\big[\, F_2(x) + C_{21}(x)w_1 + C_{22}(x)w_2 + W_2(x, w_1, w_2)\,\big], \end{aligned} \tag{1.36}$$

где

$$F_1(x) = f_2(x), \quad F_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad C_{11}(x) = c_{22}(x) - c_{21}(x)h_i(t(x)),$$

$$C_{12}(x) = c_{21}(x),$$

$$C_{21}(x) = c_{22}(x) - c_{21}(x)h_i(t(x)) + c_{12}(x) - c_{11}(x)h_i(t(x)),$$

$$C_{22}(x) = q_i(t(x)) + 1 + c_{21}(x) + c_{11}(x),$$

$$W_1(x, w_1, w_2) = V_2\big(x, w_2 - h_i(t(x))w_1, w_1\big),$$

$$W_2(x, w_1, w_2) = V_1\big(x, w_2 - h_i(t(x))w_1, w_1\big) + V_2\big(x, w_2 - h_i(t(x))w_1, w_1\big).$$

В силу (1.30) и указанных выше свойств функций f_i, $i = 1, 2$, c_{ij}, $i, j = 1, 2$, и V_i, $i = 1, 2$,

$$\lim_{x\to+\infty} C_{ii}(x) = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{F_i(x)}{C_{ii}(x)} = 0, \qquad i = 1, 2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{C_{12}(x)}{C_{11}(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{C_{21}(x)}{C_{22}(x)} = 0,$$

$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to 0}\frac{W_i(x, w_1, w_2)}{|w_1|+|w_2|} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_3, +\infty[,$$

где $x_3 \ge x_2$ — некоторое достаточно большое число. А поскольку, кроме того, выполняется условие (1.34), для системы (1.36) выполнены все условия теоремы 1.3 из [3]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (1.36) имеет, по крайней мере, одно решение $w_i : [x_4, +\infty[\to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, где $x_4 \ge x_3$, которое исчезает на $+\infty$. Ему в силу замен (1.35), (1.28) и предельных соотношений (1.1), (1.24) соответствует решение y дифференциального уравнения (0.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.25). Используя их, нетрудно видеть, что данное решение уравнения (0.1) является $\Pi_\omega(-1)$-решением.

Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Уравнение* (0.1) *не имеет* $\Pi_\omega(0)$*-решений при* $\omega < +\infty$.

Доказательство. Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из леммы 1.1 работы [1].

Теорема 1.4. *Пусть* $\omega = +\infty$, $m_1 < m$ *и для некоторого* $i \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}$ *при* $\mu_0 = 0$ *выполняются условия* (1.12), (1.13) *леммы* 1.4 *из* [1]. *Пусть, кроме того,* $\sigma_i \ne 0$ *и функция* $\psi_i(y) = \dfrac{\varphi_i(y)}{y^{1+\sigma_i}}$ *такова, что для любой непрерывно дифференцируемой функции* $L : [t_0, +\infty[\to]0, +\infty[$, *удовлетворяющей условию*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{tL'(t)}{L(t)} = 0, \tag{1.37}$$

имеет место соотношение

$$\psi_i(tL(t)) = \psi_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{1.38}$$

Тогда для существования $\Pi_{+\infty}(0)$*-решений уравнения* (0.1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\alpha_i\sigma_i I_{i3}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t > a', \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{t\,I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)} = 0, \tag{1.39}$$

где $a' = \max\{a, y_0\}$,

$$I_{i3}(t) = \int_{A_{i3}}^{t} p_i(\tau)\tau^{1+\sigma_i}\,\psi_i(\tau)\,d\tau,$$

$$A_{i3} = \begin{cases} a', & \text{если} \quad \int_{a'}^{+\infty} p_i(\tau)\tau^{1+\sigma_i}\,\psi_i(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ +\infty, & \text{если} \quad \int_{a'}^{+\infty} p_i(\tau)\tau^{1+\sigma_i}\,\psi_i(\tau)\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = t\,|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}[1+o(1)], \qquad y'(t) = |\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}[1+o(1)]. \tag{1.40}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y: [t_0, +\infty[\,\to [y_0, +\infty[$ — $\Pi_{+\infty}(0)$-решение уравнения (0.1). Тогда согласно лемме 1.1 из [1]

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\,y'(t)}{y(t)} = 1. \tag{1.41}$$

Кроме того, в силу выполнения при $\mu_0 = 0$ условий (1.12), (1.13) леммы 1.4 из [1] имеют место предельные соотношения (0.6). Учитывая их и (0.1), получаем (1.5), из которого в силу (1.41) следует, что

$$y''(t) = \alpha_i\,p_i(t)\varphi_i(t\,y'(t)[1+o(1)])[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поскольку функция $\psi_i(y) = \dfrac{\varphi_i(y)}{y^{1+\sigma_i}}$ в силу леммы 1.2 из [1] является медленно изменяющейся на бесконечности (см. [4, с. 1 – 15], гл. 1), полученное представление можно переписать в виде

$$y''(t) = \alpha_i\,p_i(t)[t\,y'(t)]^{1+\sigma_i}\,\psi_i(t\,y'(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Здесь функция $L(t) = y'(t)$ согласно определению $\Pi_{+\infty}(0)$-решения удовлетворяет условию (1.37). Поэтому, принимая во внимание (1.38), имеем

$$y''(t) = \alpha_i\,p_i(t)[t\,y'(t)]^{1+\sigma_i}\,\psi_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{1.42}$$

Из этого асимптотического соотношения с учетом определения $\Pi_{+\infty}(0)$-решения находим

$$[y'(t)]^{-\sigma_i} = -\alpha_i\,\sigma_i\,I_{i3}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{1.43}$$

откуда следует первое из условий (1.39) и асимптотическое представление вида

$$y'(t) = |\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Значит, имеет место второе из представлений (1.40). Справедливость первого из этих представлений согласно условию (1.41) следует из (1.43).

В силу (1.42) и (1.43)

$$\frac{t\,y''(t)}{y'(t)} = -\frac{p_i(t)\,t^{2+\sigma_i}\,\psi_i(t)}{\sigma_i\,I_{i3}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поскольку здесь согласно определению $\Pi_{+\infty}(0)$-решения левая часть стремится к нулю при $t \to +\infty$, выполняется второе из условий (1.39).

Достаточность. Дифференциальное уравнение (0.1) с помощью преобразования

$$y(t) = t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}[1+v_1(x)], \quad y'(t) = |\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}[1+v_2(x)], \qquad x = \beta \ln |I_{i3}(t)|, \tag{1.44}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i \sigma_i < 0, \\ -1, & \text{если } \alpha_i \sigma_i > 0, \end{cases}$$

сводим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\beta}{h_i(t)}\left[\frac{h_i(t)}{\sigma_i} + \left(-1 + \frac{h_i(t)}{\sigma_i}\right)v_1 + v_2\right], \\ v_2' &= \frac{\beta}{\sigma_i}\left[1 + v_2 + \frac{1}{q_i(t)}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k\Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}(1+v_1)\Big)\right], \end{aligned} \tag{1.45}$$

в которой t — функция, обратная для $x = \beta \ln |I_{i3}(t)|$,

$$h_i(t) = \frac{t I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)}, \qquad q_i(t) = \frac{p_i(t) t^{1+\sigma_i} \psi_i(t)}{\sigma_i I_{i3}(t) |\sigma_i I_{i3}(t)|^{1/\sigma_i}}.$$

Вследствие выполнения второго из условий (1.39)

$$\lim_{t \to +\infty} h_i(t) = 0 \tag{1.46}$$

и для функции $L(t) = |\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}$ выполняется условие (1.37). Поэтому

$$\lim_{t \to +\infty} t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i} = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{t\Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\Big)'}{t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}} = 1 \tag{1.47}$$

и согласно (1.38)

$$\varphi_i\Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\Big) = \Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\Big)^{1+\sigma_i} \psi_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Из последнего соотношения с учетом первого из условий (1.39) следует

$$q_i(t) = -\alpha_i p_i(t) \varphi_i\Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\Big)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{1.48}$$

В силу (1.47) функция $t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}$ имеет все те свойства $\Pi_{+\infty}(0)$-решения, которые были использованы при доказательстве леммы 1.4 из [1]. Поэтому

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p_k(t)\varphi_k\Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\Big)}{p_i(t)\varphi_i\Big(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\Big)} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq i. \tag{1.49}$$

Кроме того, в силу (0.5), леммы 1.2 из [1] и (1.47) равномерно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ выполняются условия (1.15), (1.16), в которых $Y_i(t, v_1) = t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}(1 + v_1)$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.45) на множестве $\Omega = [t_0, +\infty[\times D$, где $D = \left[(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \le \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2)\right]$ и число

$t_0 \in [a, +\infty[$ выбрано с учетом первого из условий (1.47) настолько большим, чтобы при $t \in [t_0, +\infty[$ выполнялось неравенство $t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i} > 2y_0$.

На этом множестве правые части системы непрерывны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменной v_1. Разложив при фиксированном $t \in [t_2, +\infty[$ функции $\varphi_k\left(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}(1+v_1)\right)$, $k = 1, \ldots, m$, по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $v_1 = 0$ до второго порядка включительно, перепишем систему дифференциальных уравнений (1.45) в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\beta}{h_i(t(x))}[f_1(x) + c_1(x)v_1 + v_2], \\ v_2' &= \frac{\beta}{\sigma_i}[f_2(x) + c_2(x)v_1 + v_2 + V(x, v_1)], \end{aligned} \tag{1.50}$$

где

$$f_1(x) = \frac{h_i(t)}{\sigma_i}, \quad f_2(x) = 1 + \frac{1}{q_i(t)}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k\left(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\right),$$

$$c_1(x) = -1 + \frac{h_i(t)}{\sigma_i},$$

$$c_2(x) = \frac{t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}}{q_i(t)}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k'\left(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\right),$$

$$V(x, v_1) = \frac{v_1^2\left(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}\right)^2}{2q_i(t)}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k''\left(t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}(1+\xi_k)\right)$$

и $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$, $k = 1, \ldots, m$, таковы, что $|\xi_k(t, v_1)| \le |v_1|$ при всех $t \ge t_0$ и $|v_1| \le 1/2$.

Здесь в силу условий (1.46), (1.48), (1.49) и условий (1.15), (1.16), в которых $Y_i(t, v_1) = t|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-1/\sigma_i}(1 + v_1)$, имеем

$$\begin{gathered} \lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \\ \lim_{x\to+\infty} c_1(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_2(x) = -1 - \sigma_i, \end{gathered} \tag{1.51}$$

$$\lim_{v_1\to 0} \frac{V(x, v_1)}{v_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, +\infty[. \tag{1.52}$$

Учитывая эти предельные соотношения, сводим систему (1.50) с помощью дополнительного преобразования к почти треугольному виду. Полагая в (1.50)

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = \rho(x)w_1 + w_2, \tag{1.53}$$

где $\rho : [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(x_1 \ge x_0)$ — исчезающее на $+\infty$ решение дифференциального уравнения

$$\rho' = \beta\left[\frac{c_2(x)}{\sigma_i} + \frac{\rho}{h_i(t(x))} - \frac{\rho^2}{h_i(t(x))}\right], \tag{1.54}$$

существующее в силу условий $\lim\limits_{x\to+\infty} c_2(x) = -1 - \sigma_i$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} h_i(t(x)) = 0$ на основании теоремы 1.3 из [3], получаем систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
w_1' &= \frac{\beta}{h_i(t(x))}\left[\, f_1(x) + C_1(x)w_1 + w_2 \,\right],\\
w_2' &= \frac{\beta}{\sigma_i}\left[\, f_2(x) - \rho(x) + C_2(x)w_2 + V(x, w_1) \,\right],
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

где

$$
C_1(x) = -1 + \frac{h_i(t(x))}{\sigma_i} + \rho(x), \qquad C_2(x) = 1 - \frac{\sigma_i\,\rho(x)}{h_i(t(x))}.
$$

Согласно условиям $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$, (1.46), (1.51) и (1.52)

$$
\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left[\, f_2(x) - \rho(x) \,\right] = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} C_1(x) = -1,
$$

$$
\lim_{w_1\to 0} \frac{V(x, w_1)}{w_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_1, +\infty[.
$$

Кроме того, имеем

$$
\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{h_i(t(x))} = \beta \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \pm\infty.
$$

Из (1.54) следует, что

$$
\frac{\sigma_i\,\rho(x)}{h_i(t(x))} = \frac{\beta\sigma_i\,\rho'(x)}{1-\rho(x)} - \frac{c_2(x)}{1-\rho(x)} \quad \text{при} \quad x \ge x_1 .
$$

Поэтому

$$
C_2(x) = 1 + \frac{c_2(x)}{1-\rho(x)} - \frac{\beta\sigma_i\,\rho'(x)}{1-\rho(x)}.
$$

Здесь в силу условий (1.51) и $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$

$$
\lim_{x\to+\infty}\left[1 + \frac{c_2(x)}{1-\rho(x)} \right] = -\sigma_i \ne 0,
$$

$$
\int_{x_1}^{+\infty} \frac{\beta\sigma_i\,\rho'(x)\,dx}{1-\rho(x)} = -\beta\sigma_i \ln|1-\rho(x)|\,\Big|_{x_1}^{+\infty} = \text{const}.
$$

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (1.55) выполнены условия теоремы 1.3 из [3]. На основании этой теоремы она имеет хотя бы одно решение $w_i : [x_2, +\infty[\to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, где $x_2 \ge x_1$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему в силу замен (1.53) и (1.43) соответствует решение y дифференциального уравнения (0.1), допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления (1.40). В силу этих представлений и условий теоремы данное решение, очевидно, удовлетворяет определению $\Pi_{+\infty}(0)$-решения.

Теорема доказана.

2. Пример уравнения со степенными коэффициентами. В качестве примера, иллюстрирующего установленные здесь и в [1] результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$
y'' = a_1 t^{\gamma_1} + a_1 t^{\gamma_2} y^{2+\sigma_2} \sin\frac{1}{y} + a_3 t^{\gamma_3} y^{1+\sigma_3} \ln^{\lambda} y, \tag{2.1}
$$

где $a_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, а $\sigma_2, \sigma_3, \lambda \in \mathbb{R}$ и такие, что $\sigma_2 \ne -1$, $\big|\, 1 +$

$+\sigma_3| + |\lambda| \neq 0$. Это уравнение является уравнением вида (0.1), в котором $m = 3$, $m_1 = 1$,

$$\alpha_k = \operatorname{sign} a_k, \quad p_k(t) = |a_k| t^{\gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_1(y) \equiv 1, \quad \varphi_2(y) = y^{2+\sigma_2} \sin\frac{1}{y}, \quad \varphi_3(y) = y^{1+\sigma_3} \ln^{\lambda} y.$$

При этом ясно, что функции φ_k, $k = 2, 3$, при некотором достаточно большом y_0 удовлетворяют условиям (0.4), (0.5). Приняв $\omega = +\infty$, выясним вопрос о существовании $\Pi_{+\infty}(\mu_0)$-решений уравнения (2.1) и их асимптотике при $t \to +\infty$. Поскольку в данном случае $\pi_\omega(t) = t$, имеем

$$\frac{\pi_\omega(t)\, p_k'(t)}{p_k(t)} = \gamma_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Кроме того, при $t \to +\infty$ имеют место асимптотические соотношения

$$I_{i1}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i| t^{1+\gamma_i}}{1+\gamma_i}, & \text{если } \gamma_i \neq -1, \\ |a_i| \ln t, & \text{если } \gamma_i = -1, \end{cases}$$

$$Q_{i1}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i| t^{2+\gamma_i}}{(1+\gamma_i)(2+\gamma_i)}, & \text{если } \gamma_i \neq -1, -2, \\ -|a_i| \ln t, & \text{если } \gamma_i = -2, \\ |a_i| t \ln t, & \text{если } \gamma_i = -1, \end{cases}$$

$$I_{i2}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i| t^{2+\gamma_i}}{2+\gamma_i}, & \text{если } \gamma_i \neq -2, \\ |a_i| \ln t, & \text{если } \gamma_i = -2, \end{cases} \qquad Q_{i2}(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{2+\gamma_i}{t}, & \text{если } \gamma_i \neq -2, \\ -\dfrac{1}{t \ln t}, & \text{если } \gamma_i = -2, \end{cases}$$

где $i \in \{1, 2, 3\}$, а также асимптотические соотношения

$$I_{23}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i| t^{2+\gamma_2+\sigma_2}}{2+\gamma_2+\sigma_2}, & \text{если } \gamma_2 + \sigma_2 \neq -2, \\ |a_i| \ln t, & \text{если } \gamma_2 + \sigma_2 = -2, \end{cases}$$

$$I_{33}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_3| t^{2+\gamma_3+\sigma_3} \ln^{\lambda} t}{2+\gamma_3+\sigma_3}, & \text{если } \gamma_3 + \sigma_3 \neq -2, \\ \dfrac{|a_i| \ln^{1+\lambda} t}{1+\lambda}, & \text{если } \gamma_3 + \sigma_3 = -2,\ \lambda \neq -1, \\ |a_i| \ln\ln t, & \text{если } \gamma_3 + \sigma_3 = -2,\ \lambda = -1. \end{cases}$$

В силу этих представлений из теорем 2.1 – 2.3 работы [1] и теорем 1.1 – 1.4 настоящей статьи вытекают следующие уравнения.

1_1. Если $\gamma_1 > \gamma_k$ при $k = 2, 3$, то для существования $\Pi_{+\infty}(-1)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_1 = -2$ и выполнялось неравенство $a_1 < 0$. При этом для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim -a_1 \ln t, \quad y'(t) \sim -\frac{a_1}{t} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

1_2. Если $\sigma_2 \neq 0$ и $\gamma_2 > \gamma_k$ при $k = 1, 3$, то для существования $\Pi_{+\infty}(-1)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_2 = -2, \quad a_2 < 0, \quad \sigma_2 < 0.$$

При этом для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim (a_2 \sigma_2 \ln t)^{-1/\sigma_2}, \quad y'(t) \sim -\frac{y(t)}{\sigma_2 t \ln t} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

1_3. Если $\sigma_3 \neq 0$ и $\gamma_3 > \gamma_k$ при $k = 1, 2$, $\gamma_3 > \gamma_2$, то для существования $\Pi_{+\infty}(-1)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_2 = -2, \quad a_3 < 0, \quad \sigma_3 < 0.$$

При этом для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim \left(|a_3||\sigma_3|^{1-\lambda} \ln t \ln^{\lambda} \ln t\right)^{-1/\sigma_3}, \quad y'(t) \sim -\frac{y(t)}{\sigma_3 t \ln t} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

2_1. Пусть $\gamma_1 - 1 > \gamma_k + \sigma_k$ при $k = 2, 3$. Тогда для существования $\Pi_{+\infty}(0)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_1 = -1$ и выполнялось неравенство $a_1 > 0$, причем каждое такое решение допускает асимптотические представления

$$y(t) \sim a_1 t \ln t, \quad y'(t) \sim a_1 \ln t \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

2_2. Пусть $\sigma_2 \neq 0$ и выполняются неравенства $\gamma_2 + \sigma_2 > \gamma_1 - 1$, $\gamma_2 + \sigma_2 > \gamma_3 + \sigma_3$. Тогда для существования $\Pi_{+\infty}(0)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_2 + \sigma_2 = -2, \quad a_2 \sigma_2 < 0,$$

причем каждое такое решение допускает асимптотические представления

$$y(t) \sim t|a_2 \sigma_2 \ln t|^{-1/\sigma_2}, \quad y'(t) \sim |a_2 \sigma_2 \ln t|^{-1/\sigma_2} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

2_3. Пусть $\sigma_3 \neq 0$ и выполняются неравенства $\gamma_3 + \sigma_3 > \gamma_1 - 1$, $\gamma_3 + \sigma_3 > \gamma_2 + \sigma_2$. Тогда для существования $\Pi_{+\infty}(0)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_3 + \sigma_3 = -2 \quad \text{и} \quad a_3 \sigma_3 < 0 \quad \text{при} \quad \lambda = -1,$$
$$a_3 \sigma_3 (1 + \lambda) < 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq -1.$$

Более того, для каждого такого решения в случае $\lambda = -1$ имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim t|a_3 \sigma_3 \ln \ln t|^{-1/\sigma_3}, \quad y'(t) \sim |a_3 \sigma_3 \ln \ln t|^{-1/\sigma_3} \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

а в случае $\lambda \neq -1$ —

$$y(t) \sim t \left|\frac{a_3 \sigma_3 \ln^{1+\lambda} t}{1+\lambda}\right|^{-1/\sigma_3}, \quad y'(t) \sim \left|\frac{a_3 \sigma_3 \ln^{1+\lambda} t}{1+\lambda}\right|^{-1/\sigma_3} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

3_1. Если для некоторого $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ выполняются неравенства $\gamma_1 > \gamma_k + |1 + \mu_0|(1 + \sigma_k)$ при $k = 2, 3$, то для существования $\Pi_{+\infty}(\mu_0)$-решений уравнения (2.1) необходимо и достаточно выполнение условий $\mu_0 = 1 + \gamma_1 > -1$ и $a_1(1+\gamma_1) > 0$. При этом для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim \frac{a_1 t^{2+\gamma_1}}{(1+\gamma_1)(2+\gamma_1)}, \qquad y'(t) \sim \frac{a_1 t^{1+\gamma_1}}{1+\gamma_1} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

3_2. Пусть $\sigma_2 \neq 0$ и для некоторого $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ выполняются неравенства $\gamma_2 + |1+\mu_0|(1+\sigma_2) > \gamma_1$, $\gamma_2 + |1+\mu_0|(\sigma_2 - \sigma_3) > \gamma_3$. Тогда для существования $\Pi_{+\infty}(\mu_0)$-решений уравнения (2.1) необходимо, а если имеет место одно из следующих двух условий:

$$\mu_0 \neq -\frac{1}{2}; \qquad \mu_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_2 < 0,$$

то и достаточно, чтобы $\mu_0 = -\dfrac{2+\gamma_2+\sigma_2}{\sigma_2} > -1$ и $a_2\sigma_2(2+\gamma_2+\sigma_2) < 0$. При этом для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim \left| \frac{a_2 \sigma_2^2 t^{2+\gamma_2}}{(2+\gamma_2)(2+\gamma_2+\sigma_2)} \right|^{-1/\sigma_2}, \qquad y'(t) \sim -\frac{(2+\gamma_2)y(t)}{\sigma_2 t} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

3_3. Пусть $\sigma_3 \neq 0$ и для некоторого $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ выполняются неравенства $\gamma_3 + |1+\mu_0|(1+\sigma_3) > \gamma_1$, $\gamma_3 + |1+\mu_0|(\sigma_3 - \sigma_2) > \gamma_2$. Тогда для существования $\Pi_{+\infty}(\mu_0)$-решений уравнения (2.1) необходимо, а если имеет место одно из следующих двух условий:

$$\mu_0 \neq -\frac{1}{2}; \qquad \mu_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_3 < 0,$$

то и достаточно, чтобы $\mu_0 = -\dfrac{2+\gamma_3+\sigma_3}{\sigma_3} > -1$ и $a_3\sigma_3(2+\gamma_3+\sigma_3) < 0$. При этом для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) \sim \left| \frac{a_3 |\sigma_3|^{2-\lambda} |2+\gamma_3|^{\lambda-1} t^{2+\gamma_3} \ln^{\lambda} t}{2+\gamma_3+\sigma_3} \right|^{-1/\sigma_2},$$

$$y'(t) \sim -\frac{(2+\gamma_3)y(t)}{\sigma_3 t} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

4. Если выполняется одно из следующих трех условий:

а) $\sigma_k < -1$, $k = 2, 3$; б) $-1 < \sigma_2 \neq 0$, $\sigma_2 > \sigma_3$; с) $-1 < \sigma_3 \neq 0$, $\sigma_2 < \sigma_3$,

то уравнение (2.1) не имеет $\Pi_{+\infty}(\pm\infty)$-решений.

Замечание. Указанные в пп. 1_2, 1_3, 2_2, 2_3, 3_2 и 3_3 асимптотические представления получены после уточнения представлений, приведенных в соответствующих теоремах.

3. Выводы. В [1] для нелинейного дифференциального уравнения вида (0.1) был выделен достаточно широкий класс неограниченных решений, а именно, класс так называемых $\Pi_\omega(\mu_0)$-решений, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$. Кроме того, были указаны условия, при выполнении которых на решениях из данного класса уравнение (0.1) может быть заменено двучленным дифференциальным уравнением вида $y'' = \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y)[1+o(1)]$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$. При исследовании таких уравнений выяснилось, что $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения по своим асимптотическим свойствам распадаются на четыре непересекающихся подмножества, соответствующие следующим значениям параметра μ_0: 1) $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$; 2) $\mu_0 = 0$; 3) $\mu_0 = -1$; 4) $\mu_0 \pm = \infty$. Решения каждого из этих подмножеств в [1] и в настоящей работе изучены в отдельности. При этом получены необходимые и достаточные условия существования таких решений, а также установлены для них и их производных первого порядка асимптотические представления при $t \uparrow \omega$. Ряд из приведенных здесь представлений лишь неявно определяют указанного типа решения. Однако наличие асимптотики для производной позволяет при конкретном виде функций φ_i (см. рассмотренный выше пример) получить для них и явные асимптотические формулы. Вследствие произвольности $\omega \leq +\infty$ результаты работы можно использовать для описания асимптотики не только правильных, но и различного типа сингулярных решений уравнения (0.1).

1. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 3. – С. 338–355.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 433–444.
4. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Получено 20.12.2004