УДК 519.21

В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Т. В. Каданкова (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ДВУХГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОЦЕССА ПУАССОНА С ПОКАЗАТЕЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОМПОНЕНТОЙ

For a Poisson process with exponentially distributed negative component, we obtain integral transforms of joint distributions of the moment of the first exit from an interval and the value of the overjump across the boundary at the exit moment and integral transforms of the joint distribution of the moment of the first hit of the interval and the value of the process at this moment. On the exponentially distributed time interval, we obtain distributions of the total sojourn time of process in the interval, the joint distribution of the supremum, infimum, and the value of the process, and the joint distribution of the number of upward and downward crossings of the interval. We also obtain generatrices of the joint distribution of the number of hits of the interval and the number of overjumps across the interval.

Для процесу Пуассона з показниково розподіленою від'ємною компонентою отримано інтегральні перетворення сумісного розподілу: моменту першого виходу з інтервалу та величини перестрибу межі в момент виходу, моменту першого входження в інтервал і значення процесу в момент входження. На показниково розподіленому часовому проміжку одержано розподіли сумарного часу перебування процесу в інтервалі, сумісного розподілу супремуму, інфімуму і значення процесу, сумісного розподілу числа перетинів інтервалу зверху і знизу, а також генератриси сумісного розподілу числа входжень в інтервал і числа перестрибів через інтервал.

Введение. Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями [1] и кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{t} \ln \mathrm{E} e^{-p\xi(t)} = \frac{1}{2} p^2 \sigma^2 - \alpha p + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2} \right) \Pi(dx), \qquad (1)$$

$$\operatorname{Re} p = 0.$$

Зафиксируем $B > 0$ и введем случайную величину

$$\chi(y) = \inf\{ t : y + \xi(t) \notin [0, B] \}, \quad y \in [0, B],$$

— момент первого выхода процесса $y + \xi(t)$ из интервала $[0, B]$. Кроме того, введем события: $A^B = \{\xi(\chi(y)) > B\}$ — выход процесса из интервала произошел через верхнюю границу B; $A_0 = \{\xi(\chi(y)) < 0\}$ — выход процесса из интервала произошел через нижнюю границу 0. Определим случайную величину

$$X(y) = (\xi(\chi(y)) - B)\mathbf{I}_{A^B} + (-\xi(\chi(y)))\mathbf{I}_{A_0}, \quad \mathrm{P}[A^B + A_0] = 1,$$

— величину перескока процесса через границу в момент первого выхода из интервала, где $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_A(\omega)$ — индикатор события A.

Первая двухграничная задача для процессов с независимыми приращениями и кумулянтой общего вида (1) была решена И. И. Гихманом и А. В. Скороходом [2, с. 450]. Они определили совместное распределение $\{\xi^-(t), \xi(t), \xi^+(t)\}$, где $\xi^+(t) = \sup\limits_{u \le t} \xi(u)$, $\xi^-(t) = \inf\limits_{u \le t} \xi(u)$. Для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями и кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{2} p^2 \sigma^2 - \alpha p + \int_0^{\infty} \left(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2} \right) \Pi(dx), \quad \operatorname{Re} p \ge 0, \qquad (1')$$

совместное распределение $\{\chi(y), X(y)\}$ различными методами изучали D. J. Emery [3], Е. А. Печерский [4], В. М. Шуренков и В. Н. Супрун [5 – 7]. В частности, для определения распределений $\chi(y)$, $\{\chi(y), X(y)\}$ В. М. Шуренков предложил использовать формулы Е. Б. Дынкина [8] (см. [5 – 7]), справедливые для любого однородного марковского процесса. Применяя эту идею, В. М. Шуренков и В. Н. Супрун получили резольвентные представления для преобразований Лапласа распределения $\chi(y)$:

$$\mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A_0] = \frac{R_s(x)}{R_s(B)},$$

$$\mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A^B] = 1 - \frac{R_s(x)}{R_s(B)} - s\,\frac{R_s(x)}{R_s(B)}\int_0^B R_s(u)\,du + s\int_0^x R_s(u)\,du.$$

В этих формулах $R_s(x)$, $x \ge 0$, — резольвента, определенная своим преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-px} R_s(x)\,dx = \frac{1}{k(p)-s}, \quad \mathrm{Re}\,p > c(s),$$

где $c(s) > 0$, $s > 0$, — единственный корень в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,p > 0$ уравнения $k(p) - s = 0$. Для процесса Пуассона с положительными скачками и отрицательным течением резольвентные представления для преобразований Лапласа распределения $\chi(y)$ были приведены В. С. Королюком [9].

В. М. Шуренков [7] получим для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями преобразование Лапласа совместного распределения $\{\chi(y), \xi(\chi(y))\}$ в терминах совместного распределения $\{\xi^-(t), \xi(t), \xi^+(t)\}$ и меры $\Pi(A)$, а также привел предельную теорему для распределения величины перескока процесса через границу интервала. Используя идею В. М. Шуренкова (о применении формул Е. Б. Дынкина), авторы [10, с. 187] приводят представление преобразований Лапласа распределения $\{\chi(y), \xi(\chi(y))\}$ для однородного процесса с независимыми приращениями и кумулянтой (1). В этом представлении совместное распределение $\{\chi(y), \xi(\chi(y))\}$ выражается через другой двухграничный функционал — совместное распределение $\{\xi^-(t), \xi(t), \xi^+(t)\}$ и меру $\Pi(A)$.

В работах [11, 12] для определения совместного распределения $\{\chi(y), X(y)\}$ процесса с кумулянтой общего вида (1) авторы предложили принципиально другую идею. Их метод является простым и естественным и основан на использовании совместных распределений одограничных функционалов $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_x, T_x\}$, $x \ge 0$, где

$$\tau^x = \inf\{t : \xi(t) > x\}, \qquad T^x = \xi(\tau^x) - x,$$

$$\tau_x = \inf\{t : \xi(t) < -x\}, \qquad T_x = -\xi(\tau_x) - x$$

— момент и величина первого перескока верхнего уровня x процессом, а также момент и величина первого перескока процессом нижнего уровня $-x$. Интегральные преобразования совместных распределений этих одограничных функционалов процесса хорошо изучены и были получены в 60-х годах прошлого столетия в работах Б. А. Рогозина, Е. А. Печерского, А. А. Боровкова, В. М. Золотарева [13 – 16] и других. Использовав прямой вероятностный метод (формулу полной вероятности, однородность процесса по пространству, свойство строгой марковости процесса), для определения преобразований Лапласа $\mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A^B]$, $\mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A_0]$, совместных распределений $\{\chi(y), X(y)\}$ авторы [11, 12] составили и решили систему уравнений

$$\mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in du] = \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A^B] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in dv, A_0]\mathrm{E}[e^{-s\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du],$$

$$\mathrm{E}[e^{-s\tau_y}; T_y \in du] = \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A_0] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in dv, A^B]\mathrm{E}[e^{-s\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in du].$$

В полученных после решения этой системы формулах преобразования Лапласа совместного распределения $\{\chi(y), X(y)\}$ выражаются через совместные распределения $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_x, T_x\}$, $x \ge 0$, однограничных функционалов, что позволяет эффективно решать другие двухграничные задачи для процессов с независимыми приращениями. В частности, для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями и кумулянтой (1′) ряд таких задач решен в [17 – 19].

В настоящей работе приведено решение ряда двухграничных задач для процесса Пуассона с показательно распределенными отрицательными скачками. Отметим, что в работе [20] для такого класса процессов (случайного блуждания с геометрически распределенными отрицательными скачками) определены производящие функции распределения $\chi(y)$ и $\{\xi^-(t), \xi(t), \xi^+(t)\}$, а также получены переходные и стационарные характеристики блуждания в интервале с двумя отражающими границами.

1. Определения и вспомогательные результаты. Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой (1). Будем предполагать, что выборочные траектории процесса непрерывны справа и $\xi(0) = 0$. Отметим, что процесс $\xi(t)$, $t \ge 0$, является строго марковским и однородным по пространству [2]. Эти свойства процесса будут неоднократно использоваться в дальнейшем при составлении уравнений. При решении граничных задач для процессов ключевую роль играет факторизационное тождество Спицера – Рогозина

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(\nu_s)} = \frac{s}{s - k(p)} = \mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}\mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}, \qquad \mathrm{Re}\, p = 0,$$

где ν_s — показательно распределенная с параметром $s > 0$ не зависимая от процесса случайная величина: $\mathrm{P}[\nu_s > t] = \exp\{-st\}$, $t \ge 0$. Для интегральных преобразований безгранично делимых случайных величин $\xi^\pm(\nu_s)$ справедливы следующие формулы:

$$\mathrm{E}\exp\{-p\xi^\pm(\nu_s)\} = \exp\left\{\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-st}\,\mathrm{E}[e^{-p\xi(t)} - 1; \pm\xi(t) > 0]dt\right\}, \qquad \pm\mathrm{Re}\, p \ge 0.$$

В следующей лемме приведены аналитические выражения для интегральных преобразований однограничных функционалов, которые будут применяться при решении двухграничных задач для процессов.

Лемма 1. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (1). *Тогда при* $s > 0$, $x \ge 0$:

1) *для интегральных преобразований совместных распределений* $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_x, T_x\}$ *при* $\mathrm{Re}\, p \ge 0$ *выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-s\tau^x}\exp\{-pT^x\}] &= (\mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)})^{-1}\mathrm{E}[e^{-p(\xi^+(\nu_s)-x)}; \xi^+(\nu_s) > x], \\ \mathrm{E}[e^{-s\tau_x}\exp\{-pT_x\}] &= (\mathrm{E}e^{p\xi^-(\nu_s)})^{-1}\mathrm{E}[e^{p(\xi^-(\nu_s)+x)}; -\xi^-(\nu_s) > x]; \end{aligned} \tag{2}$$

2) *для совместных распределений* $\{\xi(\nu_s), \xi^{\pm}(\nu_s)\}$ *справедливы формулы*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x] &= \mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}\mathrm{E}[e^{-p\xi^+(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x], \quad \mathrm{Re}\,p \le 0, \\ \mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \xi^-(\nu_s) \ge -x] &= \mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}\mathrm{E}[e^{-p\xi^-(\nu_s)}; \xi^-(\nu_s) \ge -x], \quad \mathrm{Re}\,p \ge 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Равенства (2), (3) получены в работе Е. А. Печерского и Б. А. Рогозина [14]. Приведем доказательство этих формул с использованием факторизационного тождества Спицера – Рогозина и простых вероятностных рассуждений. Установим формулы (2). Согласно формуле полной вероятности, свойству строгой марковости процесса и его однородности по пространству, для всех $x \ge 0$ справедливо равенство

$$\mathrm{E}[e^{-p\xi^+(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) > x] = \mathrm{E}[e^{-s\tau^x - p\xi(\tau^x)}]\mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}, \quad \mathrm{Re}\,p \ge 0. \tag{4}$$

Приведем также следующее краткое пояснение. Очевидно, что событие $\{\xi^+(t) > x\}$ эквивалентно событию $\{\tau^x \le t\}$. Тогда

$$\mathrm{E}[e^{-p\xi^+(t)}; \xi^+(t) > x] = \mathrm{E}[e^{-p\xi^+(t)}; \tau^x \le t] = \mathrm{E}[e^{-p\xi(\tau^x)}e^{-p\xi^+(t-\tau^x)}; \tau^x \le t].$$

Поскольку τ^x — марковский момент, случайная величина $\xi^+(t-\tau^x)$ не зависит от сигма-алгебры $\mathfrak{F}_{\tau^x}$, порожденной событиями $\{\xi(v) < u\} \cap \{\tau^x > v\}$, $v \ge 0$, $u \in \mathbb{R}$. Поэтому, согласно формуле полной вероятности,

$$\mathrm{E}[e^{-p\xi(\tau^x)}e^{-p\xi^+(t-\tau^x)}; \tau^x \le t] = \int_0^t \mathrm{E}[e^{-p\xi(u)}; \tau^x \in du]\mathrm{E}e^{-p\xi^+(t-u)}, \quad \mathrm{Re}\,p \ge 0.$$

Подставляя правую часть этого равенства в предыдущую формулу, имеем

$$\mathrm{E}[e^{-p\xi(t)}; \xi^+(t) > x] = \int_0^t \mathrm{E}[e^{-p\xi(u)}; \tau^x \in du]\mathrm{E}e^{-p\xi^+(t-u)}, \quad \mathrm{Re}\,p \ge 0.$$

Умножая последнее равенство на se^{-st} — плотность случайной величины ν_s — и выполняя в обеих частях интегрирование по всем $t \ge 0$, получаем формулу (4). Разделив обе части формулы (4) на $\exp\{-px\}\mathrm{E}\exp\{-p\xi^+(\nu_s)\}$, будем иметь интегральное преобразование совместного распределения $\{\tau^x, T^x\}$ и первое из равенств (2). Применив это равенство к процессу $-\xi(t)$, $t \ge 0$, получим вторую из формул (2).

Установим справедливость равенств (3). Используя формулу полной вероятности, однородность процесса по пространству и тот факт, что τ^x — марковский момент, выводим равенство

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(\nu_s)} = \mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x] + \mathrm{E}[e^{-s\tau^x - p\xi(\tau^x)}]\mathrm{E}e^{-p\xi(\nu_s)}, \quad \mathrm{Re}\,p = 0. \tag{5}$$

Равенство (5) отображает то обстоятельство, что приращение процесса на интервале $[0, \nu_s]$ происходит на траекториях, которые либо не пересекают верхний уровень x (первое слагаемое в правой части равенства), либо пересекают его с последующими приращениями процесса на интервале $[0, \nu_s]$ (второе слагаемое в правой части равенства). В дополнение к этим пояснениям приведем также следующие рассуждения. Очевидно, что событие $\{\tau^x > t\}$ эквивалентно событию $\{\xi^+(t) \le x\}$. Тогда, согласно формуле полной вероятности, справедливы равенства

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(t)} = \mathrm{E}[e^{-p\xi(t)}; \tau^x > t] + \mathrm{E}[e^{-p\xi(t)}; \tau^x \le t] =$$

$$= \mathrm{E}[e^{-p\xi(t)}; \xi^+(t) \le x] + \mathrm{E}[e^{-p\xi(\tau^x)}e^{-p(\xi(t)-\xi(\tau^x))}; \tau^x \le t], \quad \mathrm{Re}\, p = 0.$$

Поскольку τ^x — марковский момент, приращение процесса $\xi(t) - \xi(\tau^x) \doteq \xi(t - \tau^x)$ (символ $\doteq$ означает, что соответствующие случайные величины одинаково распределены) не зависит от сигма-алгебры $\mathfrak{F}_{\tau^x}$, порожденной событиями $\{\xi(v) < u\} \cap \{\tau^x > v\}$, $v \ge 0$, $u \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\mathrm{E}[e^{-p\xi(\tau^x)}e^{-p(\xi(t)-\xi(\tau^x))}; \tau^x \le t] = \int_0^t \mathrm{E}[e^{-p\xi(u)}; \tau^x \in du]\mathrm{E}e^{-p\xi(t-u)}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, имеем

$$\mathrm{E}e^{-p\xi(t)} = \mathrm{E}[e^{-p\xi(t)}; \xi^+(t) \le x] + \int_0^t \mathrm{E}[e^{-p\xi(u)}; \tau^x \in du]\mathrm{E}e^{-p\xi(t-u)}.$$

Умножая последнее равенство на se^{-st} — плотность случайной величины ν_s — и выполняя интегрирование по всем $t \ge 0$, получаем равенство (5). Подставляя в равенство (5) выражение для $\mathrm{E}[e^{-s\tau^x}\exp\{-p\xi(\tau^x)\}]$ из формулы (4) и используя при этом факторизационное тождество Спицера – Рогозина, находим

$$\mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x] = \mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}\mathrm{E}[e^{-p\xi^+(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x], \quad \mathrm{Re}\, p = 0.$$

Поскольку в правой и левой частях этого равенства содержатся функции, аналитические при $\mathrm{Re}\, p \le 0$, оно выполняется для всех $\mathrm{Re}\, p \le 0$. Таким образом, мы получили первое из равенств (3). Применяя эту формулу к случайному процессу $-\xi(t)$, $t \ge 0$, получаем вторую из формул (3).

Таким образом, для доказательства равенств (2), (3) было использовано факторизационное тождество Спицера – Рогозина и два очевидных вероятностных равенства (4), (5). По мнению авторов, это наиболее элементарный способ доказательства равенств леммы для указанных интегральных преобразований.

В настоящей работе мы решим ряд двухграничных задач для частного случая однородного процесса с независимыми приращениями — процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой. Большинство рассмотренных в статье двухграничных функционалов этого процесса будут получены как следствия соответствующих результатов для однородных процессов с независимыми приращениями и кумулянтой (1). Перейдем к определению процесса Пуассона с показательной компонентой.

Пусть $\eta \in (0, \infty)$ — положительная случайная величина, γ — показательно распределенная случайная величина с параметром $\lambda > 0 : \mathrm{P}[\gamma > x] = e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$. Введем случайную величину $\xi \in \mathbb{R}$ с функцией распределения

$$F(x) = ae^{x\lambda}\mathbf{I}_{\{x \le 0\}} + (a + (1-a)\mathrm{P}[\eta < x])\mathbf{I}_{\{x > 0\}}, \qquad a \in (0, 1), \quad \lambda > 0.$$

Определим непрерывный справа ступенчатый процесс Пуассона $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, с кумулянтой

$$k(p) = c\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-xp}-1)dF(x) = a_1\frac{p}{\lambda-p} + a_2(\mathrm{E}e^{-p\eta}-1), \quad c>0, \quad \mathrm{Re}\,p = 0, \tag{6}$$

где $a_1 = ac$, $a_2 = (1-a)c$. У процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, через показательно распределенные с параметром c интервалы времени с вероятностью $1-a$ происходят положительные скачки величины η и с вероятностью a — отрицательные скачки, величина которых γ показательно распределена с параметром λ. Этот процесс будем называть процессом Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой.

Первое слагаемое в правой части (6) — простейший пример дробно-рациональной функции, второе слагаемое — кумулянта монотонного процесса Пуассона с положительными скачками величины η. Из монографии А. А. Боровкова [15] известно (см. также [10]), что в этом случае уравнение $k(p)-s = 0$, $s>0$, имеет в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>0$ единственный корень $c(s) \in \in (0,\lambda)$, и для интегральных преобразований случайных величин $\xi^+(\nu_s)$, $\xi^-(\nu_s)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)} &= \frac{c(s)}{\lambda}\frac{\lambda-p}{c(s)-p}, \quad \mathrm{Re}\,p \leq 0, \\ \mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)} &= \frac{c\lambda}{c(s)}(p-c(s))R(p,s), \quad \mathrm{Re}\,p \geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$R(p,s) = (a_1p + (p-\lambda)[s - a_2(Ee^{-p\eta}-1)])^{-1}, \quad \mathrm{Re}\,p \geq 0, \quad p \neq c(s). \tag{8}$$

Из равенств (2) и формул (7) нетрудно получить интегральные преобразования совместных распределений $\{\tau_x, T_x\}$, $\{\tau^x, T^x\}$ для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-s\tau_x}; T_x \in du] &= (\lambda - c(s))e^{-xc(s)-\lambda u}du = \mathrm{E}e^{-s\tau_x}\,\mathrm{P}[\gamma \in du], \\ \int_0^{\infty} e^{-px}\,\mathrm{E}e^{-s\tau^x - z\xi(\tau^x)}dx &= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p+z-c(s)}{z-c(s)}\frac{R(p+z,s)}{R(z,s)}\right), \quad \mathrm{Re}\,p>0, \quad \mathrm{Re}\,z \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из первой из формул (9) следует, что случайные величины τ_x, T_x являются независимыми и для всех $x \geq 0$ величина перескока через нижнюю границу T_x показательно распределена с параметром λ. Это свойство является характерной особенностью процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой. Функция $R(p,s)$ аналитическая при $\mathrm{Re}\,p > c(s)$ и $\lim_{p\to\infty}R(p,s) = 0$. Следовательно [21], она представима абсолютно сходящимся интегралом Лапласа

$$R(p,s) = \int_0^{\infty} e^{-px}R_s(x)dx, \quad \mathrm{Re}\,p > c(s). \tag{10}$$

Функцию $R_s(x)$, $x \geq 0$, будем называть резольвентой процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой. При этом будем полагать, что $R_s(x) = 0$ при $x<0$. Отметим, что $R_s(0) = \lim_{p\to\infty}pR(p,s) = (c + + s)^{-1}$ и согласно (7)

$$\mathrm{P}[\xi^-(\nu_s)=0] = \frac{c(s)}{\lambda}, \qquad \mathrm{P}[\xi^+(\nu_s)=0] = \frac{\lambda}{c(s)}\frac{s}{s+c}.$$

Из второй из формул (7) следует равенство

$$R(p,s) = \frac{c(s)}{s\lambda}\frac{1}{p-c(s)}\mathrm{E}e^{-p\xi^+(\nu_s)}, \quad \mathrm{Re}\,p > c(s). \tag{11}$$

В правой части этого равенства содержатся функции, которые при $\mathrm{Re}\,p > c(s)$ являются преобразованиями Лапласа. Следовательно, совпадают функции-оригиналы левой и правой частей равенства (11) и

$$R_s(x) = \frac{c(s)}{s\lambda}\int_{-0}^{\infty} e^{c(s)(x-u)}\,d\,\mathrm{P}[\xi^+(\nu_s)<u], \qquad x \geq 0. \tag{12}$$

Итак, мы получили представление для резольвенты процесса Пуассона с показательно распределенной компонентой. Из представления (12) следует, что функция $R_s(x)$, $x \geq 0$, является положительной монотонно возрастающей непрерывной функцией и $R_s(x) < A(s)\exp\{xc(s)\}$, $A(s) < \infty$. Поэтому

$$\int_0^{\infty} R_s(x)e^{-\alpha x}\,dx < \infty$$

при $\alpha > c(s)$. Кроме того, очевидно, что в окрестности любой точки $x \geq 0$ функция $R_s(x)$ имеет ограниченную вариацию. Согласно [21, с. 68], справедлива формула обращения

$$R_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{xp}R(p,s)\,dp, \quad \alpha > c(s). \tag{13}$$

Равенство (13) определяет резольвенту процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой. Именно это определение резольвенты является эффективным при исследовании граничных функционалов процесса, так как позволяет обращать преобразования Лапласа в аналитических выражениях при решении граничных задач.

2. Выход из интервала. Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой (1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [11]. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (1), $B > 0$, $y \in [0, B]$, $x = B - y$, $\xi(0) = 0$, *и*

$$\chi(y) = \inf\{t : y + \xi(t) \notin [0,B]\},$$
$$X(y) = (\xi(\chi(y)) - B)\mathbf{I}_{A^B} + (-\xi(\chi(y)))\mathbf{I}_{A_0}$$

— *момент первого выхода процесса* $y + \xi(t)$ *из интервала* $[0, B]$ *и величина перескока процесса через границу в момент первого выхода. Тогда для преобразований Лапласа совместного распределения* $\{\chi(y), X(y)\}$ *при* $s > 0$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y)\in du, A^B] &= f_+^s(x,du) + \int_0^{\infty} f_+^s(x,dv)\mathbf{K}_+^s(v,du), \\ \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y)\in du, A_0] &= f_-^s(y,du) + \int_0^{\infty} f_-^s(y,dv)\mathbf{K}_-^s(v,du), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$f_+^s(x, du) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in du] - \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_y}; T_y \in dv]\mathrm{E}[e^{-s\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du],$$

$$f_-^s(y, du) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_y}; T_y \in du] - \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in dv]\mathrm{E}[e^{-s\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in du];$$

$\mathbf{K}_\pm^s(v, du) = \sum_{n=1}^\infty K_\pm^{(n)}(v, du, s),\ v > 0,$ — *ряд из последовательных итераций*;

$$K_\pm^{(1)}(v, du, s) = K_\pm(v, du, s),$$

$$K_\pm^{(n+1)}(v, du, s) = \int_0^\infty K_\pm^{(n)}(v, dl, s) K_\pm(l, du, s), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

— *итерации ядер* $K_\pm(v, du, s)$, *которые определены равенствами*

$$\begin{aligned} K_+(v, du, s) &= \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in dl]\mathrm{E}[e^{-s\tau^{l+B}}; T^{l+B} \in du], \\ K_-(v, du, s) &= \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in dl]\mathrm{E}[e^{-s\tau_{l+B}}; T_{l+B} \in du]. \end{aligned} \tag{16}$$

Равенства (14) позволяют эффективно находить интегральные преобразования совместного распределения момента выхода из интервала и величины перескока через границу для частных примеров (см. [11]) процессов с независимыми приращениями. Мы применим формулы (14) – (16) для определения интегрального преобразования совместного распределения момента первого выхода из интервала и величины перескока через границу для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$ — *процесс Пуассона с показательно распределенной компонентой и кумулянтой* (6), $B > 0,\ y \in [0, B],\ x = B - y,$ $\xi(0) = 0,$ *и*

$$\chi(y) = \inf\{t : y + \xi(t) \notin [0, B]\},$$

$$X(y) = (\xi(\chi(y)) - B)\mathbf{I}_{A^B} + (-\xi(\chi(y)))\mathbf{I}_{A_0}$$

— *момент первого выхода процесса Пуассона из интервала* $[0, B]$ *и величина перескока через границу в момент выхода. Тогда при* $s > 0$:

1) *для интегральных преобразований совместных распределений случайных величин* $\{\chi(y), X(y)\}$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A_0] &= (\lambda - c(s))e^{-yc(s)-\lambda u}\,du(1 - \mathrm{E}[e^{-s\tau^x - c(s)\xi(\tau^x)}])K(s)^{-1}, \\ \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A^B] &= \mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in du] - \\ &- \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A_0]\mathrm{E}[e^{-s\tau^{\gamma+B}}; T^{\gamma+B} \in du], \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$K(s) = 1 - \mathrm{E}\exp\{-s\tau_B\}\mathrm{E}\exp\{-s\tau^{\gamma+B} - c(s)T^{\gamma+B}\},$$

$$\mathrm{E}\exp\{-s\tau^{\gamma+B} - c(s)T^{\gamma+B}\} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{E}\exp\{-s\tau^{u+B} - c(s)T^{u+B}\}\,du;$$

в частности,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A_0] &= \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-yc(s)}(1 - \mathrm{E}[e^{-s\tau^x - c(s)\xi(\tau^x)}])K(s)^{-1}, \\ \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A^B] &= \mathrm{E}e^{-s\tau^x} - \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A_0]\mathrm{E}e^{-s\tau^{\gamma+B}}; \end{aligned} \tag{18}$$

2) *для преобразований Лапласа случайной величины* $\chi(y)$ *справедливы резольвентные представления*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A_0] &= e^{-\lambda(u+B)} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}\,du, \\ \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A_0] &= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}, \\ \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; A^B] &= 1 - \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}\left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} + s\lambda \hat{S}_B(\lambda, s)\right] + s\lambda \int_0^x R_s(u)\,du, \\ \int_0^x e^{-st}\,\mathrm{P}[\chi(y) > t]\,dt &= \lambda \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} \hat{S}_B(\lambda, s) - \lambda \int_0^x R_s(u)\,du, \end{aligned} \tag{19}$$

где $R_s(x)$, $x \geq 0$, *— резольвента* (13) *процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой,*

$$\hat{R}_B(\lambda, s) = \int_B^\infty e^{-\lambda u} R_s(u)\,du,$$

$$\hat{S}_B(\lambda, s) = \int_B^\infty e^{-\lambda u} S_s(u)\,du, \qquad S_s(x) = \int_0^x R_s(u)\,du.$$

Доказательство. Для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой равенства теоремы 1 упрощаются. Используя равенство (9) и определения (16) ядер $K_{\pm}(v, du, s)$, находим

$$\begin{aligned} K_+(v, du, s) &= \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-c(s)(v+B)}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^{\gamma+B}}; T^{\gamma+B} \in du], \\ K_-(v, du, s) &= (\lambda - c(s))e^{-c(s)B - \lambda u}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^{v+B} - c(s)T^{v+B}}]\,du. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, метод математической индукции и формулу (15), получаем последовательные итерации $K_{\pm}^{(n)}(v, du, s)$, $n \in \mathbb{N}$, ядер $K_{\pm}(v, du, s)$:

$$\begin{aligned} K_-^{(n)}(v, du, s) &= \mathrm{E}[e^{-s\tau^{v+B} - c(s)T^{v+B}}]\mathrm{E}e^{-s\tau_B}(1 - K(s))^{n-1}\lambda e^{-\lambda u}\,du, \\ K_+^{(n)}(v, du, s) &= e^{-vc(s)}\,\mathrm{E}e^{-s\tau_B}(1 - K(s))^{n-1}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^{\gamma+B}}; T^{\gamma+B} \in du]. \end{aligned}$$

Ряды $\mathbf{K}_{\pm}^{s}(v, du)$ из последовательных итераций $K_{\pm}^{(n)}(v, du, s)$ в данном случае являются геометрическими прогрессиями и легко вычисляются:

$$\mathbf{K}_-^s(v, du) = \sum_{n=1}^{\infty} K_-^{(n)}(v, du, s) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{v+B}-c(s)T^{v+B}}\right]\mathrm{E}e^{-s\tau_B}K(s)^{-1}\lambda e^{-\lambda u}\,du,$$

$$\mathbf{K}_+^s(v, du) = \sum_{n=1}^{\infty} K_+^{(n)}(v, du, s) = e^{-vc(s)}\,\mathrm{E}e^{-s\tau_B}K(s)^{-1}\,\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^{\gamma+B}};\, T^{\gamma+B}\in du\right].$$

Подставляя найденные выражения для функций $\mathbf{K}_\pm^s(v, du)$ в равенства (14), получаем формулы (17). Интегрируя равенства (17) по всем $u \ge 0$, находим равенства (18). Далее, используя определение резольвенты (13) и равенства (9), получаем резольвентные представления функций $\mathrm{E}\exp\{-s\tau^x\}$, $\mathrm{E}\exp\{-s\tau^x - c(s)\xi(\tau^x)\}$:

$$\mathrm{E}\exp\{-s\tau^x\} = 1 - \frac{s\lambda}{c(s)}R_s(x) + s\lambda\int_0^x R_s(u)\,du,$$

$$\mathrm{E}\exp\{-s\tau^x - c(s)\xi(\tau^x)\} = 1 - e^{-xc(s)}R_s(x)r(c(s), s),$$

где $r(c(s), s) = \frac{d}{dp}R(p, s)^{-1}\big|_{p=c(s)}$. Подставляя найденные резольвентные представления в формулы (18), находим резольвентные представления (19). Для целочисленного случайного блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой в работе [20] были получены резольвентные представления, аналогичные равенствам (19).

Следствие доказано.

3. Суммарное время пребывания в интервале процесса Пуассона. Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, — процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой. Введем случайную величину

$$\sigma_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}\{y + \xi(u) \in [0, B]\}\,du, \quad y \in \mathbb{R},$$

— суммарное время пребывания процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервале $[0, B]$ на временном отрезке $[0, t]$. В этом пункте мы определим

$$C_a^s(y) = \mathrm{E}\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)\}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad a \ge 0,$$

— преобразование Лапласа суммарного времени пребывания процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервале $[0, B]$ на показательно распределенном временном отрезке $[0, \nu_s]$. Для решения этой задачи нам понадобится определить ряд вспомогательных функций.

Пусть $y \ge 0$, $\xi(0) = 0$, $\tau_y = \inf\{t : y + \xi(t) < 0\}$ и $\sigma_y = \sigma_y(\tau_y)$ — момент первого выхода процесса $y + \xi(\cdot)$ из верхней полуплоскости и суммарное время пребывания процесса в интервале $[0, B]$ на временном отрезке $[0, \tau_y]$. На событии $\{\tau_y = \infty\}$ положим, по определению, $\sigma_y = \infty$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6). *Тогда для интегрального преобразования*

$$D_a^s(y) = \mathrm{E}\exp\{-s\tau_y - a\sigma_y\}, \quad y \ge 0, \quad a \ge 0,$$

совместного распределения $\{\tau_y, \sigma_y\}$ *при* $s > 0$ *справедливо равенство*

$$D_a^s(y) = [V_a^s(B-y) - aR_{s+a}(B-y)e^{-c(s)(B-y)}]V_a^s(B)^{-1}\,\mathrm{E}e^{-s\tau_y}, \quad y \geq 0, \tag{20}$$

где $R_s(x) = 0$ *при* $x < 0$, *а непрерывная функция* $V_a^s(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *определена равенством*

$$V_a^s(x) = 1 + a(\lambda - c(s))\int_0^x e^{-uc(s)}R_{s+a}(u)\,du, \quad x \geq 0, \qquad V_a^s(x) = 1, \quad x < 0. \tag{21}$$

Доказательство. Для функций $D_a^s(y)$, $y \geq 0$, согласно формуле полной вероятности и свойству строгой марковости процесса, справедлива система уравнений

$$D_a^s(y) = \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y)}; A_0] + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y)\in dv, A^B]\mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v > B] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y)\in dv, A^B]\int_0^B \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v \in du]D_a^s(B-u), \quad y \in [0, B],$$

$$D_a^s(y) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_{y-B}}; T_{y-B} > B] + \int_0^B \mathrm{E}[e^{-s\tau_{y-B}}; T_{y-B}\in du]D_a^s(B-u), \quad y > B.$$

Первое уравнение этой системы отражает тот факт, что суммарное время пребывания процесса $y + \xi(\cdot)$, $y \in [0, B]$, в интервале $[0, B]$ на временном отрезке $[0, \tau_y]$ происходит на траекториях, которые либо не пересекают верхнюю границу интервала (первое слагаемое в правой части уравнения), либо пересекают ее и затем перескакивают через интервал $[0, B]$ (второе слагаемое в правой части уравнения), либо пересекают верхнюю границу, а затем возвращаются в интервал $[0, B]$ (третье слагаемое в правой части уравнения). По аналогичному принципу составлено и второе уравнение. Используя первое из равенств (9) и равенства (19), из этой системы получаем уравнения

$$D_a^s(y) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda B}\frac{R_{s+a}(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)} + (\lambda - c(s))E_y^{s+a}(c(s))\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda B} + \tilde{D}_a^s(\lambda)\right), \; y \in [0, B],$$

$$D_a^s(y) = \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-c(s)(y-B)}e^{-\lambda B} + (\lambda - c(s))e^{-c(s)(y-B)}\tilde{D}_a^s(\lambda), \quad y > B, \tag{22}$$

где

$$\tilde{D}_a^s(\lambda) = \int_0^B e^{-\lambda u}D_a^s(B-u)\,du, \qquad E_y^{s+a}(c(s)) = \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y) - c(s)X(y)}; A^B].$$

Если функция $\tilde{D}_a^s(\lambda)$ будет найдена, то тем самым равенствами (22) будут определены функции $D_a^s(y)$, $y \geq 0$. Функция $\tilde{D}_a^s(\lambda)$ может быть определена из первого уравнения системы (22). Для этого приведем необходимые вычисления. Обозначим

$$T_x^s(z) = \mathrm{E}\exp\{-s\tau^x - zT^x\}, \qquad x \geq 0, \quad \mathrm{Re}\,z \geq 0.$$

Используя второе из равенств (9) и определение резольвенты (13), имеем

$$T_x^{s+a}(c(s)) = e^{xc(s)} + a\,\frac{\lambda - c(s)}{c(s) - c(s+a)}\,R_{s+a}(x) +$$

$$+ a(\lambda - c(s))\int_0^x e^{-c(s)(u-x)}R_{s+a}(u)\,du, \quad x \ge 0.$$

Используя последнюю формулу и равенства (17), (19), находим

$$E_y^{s+a}(c(s)) = e^{xc(s)}V_a^s(B-y) -$$

$$- \frac{e^{-B(\lambda - c(s))}}{\lambda - c(s)}\,\frac{R_{s+a}(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)}\,V_a^s(B) - aR_{s+a}(B-y), \quad y \in [0, B]. \tag{23}$$

Умножая (23) на $e^{-\lambda(B-y)}$ и выполняя интегрирование по всем $y \in [0, B]$, имеем

$$(\lambda - c(s))\int_0^B e^{-\lambda(B-y)}E_y^{s+a}(c(s))\,dy = 1 - V_a^s(B)\left[1 + \frac{\check{R}_B(\lambda, s+a)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)}\right]e^{-B(\lambda - c(s))}, \tag{24}$$

где

$$\check{R}_B(\lambda, s+a) = \int_0^B e^{-\lambda u}R_{s+a}(u)\,du.$$

Далее, умножая первое уравнение системы (22) на $e^{-\lambda(B-y)}$ и выполняя интегрирование по всем $y \in [0, B]$, для функции $\tilde{D}_a^s(\lambda)$ получаем линейное уравнение

$$\tilde{D}_a^s(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda B}\,\frac{\check{R}_B(\lambda, s+a)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda B} + \tilde{D}_a^s(\lambda)\right)\left(1 - V_a^s(B)\left[1 + \frac{\check{R}_B(\lambda, s+a)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)}\right]e^{-B(\lambda - c(s))}\right),$$

из которого находим

$$\tilde{D}_a^s(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda B} = \frac{1}{\lambda}\,e^{-c(s)B}V_a^s(B)^{-1}.$$

Подставляя это выражение для функции $\tilde{D}_a^s(\lambda)$ в равенства (22) и учитывая при этом, что $R_s(x) = 0$, $V_a^s(x) = 1$ при $x < 0$, получаем равенство (20).

Лемма доказана.

Теперь для $y \ge 0$ определим функцию

$$Q_a^s(y) = \mathrm{E}[e^{-a\sigma_y(\nu_s)}; \tau_y > \nu_s], \qquad y \ge 0, \quad a \ge 0,$$

— преобразование Лапласа суммарного времени пребывания процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервале $[0, B]$ на временном отрезке $[0, \nu_s]$ на событии $\{\tau_y > \nu_s\}$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6). *Тогда для функции* $Q_a^s(y)$, $y \ge 0$, *при* $s > 0$ *справедливо равенство*

$$Q_a^s(y) = v_a^s(B-y) - aR_{s+a}(B-y) - v_a^s(B)D_a^s(y), \quad y \geq 0, \tag{25}$$

где $R_s(x) = 0$ *при* $x < 0$, *функция* $D_a^s(y)$, $y \geq 0$, *определена формулой* (20), *а непрерывная функция* $v_a^s(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — *равенством*

$$v_a^s(x) = 1 + a\lambda \int_0^x R_{s+a}(u)du, \quad x \geq 0, \qquad v_a^s(x) = 1, \quad x < 0. \tag{26}$$

Доказательство. Согласно формуле полной вероятности и тому факту, что $\chi(y)$, τ_y — марковские моменты, для функций $Q_a^s(y)$, $y \geq 0$, справедлива система уравнений

$$Q_a^s(y) = \frac{s}{s+a}(1 - \mathrm{E}e^{-(s+a)\chi(y)}) + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y) \in dv, A^B](1 - \mathrm{E}e^{-s\tau_v}) +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y) \in dv, A^B] \int_0^B \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v \in du] Q_a^s(B-u), \quad y \in [0, B],$$

$$Q_a^s(y) = 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau_{y-B}} + \int_0^B \mathrm{E}[e^{-s\tau_{y-B}}; T_{y-B} \in du] Q_a^s(B-u), \quad y > B.$$

Три слагаемых, находящихся в правой части первого уравнения системы, отражают то обстоятельство, что суммарное время пребывания процесса в интервале $[0, B]$ на событии $\{\tau_y > \nu_s\}$ происходит на траекториях процесса, которые либо не выходят из интервала $[0, B]$ (первое слагаемое в правой части уравнения), либо выходят из него через верхнюю границу B и не возвращаются в интервал (второе слагаемое в правой части уравнения), либо выходят из интервала через верхнюю границу B и затем возвращаются в интервал $[0, B]$ (третье слагаемое в правой части уравнения). По аналогичному принципу составлено и второе уравнение системы. Используя первое равенство (9) и равенства (19), из этой системы получаем уравнения

$$Q_a^s(y) = 1 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_{s+a}(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)} - a\lambda \frac{R_{s+a}(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)} \hat{S}_B(\lambda, s+a) +$$

$$+ a\lambda S_{s+a}(B-y) + (\lambda - c(s)) E_y^{s+a}(c(s)) \left(\tilde{Q}_a^s(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \right), \quad y \in [0, B],$$

$$Q_a^s(y) = 1 - \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-c(s)(y-B)} + (\lambda - c(s)) e^{-c(s)(y-B)} \tilde{Q}_a^s(\lambda), \quad y > B, \tag{27}$$

где функция $E_y^{s+a}(c(s)) = \mathrm{E}[e^{-(s+a)\chi(y) - c(s)X(y)}; A^B]$ определена равенством (23), а

$$\tilde{Q}_a^s(\lambda) = \int_0^B e^{-\lambda u} Q_a^s(B-u)du, \qquad \hat{S}_B(\lambda, s+a) = \int_B^\infty e^{-\lambda u} S_{s+a}(u)du.$$

Функцию $\tilde{Q}_a^s(\lambda)$ можно непосредственно определить из первого уравнения (27), так как вспомогательные вычисления приведены при доказательстве предыдущей леммы. Умножая первое из уравнений (27) на $e^{-\lambda(B-y)}$ и выполняя интегрирование по всем $y \in [0, B]$, получаем линейное уравнение для функции $\tilde{Q}_a^s(\lambda)$:

$$Q_a^s(\lambda) - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B}\left[1 + \frac{R_{s+a}(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s+a)}\right] v_a^s(B) +$$

$$+ (\lambda - c(s))\tilde{E}^{s+a}(c(s))\left(\tilde{Q}_a^s(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\right), \tag{28}$$

где функция

$$\tilde{E}^{s+a}(c(s)) = \int_0^B \exp\{-\lambda(B-y)\} E_y^{s+a}(c(s))\, dy$$

определена равенством (24), а функция $v_a^s(x),\ x \in R$, — равенством (26). При вычислении этого уравнения также использованы очевидные тождества

$$\lambda \hat{S}_B(\lambda, s+a) = \hat{R}_B(\lambda, s+a) + S_{s+a}(B)e^{-\lambda B},$$

$$\lambda \int_0^B e^{-\lambda u} S_{s+a}(u)\, du = \int_0^B e^{-\lambda u} R_{s+a}(u)\, du - S_{s+a}(B)e^{-\lambda B}.$$

Используя равенство (24), из уравнения (28) находим

$$\tilde{Q}_a^s(\lambda) - \frac{1}{\lambda} = -\frac{v_a^s(B)}{V_a^s(B)} \frac{1}{\lambda} e^{-c(s)B}.$$

Подставляя найденное выражение для функции $\tilde{Q}_a^s(\lambda)$ в равенства (27) и учитывая при этом, что $v_a^s(x) = V_a^s(x) = 1$ при $x < 0$, получаем равенство (25).

Лемма доказана.

Равенствами (20), (25) мы определили вспомогательные функции $D_a^s(y)$, $Q_a^s(y)$, $y \geq 0$, и теперь перейдем к определению интегрального преобразования распределения суммарного времени пребывания процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой в интервале $[0, B]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6), $B > 0$, $a \geq 0$,

$$\sigma_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}\{y + \xi(u) \in [0, B]\}\, du, \qquad C_a^s(y) = s\int_0^\infty e^{-st}\, \mathrm{E}\exp\{-a\sigma_y(t)\}\, dt, \quad y \in \mathbb{R},$$

— *суммарное время пребывания процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в интервале* $[0, B]$ *на временном отрезке* $[0, t]$ *и интегральное преобразование распределения* $\sigma_y(t)$. *Тогда для функции* $C_a^s(y)$, $y \in \mathbb{R}$, *при* $s > 0$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} C_a^s(y) &= v_a^s(B-y) - aR_{s+a}(B-y) + D_a^s(y)C^*(B), \quad y \geq 0, \\ C_a^s(-y) &= 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau^y} + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^y}; T^y \in du]\, C_a^s(u), \quad y > 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$C^*(B) = \frac{a\lambda(v_a^s(B) - V_a^s(B)e^{c(s)B})V_a^s(B)c(s)^{-1}}{r(c(s), s) + a(\lambda - c(s))\int_0^B (V_a^s(x) - ae^{-xc(s)}R_{s+a}(x))\, dx},$$

$$v_a^s(x) = 1 + a\lambda \int_0^x R_{s+a}(u)\,du, \quad x \geq 0, \qquad v_a^s(x) = 1, \quad x < 0,$$

$$V_a^s(x) = 1 + a(\lambda - c(s)) \int_0^x e^{-uc(s)} R_{s+a}(u)\,du, \quad x \geq 0, \qquad V_a^s(x) = 1, \quad x < 0.$$

Доказательство. Случайные величины τ_x, T_x для процесса Пуассона с показательно распределенной компонентой независимы (см. первую из формул (9)), и для всех $x \geq 0$ величина перескока через нижний уровень T_x имеет показательное распределение с параметром λ. Поэтому

$$\mathrm{E}[\exp\{-s\tau_y - a\sigma_y\};\, T_y \in du] = D_a^s(y)\lambda e^{-\lambda u}\,du.$$

Тогда, согласно формуле полной вероятности и свойству строгой марковости процесса, для функции $C_a^s(y)$, $y \geq 0$, справедлива система уравнений

$$C_a^s(y) = Q_a^s(y) + D_a^s(y)\tilde{C}_a^s(\lambda), \quad y \geq 0,$$
$$\tilde{C}_a^s(\lambda) = 1 - m_\gamma^s + \int_0^\infty m_\gamma^s(dy) C_a^s(y), \tag{30}$$

где

$$\tilde{C}_a^s(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} C_a^s(-x)\,dx$$

— пока неизвестная функция, а

$$m_\gamma^s = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{E}\,e^{-s\tau^x}\,dx, \qquad m_\gamma^s(dy) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^x};\, T^x \in dy]\,dx.$$

Подставляя правую часть первого уравнения во второе уравнение системы, получаем линейное уравнение для функции $\tilde{C}_a^s(\lambda)$:

$$\tilde{C}_a^s(\lambda) = 1 - m_\gamma^s + \int_0^\infty m_\gamma^s(dy) Q_a^s(y) + \tilde{C}_a^s(\lambda) \int_0^\infty m_\gamma^s(dy) D_a^s(y).$$

Используя выражения (20), (25) для функций $D_a^s(y)$, $Q_a^s(y)$, из этого уравнения находим

$$\tilde{C}_a^s(\lambda) = v_a^s(B) + \frac{a\lambda}{1 - \int_0^\infty m_\gamma^s(dy) D_a^s(y)} \times$$
$$\times \left(\int_0^B m_\gamma^s(dy) \int_0^{B-y} R_{s+a}(u)\,du - \frac{1}{\lambda} \int_0^B m_\gamma^s(dy) R_{s+a}(B - y) - S_{s+a}(B) \right), \tag{31}$$

где

$$S_{s+a}(B) = \int_0^B R_{s+a}(u)\,du.$$

Подставляя найденное выражение для $\tilde{C}_a^s(\lambda)$ в первое уравнение системы (30), получаем первое из равенств (29). Осталось определить константу $C^*(B) = \tilde{C}_a^s(\lambda) - v_a^s(B)$. Для этого нам понадобятся следующие формулы:

$$\int_0^B m_\gamma^s(dy) R_{s+a}(B-y) \;=\; \lambda \hat{R}_B(\lambda, s+a) e^{\lambda B} \;-\; \lambda R(\lambda, s) V_a^s(B) e^{c(s)B},$$

$$\int_0^B m_\gamma^s(dy) \int_0^{B-y} R_{s+a}(u)\,du \;=\; S_{s+a}(B) \;+$$

$$+\; \hat{R}_B(\lambda, s+a) e^{\lambda B} \;+\; \frac{R(\lambda, s)}{c(s)}\big((\lambda - c(s)) v_a^s(B) - \lambda V_a^s(B) e^{c(s)B}\big), \tag{32}$$

$$\int_0^B m_\gamma^s(dy) e^{-yc(s)} \int_0^{B-y} e^{-uc(s)} R_{s+a}(u)\,du \;=\; \frac{\lambda R(\lambda, s)}{\lambda - c(s)} \big(e^{B(\lambda - c(s))} - 1\big) \;+$$

$$+\; \frac{\lambda}{\lambda - c(s)} \left(\int_0^B e^{-uc(s)} R_{s+a}(u)\,du - \check{R}_B(\lambda, s+a) e^{(\lambda - c(s))B} \right) - \lambda R(\lambda, s) \int_0^B V_a^s(x)\,dx,$$

где

$$\check{R}_B(\lambda, s+a) \;=\; \int_0^B e^{-\lambda u} R_{s+a}(u)\,du, \qquad \hat{R}_B(\lambda, s+a) \;=\; \int_B^\infty e^{-\lambda u} R_{s+a}(u)\,du.$$

Интегралы, содержащиеся в левых частях формул (32), являются свертками известных функций и вычисляются с использованием равенств

$$\int_0^\infty e^{-yz} m_\gamma^s(dy) \;=\; \frac{\lambda}{\lambda - z}\left(1 - \frac{\lambda - c(s)}{z - c(s)}\,\frac{R(\lambda, s)}{R(z, s)}\right),$$

$$R(z, s)^{-1} \;=\; R(z, s+a)^{-1} + a(\lambda - z),$$

первое из которых следует из второй из формул (9) при $p = \lambda - z$, а второе — из определения (8) резольвентной функции $R(p, s)$. Подставляя в равенство (31) формулы (32), вычисляем константу $C^*(B)$:

$$C^*(B) \;=\; \frac{a\lambda\big(v_a^s(B) - V_a^s(B) e^{c(s)B}\big) V_a^s(B) c(s)^{-1}}{r\big(c(s), s\big) + a\big(\lambda - c(s)\big)\int_0^B \big(V_a^s(x) - a e^{-xc(s)} R_{s+a}(x)\big)\,dx},$$

где $r\big(c(s), s\big) = \dfrac{d}{dp} R(p, s)^{-1}\Big|_{p=c(s)}$. Второе из равенств (29) следует из формулы полной вероятности и того факта, что τ^y — марковский момент.

Теорема доказана.

4. Момент первого вхождения процесса в интервал. В этом пункте для процесса с кумулянтой (1) определим интегральное преобразование совместного распределения момента первого вхождения процесса в интервал $[0, B]$ и значения процесса в момент первого вхождения.

Теорема 3. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (1), $B > 0$, $\chi(y) \stackrel{\text{df}}{=} 0$ *при* $y \notin [0, B]$,

$$\overline{\chi}(y) = \inf\{t > \chi(y) : y + \xi(t) \in [0, B]\},$$

$$\overline{X}(y) = y + \xi(\overline{\chi}(y)) \in [0, B], \quad y \in \mathbb{R},$$

— момент первого вхождения процесса $y + \xi(\cdot)$ *в интервал* $[0, B]$ *и значение процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в момент первого вхождения. Тогда для интегрального преобразования совместного распределения* $\{\overline{\chi}(y), \overline{X}(y)\}$, $y \in \mathbb{R}$, *при* $s > 0$ *справедливы равенства*

$$b^{v}(du, s) = \mathrm{E}[e^{-s\overline{\chi}(v+B)}; \overline{X}(v+B) \in du] = \int_0^\infty \mathbf{Q}_+^s(v, dl)\mathrm{E}[e^{-s\tau_l}; B - T_l \in du] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathbf{Q}_+^s(v, dl) \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_l}; T_l - B \in d\nu]\mathrm{E}[e^{-s\tau^\nu}; T^\nu \in du],$$

$$b_{v}(du, s) = \mathrm{E}[e^{-s\overline{\chi}(-v)}; \overline{X}(-v) \in du] = \int_0^\infty \mathbf{Q}_-^s(v, dl)\mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l \in du] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathbf{Q}_-^s(v, dl) \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in d\nu]\mathrm{E}[e^{-s\tau_\nu}; B - T_\nu \in du], \qquad v > 0, \tag{33}$$

$$b(y, du, s) = \mathrm{E}[e^{-s\overline{\chi}(y)}; \overline{X}(y) \in du] = \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in dv, A^B]b^{v}(du, s) +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in dv, A_0]b_{v}(du, s), \quad y \in [0, B],$$

где $\delta(x)$, $x \in R$, *— дельта-функция,*

$$\mathbf{Q}_\pm^s(v, du) = \delta(v - u)du + \sum_{n \in \mathbb{N}} Q_\pm^{(n)}(v, du, s), \qquad v > 0, \tag{34}$$

— ряд из последовательных итераций $Q_\pm^{(n)}(v, du, s)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_\pm^{(1)}(v, du, s) = Q_\pm(v, du, s), \qquad Q_\pm^{(n+1)}(v, du, s) = \int_0^\infty Q_\pm^{(n)}(v, dl, s)Q_\pm(l, du, s) \tag{35}$$

— последовательные итерации ядер $Q_\pm(v, du, s)$, *которые определены равенствами*

$$Q_+(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl]\mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in du],$$
$$Q_-(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v - B \in dl]\mathrm{E}[e^{-s\tau_l}; T_l - B \in du]. \tag{36}$$

Доказательство. Процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, является однородным по пространству и строго марковским. Тогда для функций $b^{v}(du, s)$, $b_{v}(du, s)$, $v > 0$, согласно формуле полной вероятности, справедлива система уравнений

$$b^{v}(du, s) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; B - T_v \in du] + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl] b_l(du, s),$$

$$b_v(du, s) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in du] + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v - B \in dl] b^l(du, s). \tag{37}$$

Эта система линейных интегральных уравнений аналогична системе линейных уравнений с двумя неизвестными. Подставляя из правой части второго уравнения выражение для функции $b_v(du, s)$ в первое уравнение, имеем

$$b^v(du, s) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; B - T_v \in du] + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl] \mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l \in du] +$$

$$+ \int_{l=0}^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl] \int_{\nu=0}^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in d\nu] b^\nu(du, s).$$

Изменяя в третьем слагаемом правой части этого уравнения порядок интегрирования, для функции $b^v(du, s)$, $v > 0$, получаем линейное интегральное уравнение

$$b^v(du, s) = \int_0^\infty Q_+(v, d\nu, s) b^\nu(du, s) + \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; B - T_v \in du] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl] \mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l \in du] \tag{38}$$

с ядром

$$Q_+(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl] \mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in du], \quad v > 0.$$

Покажем, что при всех $v, u > 0$, $s > s_0 > 0$ для этого ядра справедлива оценка

$$Q_+(v, du, s) \le \lambda < 1, \qquad \lambda = \mathrm{E} e^{-s_0 \tau_B} \mathrm{E} e^{-s_0 \tau^B}, \quad s_0 > 0.$$

Действительно, при $s > 0$ из очевидного равенства

$$\mathrm{M}[\exp\{-s\tau^v\}; T^v - B \in du] = \mathrm{M}[\exp\{-s\tau^{v+B}\}; T^{v+B} \in du] -$$

$$- \int_0^B \mathrm{M}[\exp\{-s\tau^v\}; T^v \in dl] \mathrm{M}[\exp\{-s\tau^{B-l}\}; T^{B-l} \in du]$$

следует цепочка неравенств

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau^v}; T^v - B \in du] \le \mathrm{M}[e^{-s\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du] \le \mathrm{M}[e^{-s\tau^{v+B}}] \le \mathrm{M}[e^{-s\tau^B}].$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\mathrm{M}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in du] \le \mathrm{M}[e^{-s\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in du] \le \mathrm{M}[e^{-s\tau_{v+B}}] \le \mathrm{M}[e^{-s\tau_B}].$$

Из этих двух цепочек неравенств для ядра $Q_+(v, du, s)$ при всех $v, u > 0$, $s >$ $> s_0 > 0$ получаем следующую оценку:

$$Q_+(v, du, s) = \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl]\mathrm{E}[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in du] \le$$

$$\le \mathrm{E}e^{-s\tau_B}\mathrm{E}e^{-s\tau^B} < \lambda = \mathrm{E}e^{-s_0\tau_B}\mathrm{E}e^{-s_0\tau^B} < 1, \quad s_0 > 0.$$

Используя полученную оценку ядра и метод математической индукции, нетрудно установить, что для последовательных итераций (34) $Q_+^{(n)}(v, du, s)$ ядра $Q_+(v, du, s)$ при всех $v, u > 0,\ s > s_0 > 0$ справедлива оценка

$$Q_+^{(n+1)}(v, du, s) = \int_0^\infty Q_+^{(n)}(v, dl, s)Q_+(l, du, s) < \lambda^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, ряд из последовательных итераций $\sum_{n\in\mathbb{N}} Q_+^{(n)}(v, du, s) < \lambda(1-\lambda)^{-1}$ сходится равномерно по всем $v, u > 0,\ s > s_0 > 0$. Применяя для решения линейного интегрального уравнения (38) метод последовательных итераций [22], получаем первое из равенств (33). Справедливость второго из равенств (33) устанавливается аналогично. Третье из равенств (33) является следствием формулы полной вероятности и того факта, что $\chi(y)$ — марковский момент.

Теорема доказана.

Пусть теперь $\xi(t),\ t \ge 0$, — процесс Пуассона с кумулянтой (6). Обозначим

$$m_\gamma^s(du) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in du]dx, \qquad P(\lambda, du) = e^{-\lambda B}(m_\gamma^s(du) + \lambda e^{\lambda u}\, du).$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R},\ t \ge 0,\ \xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательной компонентой и кумулянтой* (6), $B > 0$, $\chi(y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0$ *при* $y \notin [0, B]$,

$$\overline{\chi}(y) = \inf\{t > \chi(y) : y + \xi(t) \in [0, B]\},$$

$$\overline{X}(y) = y + \xi(\overline{\chi}(y)) \in [0, B], \qquad y \in \mathbb{R},$$

— *момент первого вхождения процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в интервал* $[0, B]$ *и значение процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в момент первого вхождения. Тогда для интегрального преобразования совместного распределения* $\{\overline{\chi}(y), \overline{X}(y)\}$, $y \in \mathbb{R}$, *при* $s > 0$ *справедливы равенства*

$$b^v(du, s) = e^{-vc(s)}\left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)T(s)^{-1}P(\lambda, du),$$

$$b_v(du, s) = m_v^s(du) + e^{Bc(s)}\left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)\hat{T}_v^s(c(s))T(s)^{-1}P(\lambda, du), \qquad v > 0,$$

$$b(y, du, s) = \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)T(s)^{-1}\left[e^{c(s)(B-y)} - \frac{R_s(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}\frac{e^{-B(\lambda - c(s))}}{\lambda - c(s)}\right]P(\lambda, du) + \tag{39}$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\frac{R_s(B-y)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}(T(s)^{-1} - 1)P(\lambda, du), \quad y \in [0, B],$$

где

$$m_x^s(du) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in du], \qquad \hat{T}_x^s(c(s)) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^x - c(s)T^x}; T^x > B], \quad x \ge 0,$$

$$\hat{T}^s_\gamma(c(s)) \;=\; \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\hat{T}^s_x(c(s))\,dx, \qquad T(s) \;=\; 1-\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)\hat{T}^s_\gamma(c(s))e^{-B(\lambda-c(s))}.$$

Доказательство. Для установления формул (39) необходимо вычислить для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой ядра $Q_\pm(v, dl, s)$ последовательные итерации $Q^{(n)}_\pm(v, dl, s)$, $n \in \mathbb{N}$, и ряды $\mathbf{Q}^s_\pm(v, dl)$. Используя определение ядер (36) и формулы (9), находим

$$\begin{aligned} Q_+(v, dl, s) \;&=\; e^{-vc(s)}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-\lambda B}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^\gamma}; T^\gamma - B \in dl], \\ Q_-(v, dl, s) \;&=\; \hat{T}^s_v(c(s))e^{-B(\lambda-c(s))}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)\lambda e^{-\lambda l}\,dl, \qquad v \,>\, 0, \end{aligned} \tag{40}$$

где $\hat{T}^s_x(c(s)) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^x - c(s)T^x}; T^v > B]$, $x \ge 0$. Используя определение последовательных итераций (35) ядер и метод математической индукции, из равенств (40) имеем

$$Q^{(n)}_+(v, dl, s) \;=\; e^{-vc(s)}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-\lambda B}\left(\tilde{T}^s_\gamma(c(s))\right)^{n-1}\mathrm{E}[e^{-s\tau^\gamma}; T^\gamma - B \in dl],$$

$$Q^{(n)}_-(v, dl, s) \;=\; \hat{T}^s_v(c(s))e^{-B(\lambda-c(s))}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)\left(\tilde{T}^s_\gamma(c(s))\right)^{n-1}\lambda e^{-\lambda l}\,dl, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\tilde{T}^s_\gamma(c(s)) \;=\; e^{-B(\lambda-c(s))}(\lambda - c(s))\int_0^\infty e^{-\lambda x}\hat{T}^s_x(c(s))\,dx.$$

Ряды $\mathbf{Q}^s_\pm(v, dl)$ из последовательных итераций $Q^{(n)}_\pm(v, dl, s)$ (см. (34)) в данном случае являются геометрическими прогрессиями и легко вычисляются:

$$\mathbf{Q}^s_+(v, dl) \;=\; \delta(v-l)\,dl \;+\; e^{-vc(s)}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-\lambda B}T(s)^{-1}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^\gamma}; T^\gamma - B \in dl],$$

$$\mathbf{Q}^s_-(v, dl) \;=\; \delta(v-l)\,dl \;+\; \hat{T}^s_v(c(s))e^{-B(\lambda-c(s))}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)T(s)^{-1}\lambda e^{-\lambda l}\,dl, \qquad v>0,$$

где $T(s) = 1 - \tilde{T}^s_\gamma(c(s))$. Подставляя в равенства (33) вычисленные выражения для функций $\mathbf{Q}^s_\pm(v, dl)$ и выражения для функций $\mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in dv, A^B]$, $\mathrm{E}[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in dv, A_0]$, определенные формулами (17) – (19), получаем равенства (39).

Следствие доказано.

5. Число вхождений в интервал и число перескоков через интервал. В этом пункте для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой определим совместное распределение числа вхождений процесса в интервал $[0, B]$ и числа перескоков процесса через интервал на показательно распределенном временном отрезке $[0, \nu_s]$. Пусть $B > 0$ фиксировано, $\mathbb{B}_+ = (B, \infty)$ и для всех $y \in \mathbb{R}$ введем случайную последовательность

$$\overline{\chi}^+_0(y) \;=\; 0, \qquad \overline{\chi}^+_{n+1}(y) \;=\; \inf\{t > \overline{\chi}^+_n(y) : y + \xi(t-0) \in \mathbb{B}_+,\, y + \xi(t) \in [0, B]\},$$

$$n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

моментов вхождения процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервал $[0, B]$ через верхнюю границу B (из множества $\mathbb{B}_+$). На траекториях процесса, для которых существует первое $n_0 \in \mathbb{N} \bigcup 0$ такое, что множество, содержащееся в фигурных скобках, пусто, положим, согласно определению, $\overline{\chi}_n^+(y) = \infty$ для всех $n \geq n_0$. Далее, пусть $\mathbb{B}_- = (-\infty, 0)$ и для всех $y \in \mathbb{R}$ введем случайную последовательность

$$j_0^+(y) = 0, \qquad j_{n+1}^+(y) = \inf\{t > j_n^+(y) : y + \xi(t-0) \in \mathbb{B}_+, y + \xi(t) \in \mathbb{B}_-\},$$
$$n \in \mathbb{N} \bigcup 0,$$

моментов перескоков процесса $y + \xi(\cdot)$ через интервал $[0, B]$ сверху вниз (последовательность моментов прыжков процесса из множества $\mathbb{B}_+$ в множество $\mathbb{B}_-$). Для всех $y \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ введем случайные величины:

$$\beta_t^+(y) = \max\{n \in \mathbb{N} \bigcup 0 : \overline{\chi}_n^+(y) \leq t\}, \qquad \gamma_t^+(y) = \max\{n \in \mathbb{N} \bigcup 0 : j_n^+(y) \leq t\}$$

— число вхождений процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервал $[0, B]$ через верхнюю границу B (число прыжков процесса из множества $\mathbb{B}_+$ в интервал $[0, B]$) на временном отрезке $[0, t]$ и число перескоков процесса через интервал $[0, B]$ сверху вниз (число прыжков процесса из множества $\mathbb{B}_+$ в множество $\mathbb{B}_-$) на временном отрезке $[0, t]$.

Теорема 4. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6). *Тогда при всех* $y \in \mathbb{R}$ *для производящей функции совместного распределения числа вхождений* $\beta_{\nu_s}^+(y)$ *процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в интервал* $[0, B]$ *сверху и числа перескоков* $\gamma_t^+(y)$ *через интервал* $[0, B]$ *сверху вниз на показательно распределенном временном отрезке* $[0, \nu_s]$ *при* $s > 0$, $a, b \in [0, 1]$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{E} a^{\beta_{\nu_s}^+(y)} b^{\gamma_{\nu_s}^+(y)} = 1 - \frac{1 - a(1 - e^{-\lambda B}) - b e^{-\lambda B}}{1 - a\check{E}^s(\lambda, c(s)) - b\hat{E}^s(\lambda, c(s))} E_{B-y}^s(c(s)), \tag{41}$$

где

$$E_x^s(c(s)) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{c(s)}{\lambda}\right) \mathrm{E}\exp\{-s\tau^x - c(s)T^x\}, & x \geq 0, \\ \mathrm{E}\exp\{-s\tau_{-x}\} = \left(1 - \dfrac{c(s)}{\lambda}\right) e^{xc(s)}, & x < 0, \end{cases} \tag{42}$$

$$\check{E}^s(\lambda, c(s)) = \int_0^B \lambda e^{-\lambda x} E_x^s(c(s))\, dx, \qquad \hat{E}^s(\lambda, c(s)) = \int_B^\infty \lambda e^{-\lambda x} E_x^s(c(s))\, dx.$$

В частности, для совместного распределения $\{\gamma_{\nu_s}^+(y), \beta_{\nu_s}^+(y)\}$ *при всех* $y \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \bigcup 0$ *справедливы формулы*

$$\mathrm{P}[\beta_{\nu_s}^+(y) = n,\ \gamma_{\nu_s}^+(y) = m] = B^s(n, m)(1 - E_{B-y}^s(c(s))) +$$
$$+ B^s(n, m-1)[e^{-\lambda B} E_{B-y}^s(c(s)) - \hat{E}^s(\lambda, c(s))] +$$
$$+ B^s(n-1, m)[(1 - e^{-\lambda B}) E_{B-y}^s(c(s)) - \check{E}^s(\lambda, c(s))],$$

где $B^s(n, m) = 0$, *при* $\min\{n, m\} < 0$,

$$B^s(n,m) = \binom{n+m}{n}\left(\check{E}^s(\lambda, c(s))\right)^n \left(\hat{E}^s(\lambda, c(s))\right)^m.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$A^v(a,b,s) = \mathrm{E}\, a^{\beta^+_{\nu_s}(B+v)} b^{\gamma^+_{\nu_s}(B+v)}, \quad v>0,$$

$$A_v(a,b,s) = \mathrm{E}\, a^{\beta^+_{\nu_s}(B-v)} b^{\gamma^+_{\nu_s}(B-v)}, \quad v \ge 0.$$

Учитывая однородность процесса по пространству, формулу полной вероятности и марковость случайных моментов τ_x, τ^x, для этих производящих функций нетрудно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} A_v(a,b,s) &= 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau^v} + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl] A^l(a,b,s), \quad v \ge 0, \\ A^v(a,b,s) &= 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau_v} + a\int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v \in dl] A_l(a,b,s) + \\ &\quad + b\int_B^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v \in dl] A_l(a,b,s), \quad v>0. \end{aligned} \tag{43}$$

Подставляя из второго уравнения системы выражение для функции $A^v(a,b,s)$, $v>0$, в первое уравнение системы, получаем линейное интегральное уравнение с двумя ядрами

$$\begin{aligned} A_v(a,b,s) &= 1 - \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl]\mathrm{E}e^{-s\tau_l} + \\ &+ a\int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl] \int_0^B \mathrm{E}[e^{-s\tau_l}; T_l \in d\nu] A_\nu(a,b,s) + \\ &+ b\int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl] \int_B^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_l}; T_l \in d\nu] A_\nu(a,b,s), \quad v \ge 0, \end{aligned}$$

которое в случае процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой легко разрешается. Подставляя в это уравнение выражение для интегрального преобразования $\{\tau_x, T_x\}$ из равенства (9) и используя введенную равенством (42) функцию, имеем

$$A_v(a,b,s) = 1 - E^s_v(c(s))\left(1 - a\check{A}^s_\lambda(a,b) - b\hat{A}^s_\lambda(a,b)\right), \quad v \ge 0, \tag{44}$$

где

$$\check{A}^s_\lambda(a,b) = \int_0^B \lambda e^{-\lambda v} A_v(a,b,s)\,dv, \qquad \hat{A}^s_\lambda(a,b) = \int_B^\infty \lambda e^{-\lambda v} A_v(a,b,s)\,dv.$$

Если мы определим функции $\check{A}^s_\lambda(a,b)$, $\hat{A}^s_\lambda(a,b)$, то равенством (44) и вторым из равенств (43) будут определены функции $A_v(a,b,s)$, $A^v(a,b,s)$. Умножая (44) на $\lambda e^{-\lambda v}$ и выполняя в обеих частях равенства интегрирование по всем $v \ge 0$, получаем систему линейных уравнений с двумя неизвестными функциями $\hat{A}^s_\lambda(a,b)$, $\check{A}^s_\lambda(a,b)$:

$$\check{A}^s_\lambda(a,b) = 1 - e^{-\lambda B} - \check{E}^s(\lambda, c(s))\big(1 - a\check{A}^s_\lambda(a,b) - b\hat{A}^s_\lambda(a,b)\big),$$

$$\hat{A}^s_\lambda(a,b) = e^{-\lambda B} - \hat{E}^s(\lambda, c(s))\big(1 - a\check{A}^s_\lambda(a,b) - b\hat{A}^s_\lambda(a,b)\big),$$

где

$$\check{E}^s(\lambda, c(s)) = \int_0^B \lambda e^{-\lambda x} E^s_x(c(s))\,dx, \qquad \hat{E}^s(\lambda, c(s)) = \int_B^\infty \lambda e^{-\lambda x} E^s_x(c(s))\,dx.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$a\check{A}^s_\lambda(a,b) + b\hat{A}^s_\lambda(a,b) = 1 - \frac{1 - a(1 - e^{-\lambda B}) - be^{-\lambda B}}{1 - a\check{E}^s(\lambda, c(s)) - b\hat{E}^s(\lambda, c(s))}.$$

Подставляя правую часть последнего выражения в равенство (44), имеем

$$A_v(a,b,s) = 1 - \frac{1 - a(1 - e^{-\lambda B}) - be^{-\lambda B}}{1 - a\check{E}^s(\lambda, c(s)) - b\hat{E}^s(\lambda, c(s))}\, E^s_v(c(s)), \quad v \ge 0.$$

Подставляя найденное выражение для производящей функции $A_v(a,b,s)$ во второе уравнение системы (43), получаем

$$A^v(a,b,s) = 1 - \frac{1 - a(1 - e^{-\lambda B}) - be^{-\lambda B}}{1 - a\check{E}^s(\lambda, c(s)) - b\hat{E}^s(\lambda, c(s))}\left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-vc(s)}, \quad v > 0.$$

Учитывая выражение (42), из этих двух формул для всех $y \in \mathbb{R}$, $a, b \in [0, 1]$ находим выражение для производящей функции совместного распределения $\{\beta^+_{\nu_s}(y), \gamma^+_{\nu_s}(y)\}$ и равенство (41). При малых значениях параметров a, b справедливо разложение

$$\big(1 - a\check{E}^s(\lambda, c(s)) - b\hat{E}^s(\lambda, c(s))\big)^{-1} = \sum_{n,m=0}^{\infty} a^n b^m B^s(n,m), \tag{45}$$

где

$$B^s(n,m) = \binom{n+m}{n} \big(\check{E}^s(\lambda, c(s))\big)^n \big(\hat{E}^s(\lambda, c(s))\big)^m, \quad n, m \in \mathbb{N} \cup 0.$$

Сравнивая в обеих частях равенства (41) коэффициенты при $a^n b^m$, $n, m \in \mathbb{N} \cup \cup\, 0$, и полагая, согласно определению, $B^s(k,l) = 0$ при $k, l \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}$, $\min\{k, l\} < 0$, получаем совместное распределение $\{\beta^+_{\nu_s}(y), \gamma^+_{\nu_s}(y)\}$ и второе равенство теоремы.

Теорема доказана.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6). *Тогда для производящей функции распределения числа вхождений* $\beta^+_{\nu_s}(y)$, $y \in \in \mathbb{R}$, *процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в интервал* $[0, B]$ *сверху* (*из множества* $\mathbb{B}_+$) *на показательно распределенном временном отрезке* $[0, \nu_s]$ *при* $s > 0$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E} a^{\beta^+_{\nu_s}(y)} = 1 - \frac{(1-a)(1 - e^{-\lambda B})}{1 - \hat{E}^s(\lambda, c(s)) - a\check{E}^s(\lambda, c(s))}\, E^s_{B-y}(c(s)), \quad a \in [0, 1].$$

В частности, при всех $y \in \mathbb{R}$ *для распределения* $\beta^+_{\nu_s}(y)$ *справедлива формула*

$$\mathrm{P}[\beta^+_{\nu_s}(y) = n] = \mathbf{I}_{\{n=0\}}\left(1 - \frac{1-e^{-\lambda B}}{1-\hat{E}^s(\lambda, c(s))}\, E^s_{B-y}(c(s))\right) +$$

$$+ \mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}}\, \frac{1-e^{-\lambda B}}{1-\hat{E}^s(\lambda, c(s))}\, \frac{1-E^s(\lambda, c(s))}{1-\hat{E}^s(\lambda, c(s))} \left(\frac{\check{E}^s(\lambda, c(s))}{1-\hat{E}^s(\lambda, c(s))}\right)^{n-1} E^s_{B-y}(c(s)),$$

где $E^s(\lambda, c(s)) = \check{E}^s(\lambda, c(s)) + \hat{E}^s(\lambda, c(s))$.

Доказательство. Полагая в равенстве (41) параметр $b = 1$, получаем выражение для производящей функции случайной величины $\beta^+_{\nu_s}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, и первое равенство следствия. Сравнивая в правой и левой частях этого равенства коэффициенты при a^n, $n \in \mathbb{N} \cup 0$, находим второе равенство следствия.

Аналогичное следствие справедливо (при $a = 1$ в равенстве (41)) для производящей функции и распределения случайной величины $\gamma^+_{\nu_s}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, — числа перескоков процесса Пуассона через интервал $[0, B]$ сверху вниз на показательно распределенном временном отрезке $[0, \nu_s]$.

Следствие доказано.

Теперь определим совместное распределение числа вхождений процесса Пуассона в интервал через нижнюю границу и числа перескоков процесса через интервал снизу вверх. Пусть $B > 0$ фиксировано. Для всех $y \in \mathbb{R}$ введем случайную последовательность

$$\overline{\chi}^-_0(y) = 0, \qquad \overline{\chi}^-_{n+1}(y) = \inf\{t > \overline{\chi}^-_n(y) : y + \xi(t-0) \in \mathbb{B}_-, y + \xi(t) \in [0, B]\},$$
$$n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

моментов вхождения процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервал $[0, B]$ через нижнюю границу 0 (из множества $\mathbb{B}_-$). На траекториях процесса, для которых существует первое $n_0 \in \mathbb{N} \cup 0$ такое, что множество, содержащееся в фигурных скобках, пусто, положим, согласно определению, $\overline{\chi}^-_n(y) = \infty$ для всех $n \ge n_0$. Для всех $y \in \mathbb{R}$ введем случайную последовательность

$$j^-_0(y) = 0, \qquad j^-_{n+1}(y) = \inf\{t > j^-_n(y) : y + \xi(t-0) \in \mathbb{B}_-, y + \xi(t) \in \mathbb{B}_+\},$$
$$n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

моментов перескоков процесса $y + \xi(\cdot)$ через интервал $[0, B]$ снизу вверх (последовательность моментов прыжков процесса из множества $\mathbb{B}_-$ в множество $\mathbb{B}_+$). Для всех $y \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$ введем случайные величины

$$\beta^-_t(y) = \max\{n \in \mathbb{N} \cup 0 : \overline{\chi}^-_n(y) \le t\}, \qquad \gamma^-_t(y) = \max\{n \in \mathbb{N} \cup 0 : j^-_n(y) \le t\}$$

— число вхождений процесса $y + \xi(\cdot)$ в интервал $[0, B]$ через нижнюю границу 0 (число прыжков процесса из множества $\mathbb{B}_-$ в интервал $[0, B]$) на временном отрезке $[0, t]$ и число перескоков процесса через интервал $[0, B]$ снизу вверх (число прыжков процесса из множества $\mathbb{B}_-$ в множество $\mathbb{B}_+$) на временном отрезке $[0, t]$. Обозначим

$$\check{m}^s_\gamma = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in [0, B]]dx, \qquad \hat{m}^s_\gamma = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x > B]dx,$$

$$\check{M}^s_x(c(s)) = \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)\mathrm{E}[e^{-s\tau^x - c(s)T^x}; T^x \in [0, B]],$$

$$\check{M}^s(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\check{M}^s_x(c(s))\,dx, \tag{46}$$

$$\hat{M}^s_x(c(s)) = \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)\mathrm{E}[e^{-s\tau^x - c(s)T^x}; T^x > B],$$

$$\hat{M}^s(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\hat{M}^s_x(c(s))\,dx.$$

Теорема 5. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6). *Тогда при всех* $y \in \mathbb{R}$ *для производящей функции совместного распределения* $\{\beta^-_{\nu_s}(y), \gamma^-_{\nu_s}(y)\}$ *числа вхождений процесса* $y + \xi(\cdot)$ *в интервал* $[0, B]$ *снизу и числа перескоков процесса* $y + \xi(\cdot)$ *через интервал* $[0, B]$ *снизу вверх на показательно распределенном временном отрезке* $[0, \nu_s]$ *при* $s > 0$, $a, b \in [0, 1]$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}a^{\beta^-_{\nu_s}(y)}b^{\gamma^-_{\nu_s}(y)} = 1 - \frac{m^s_\gamma - a\check{m}^s_\gamma - b\hat{m}^s_\gamma}{1 - a\check{M}^s(\lambda) - b\hat{M}^s(\lambda)}\left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-yc(s)}, \quad y \geq 0,$$

$$\mathrm{E}a^{\beta^-_{\nu_s}(-y)}b^{\gamma^-_{\nu_s}(-y)} = 1 - (m^s_y - a\check{m}^s_y - b\hat{m}^s_y)\left(1 + \frac{a\check{M}^s_y(c(s)) + b\hat{M}^s_y(c(s))}{1 - a\check{M}^s(\lambda) - b\hat{M}^s(\lambda)}\right), \quad y > 0, \tag{47}$$

где $m^s_y = \check{m}^s_y + \hat{m}^s_y$. *В частности, для совместного распределения* $\{\beta^-_{\nu_s}(y), \gamma^-_{\nu_s}(y)\}$ *при* $y \geq 0$ *справедливы формулы*

$$\mathrm{P}[\beta^-_{\nu_s}(y) = n,\ \gamma^-_{\nu_s}(y) = m] = \tilde{B}^s(n, m)(1 - m^s_y\,\mathrm{E}e^{-s\tau_y}) +$$

$$+\ \tilde{B}^s(n-1, m)(\check{m}^s_y\,\mathrm{E}e^{-s\tau_y} - \check{M}^s(\lambda)) +$$

$$+\ \tilde{B}^s(n, m-1)(\hat{m}^s_y\,\mathrm{E}e^{-s\tau_y} - \hat{M}^s(\lambda)), \quad n, m \in \mathbb{N} \cup 0,$$

где $\mathrm{E}e^{-s\tau_y} = (1 - c(s)/\lambda)e^{-yc(s)}$,

$$\tilde{B}^s(n, m) = \binom{n+m}{n}(\check{M}^s(\lambda))^n(\hat{M}^s(\lambda))^m, \qquad B^s(n, m) = 0, \quad \text{при} \quad \min\{n, m\} < 0.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$B^v(a, b, s) = \mathrm{E}a^{\beta^-_{\nu_s}(v)}b^{\gamma^-_{\nu_s}(v)}, \quad v \geq 0;$$

$$B_v(a, b, s) = \mathrm{E}a^{\beta^-_{\nu_s}(-v)}b^{\gamma^-_{\nu_s}(-v)}, \quad v > 0,$$

Для введенных производящих функций, учитывая формулу полной вероятности, однородность процесса по пространству и марковость случайных моментов τ_x, τ^x, $x \geq 0$, нетрудно получить систему уравнений

$$B^v(a,b,s) = 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau_v} + \int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau_v}; T_v \in dl] B_l(a,b,s), \quad v \geq 0,$$

$$B_v(a,b,s) = 1 - \mathrm{E}e^{-s\tau^v} + a\int_0^B \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl] B^l(a,b,s) +$$

$$+ b\int_B^\infty \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl] B^l(a,b,s), \quad v > 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражение для интегрального преобразования совместного распределения $\{\tau_v, T_v\}$ из первой формулы (9), получаем

$$B^v(a,b,s) = 1 - \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-vc(s)} + B(\lambda, s)\left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-vc(s)}, \quad v \geq 0,$$
$$B_v(a,b,s) = 1 - m_v^s + a\int_0^B m_v^s(dl) B^l(a,b,s) + b\int_B^\infty m_v^s(dl) B^l(a,b,s), \quad v > 0, \tag{48}$$

где

$$B(\lambda, s) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} B_x(a,b,s)\,dx, \qquad m_v^s(dl) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^v}; T^v \in dl].$$

Если функция $B(\lambda, s)$ будет определена, то тем самым равенствами (48) будут определены функции $B^v(a,b,s)$, $B_v(a,b,s)$.

Составим уравнение для функции $B(\lambda, s)$. Подставляя во второе из уравнений (48) выражение для $B^v(a,b,s)$ из первого уравнения, находим

$$B_v(a,b,s) = 1 - m_v^s + a\check{m}_v^s + b\hat{m}_v^s -$$
$$- a\check{M}_v^s(c(s)) - b\hat{M}_v^s(c(s)) + B(\lambda, s)\big(a\check{M}_v^s(c(s)) + b\hat{M}_v^s(c(s))\big), \tag{49}$$

где функции $\check{M}_v^s(c(s))$, $\hat{M}_v^s(c(s))$ определены формулами (46). Умножая обе части этого равенства на $\lambda e^{-\lambda v}$ и выполняя в обеих частях интегрирование по всем $v \geq 0$, получаем линейное уравнение для функции $B(\lambda, s)$:

$$B(\lambda, s) = 1 - m_\gamma^s + a\check{m}_\gamma^s + b\hat{m}_\gamma^s - a\check{M}^s(\lambda) -$$
$$- b\hat{M}^s(\lambda) + B(\lambda, s)\big(a\check{M}^s(\lambda) + b\hat{M}^s(\lambda)\big).$$

Из этого уравнения имеем

$$B(\lambda, s) = 1 - \frac{m_\gamma^s - a\check{m}_\gamma^s - b\hat{m}_\gamma^s}{1 - a\check{M}^s(\lambda) - b\hat{M}^s(\lambda)}, \quad a, b \in [0, 1]. \tag{50}$$

Подставляя правую часть формулы (50) в первое из равенств (48), находим функцию

$$B^v(a,b,s) = 1 - \frac{m_\gamma^s - a\check{m}_\gamma^s - b\hat{m}_\gamma^s}{1 - a\check{M}^s(\lambda) - b\hat{M}^s(\lambda)}\left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-vc(s)}, \quad v \geq 0, \tag{51}$$

и первое из равенств (47). Подставляя правую часть формулы (50) в равенство (49), получаем выражение для функции $B_v(a,b,s)$:

$$\mathrm{E}a^{\beta^-_{\nu_s}(-v)}b^{\gamma^-_{\nu_s}(-v)} = 1-(m^s_v - a\check{m}^s_v - b\hat{m}^s_v)\left(1+\frac{a\check{M}^s_v(c(s)) + b\hat{M}^s_v(c(s))}{1-a\check{M}^s(\lambda)-b\hat{M}^s(\lambda)}\right), \quad v>0,$$

и второе из равенств (47). Сравнивая в обеих частях равенства (51) коэффициенты при $a^n b^m$, $n, m \in \mathbb{N}\cup 0$, находим распределения случайных величин $\{\beta^-_{\nu_s}(v), \gamma^-_{\nu_s}(v)\}$, $v \geq 0$, и третье равенство теоремы.

Теорема доказана.

***Следствие* 4.** *Пусть* $\xi(t)\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$, $\xi(0)=0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6). *Тогда для производящей функции распределения числа перескоков* $\gamma^-_{\nu_s}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, *процесса* $y+\xi(\cdot)$ *через интервал* $[0, B]$ *внизу вверх на показательно распределенном временном отрезке* $[0,\nu_s]$ *при* $s>0$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}b^{\gamma^-_{\nu_s}(y)} = 1-\frac{(1-b)\hat{m}^s_\gamma}{1-\check{M}^s(\lambda)-b\hat{M}^s(\lambda)}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-yc(s)}, \quad y\geq 0,$$

$$\mathrm{E}b^{\gamma^-_{\nu_s}(-y)} = 1-(1-b)\hat{m}^s_\gamma - \frac{(1-b)\hat{m}^s_\gamma}{1-\check{M}^s(\lambda)-b\hat{M}^s(\lambda)}\left(\check{M}^s_y(c(s)) + b\hat{M}^s_y(c(s))\right), \quad y>0.$$

В частности, при $y\geq 0$ *для распределения* $\gamma^-_{\nu_s}(y)$ *справедлива формула*

$$\mathrm{P}[\gamma^-_{\nu_s}(y)=n] = \mathbf{I}_{\{n=0\}}\left(1-\frac{\hat{m}^s_\gamma}{1-\check{M}^s(\lambda)}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-yc(s)}\right)+$$

$$+\mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}}\frac{\hat{m}^s_\gamma}{1-\check{M}^s(\lambda)}\frac{1-M^s(\lambda)}{1-\check{M}^s(\lambda)}\left(\frac{\hat{M}^s(\lambda)}{1-\check{M}^s(\lambda)}\right)^{n-1}\left(1-\frac{c(s)}{\lambda}\right)e^{-yc(s)},$$

где $M^s(\lambda) = \hat{M}^s(\lambda)+\check{M}^s(\lambda)$.

Доказательство. Полагая в равенствах (47) $a=1$, получаем два первых равенства следствия. Сравнивая в обеих частях первого равенства следствия коэффициенты при b^n, $n\in\mathbb{N}\cup 0$, находим третье равенство следствия. Полагая в равенствах (47) $b=1$, получаем аналогичное следствие для производящей функции и распределения случайной величины $\beta^-_{\nu_s}(y)$, $y\in\mathbb{R}$.

6. Супремум, инфимум и значение процесса Пуассона. В этом пункте для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой определим совместное распределение $\{\xi^-(\nu_s), \xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$. Это распределение будет получено как следствие теоремы, приведенной в [11] для однородного процесса с независимыми приращениями. Для этого нам необходимо изменить пространственное расположение интервала и процесса, а также ввести новые обозначения.

Пусть $\xi(t)\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой (1), $x, y\geq 0$, $x+y=B$, $\xi(0)=0$,

$$\chi = \inf\{t:\xi(t)\notin[-y,x]\}, \qquad X = (\xi(\chi)-x)\mathbf{I}_{A^x}+(-\xi(\chi)-y)\mathbf{I}_{A_y}$$

— момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $[-y,x]$ и величина перескока через границу в момент первого выхода, где $A^x=\{\xi(\chi)>x\}$, $A_y = \{\xi(\chi)<-y\}$ — события, на которых происходит выход процесса из интервала. По сравнению с предыдущими пунктами мы сдвинули интервал $[0,B]$ и процесс $y + \xi(t)$ вниз на y. В силу однородности процесса по пространству интегральное преобразование совместного распределения $\{\chi, X\}$ для процесса с кумулянтой (1) определено равенствами (14), а для процесса Пуассона с кумулянтой (6) — равенствами (17) – (19).

Приведем теорему, которая является ключевой при изучении данного двухграничного функционала для однородных процессов с независимыми приращениями.

Теорема 6 [11]. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (1), $x, y \ge 0$, $x + y = B$, $\xi(0) = 0$, *и*

$$Q^s(p) = \int_{-y}^{x} e^{-up}\,\mathrm{P}[-y \le \xi^-(\nu_s), \xi(\nu_s) \in du, \xi^+(\nu_s) \le x] = \mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \chi > \nu_s].$$

Для интегрального преобразования совместного распределения $\{\xi^-(\nu_s), \xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$ *выполняется равенство*

$$Q^s(p) = U_p^s(x) - e^{yp}\int_0^\infty e^{vp}\,\mathrm{E}[e^{-s\chi}; X \in dv; A_y]U_p^s(v + B), \quad \mathrm{Re}\,p \le 0, \tag{52}$$

где

$$U_p^s(x) = \mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x] = \mathrm{E}e^{-p\xi^-(\nu_s)}\,\mathrm{E}[e^{-p\xi^+(\nu_s)}; \xi^+(\nu_s) \le x] \tag{53}$$

— *интегральное преобразование совместного распределения* $\{\xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$, *определенное равенством* (3), *а интегральные преобразования совместного распределения* $\{\chi, X\}$ *определены равенствами* (14).

Формулы (52) позволяют эффективно вычислять совместное распределение $\{\xi^-(\nu_s), \xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$ для частных примеров (см. также [11, 19]) однородного процесса с независимыми приращениями.

***Следствие* 5.** *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6), $x, y \ge 0$, $x + y = B$, $\xi(0) = 0$. *Тогда для совместного распределения* $\{\xi^-(\nu_s), \xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$ *справедлива формула*

$$\mathrm{P}[-y \le \inf_{t \le \nu_s} \xi(t), \xi(\nu_s) \le u, \sup_{t \le \nu_s} \xi(t) \le x] =$$

$$= se^{-\lambda B}\frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}\int_0^{u+y} R_s(v)\,dv - s\lambda\int_0^u R_s(v)\,dv + sR_s(u), \quad u \in [-y, x]. \tag{54}$$

Доказательство. Определим для процесса Пуассона функцию $U_p^s(x)$, $x \ge 0$. Используя формулы (7) для интегральных преобразований $\xi^-(\nu_s)$, $\xi^+(\nu_s)$ и равенство (53), находим интегральное преобразование совместного распределения $\{\xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$:

$$\int_0^\infty e^{-zx}U_p^s(x)\,dx = s\,\frac{\lambda - p}{c(s) - p}\left(1 - \frac{c(s) - p}{z}\right)R(p + z, s), \quad \mathrm{Re}\,z \ge 0.$$

Используя определение резольвенты (13) для обращений преобразований Лапласа в правой части этого равенства, находим резольвентное представление функции $U_p^s(x)$:

$$U_p^s(x) = s\frac{\lambda - p}{c(s) - p} e^{-xp} R_s(x) - s(\lambda - p)\int_0^x e^{-up} R_s(u)\,du, \quad x \ge 0.$$

Далее, из первого из равенств (19) имеем

$$\mathrm{E}[e^{-s\chi}; X \in du, A_y] = e^{-\lambda(u+B)} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)}\,du.$$

Подставляя выражения для функций $U_p^s(x)$, $x \ge 0$, $\mathrm{E}[e^{-s\chi}; X \in du, A_y]$ в равенство (52) и проводя необходимые вычисления, находим

$$Q^s(p) = \mathrm{E}[e^{-p\xi(\nu_s)}; \chi > \nu_s] =$$

$$= s(p-\lambda)\int_0^x e^{-up} R_s(u)\,du + se^{-xp} R_s(x) + se^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}(\lambda, s)} \int_0^B e^{-p(u-y)} R_s(u)\,du.$$

Нетрудно получить следующее равенство:

$$\int_{-y}^x e^{-up}\, \mathrm{P}[\xi(\nu_s) \le u, \chi > \nu_s]\,du = \frac{1}{p}\left(Q^s(p) - \mathrm{P}[\chi > \nu_s] e^{-xp}\right). \tag{55}$$

Используя очевидное тождество $\lambda \hat{S}_B(\lambda, s) = \hat{R}_B(\lambda, s) + e^{-\lambda B} S_s(B)$, из третьей из формул (19) находим выражение для $\mathrm{P}[\chi > \nu_s]$:

$$\mathrm{P}[\chi > \nu_s] = sR_s(x) + se^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} \int_0^B R_s(u)\,du - s\lambda \int_0^x R_s(u)\,du.$$

Подставляя в равенство (55) найденные выражения для $Q^s(p)$, $\mathrm{P}[\chi > \nu_s]$ и проводя необходимые вычисления, имеем

$$\int_{-y}^x e^{-pu}\, \mathrm{P}[-y \le \inf_{t \le \nu_s} \xi(t),\ \xi(\nu_s) \le u,\ \sup_{t \le \nu_s} \xi(t) \le x]\,du =$$

$$= \int_{-y}^x e^{-pu} \left(se^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} \int_0^{u+y} R_s(v)\,dv - s\lambda \int_0^u R_s(v)\,dv + sR_s(u) \right) du,$$

где $R_s(u) = 0$ при $u < 0$. Полученная формула — суть равенство двух преобразований Лапласа. Следовательно, совпадают функции-оригиналы левой и правой частей этого равенства, и, таким образом, находим равенство (54), где $R_s(v) = 0$ при $v < 0$. Отметим, что для целочисленного случайного блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой в [20] приведены резольвентные представления, аналогичные этим равенствам.

7. Пересечения интервала процессом Пуассона. В этом пункте для процесса Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой определим совместное распределение числа пересечений интервала $[-y, x]$ сверху и снизу на показательно распределенном временном отрезке $[0, \nu_s]$. Это распределение будет получено как следствие соответствующей теоремы для однородного процесса с независимыми приращениями.

Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой (1). В предположении $\xi(0) = -(v + y)$, $v > 0$, через $i_v = \inf\{t : \xi(t) > x\}$ обозначим момент первого пересечения процессом интервала

$[-y, x]$ снизу, при $\xi(0) = v + x$, $v > 0$, через $i^v = \inf\{t : \xi(t) < -y\}$ — момент первого пересечения процессом интервала $[-y, x]$ сверху. Пусть $\xi(0) = 0$. Введем случайные величины: α_t^+ — число пересечений интервала $[-y, x]$ снизу вверх процессом до момента t; α_t^- — число пересечений интервала $[-y, x]$ сверху вниз процессом до момента t.

Теорема 7 [23]. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (1), $B > 0$, $x \in [0, B]$, $y = B - x$. *Тогда для совместного распределения* $\{\alpha_{\nu_s}^+, \alpha_{\nu_s}^-\}$ *числа пересечений интервала* $[-y, x]$ *процессом снизу вверх и сверху вниз для всех* $n \in \mathbb{N} \cup 0$ *справедливы равенства*

$$P[\alpha_{\nu_s}^+ = n,\ \alpha_{\nu_s}^- = n+1] =$$

$$= \int_0^\infty E[e^{-s\chi}; X \in dv, A^x] \int_0^\infty K_+^{(n)}(v, du, s) \int_0^\infty E[e^{-s\tau_{u+B}}; T_{u+B} \in dl](1 - Ee^{-s\tau^{l+B}}),$$

$$P[\alpha_{\nu_s}^+ = n+1,\ \alpha_{\nu_s}^- = n] =$$

$$= \int_0^\infty E[e^{-s\chi}; X \in dv, A_y] \int_0^\infty K_-^{(n)}(v, du, s) \int_0^\infty E[e^{-s\tau^{u+B}}; T^{u+B} \in dl](1 - Ee^{-s\tau_{l+B}}),$$

$$P[\alpha_{\nu_s}^+ = n = \alpha_{\nu_s}^-] = \mathbf{I}_{\{n=0\}} -$$

$$- \mathbf{I}_{\{n=0\}} \left(\int_0^\infty E[e^{-s\chi}; X \in dv, A^x] Ee^{-s\tau_{v+B}} + \int_0^\infty E[e^{-s\chi}; X \in dv, A_y] Ee^{-s\tau^{v+B}} \right) +$$

$$+ \mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}} \int_0^\infty E[e^{-s\chi}; X \in dv, A^x] \int_0^\infty K_+^{(n)}(v, du, s)(1 - Ee^{-s\tau_{u+B}}) +$$

$$+ \mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}} \int_0^\infty E[e^{-s\chi}; X \in dv, A_y] \int_0^\infty K_-^{(n)}(v, du, s)(1 - Ee^{-s\tau^{u+B}}),$$

где $K_\pm^{(0)}(v, du, s) \stackrel{\text{df}}{=} \delta(v - u)\, du$, *а функции* $E[e^{-s\chi}; X \in dv, A^x]$, $E[e^{-s\chi}; X \in dv, A_y]$ *и последовательные итерации* $K_\pm^{(n)}(v, du, s)$, $n \in \mathbb{N}$, *ядер* $K_\pm(v, du, s)$ *определены равенствами* (14) – (16).

Для процесса Пуассона равенства (14) – (16) упрощаются. Обозначим

$$T(s) = Ee^{-s\tau_B} E[e^{-s\tau^{\gamma+B} - c(s)T^{\gamma+B}}] = Ee^{-s\tau_B} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} E[e^{-s\tau^{x+B} - c(s)T^{x+B}}]dx.$$

Следствие 6. *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — *процесс Пуассона с показательно распределенной отрицательной компонентой и кумулянтой* (6), $B > 0$, $x \in [0, B]$, $y = B - x$. *Тогда для совместного распределения* $\{\alpha_{\nu_s}^+, \alpha_{\nu_s}^-\}$ *числа пересечений интервала* $[-y, x]$ *процессом снизу вверх и сверху вниз для всех* $n \in \mathbb{N} \cup 0$ *справедливы равенства*

$$P[\alpha_{\nu_s}^+ = n+1,\ \alpha_{\nu_s}^- = n] = \left(Ee^{-s\tau_y} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} \right)(1 - Ee^{-s\tau^{\gamma+B}})T(s)^n,$$

$$P[\alpha^+_{\nu_s} = n,\ \alpha^-_{\nu_s} = n+1] = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} (\mathrm{E} e^{-s\tau^{\gamma+B}} - T(s))T(s)^n,$$

$$P[\alpha^+_{\nu_s} = n = \alpha^-_{\nu_s}] = \mathbf{I}_{\{n=0\}}(1 - \mathrm{E} e^{-s\tau_y}) + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} (1 - \mathrm{E} e^{-s\tau^{\gamma+B}})T(s)^n +$$

$$+ \mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}} \left(\mathrm{E} e^{-s\tau_y} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_s(x)}{\hat{R}_B(\lambda, s)} \right) (\mathrm{E} e^{-s\tau^{\gamma+B}} - T(s))T(s)^{n-1},$$

где

$$\hat{R}_B(\lambda, s) = \int_B^\infty e^{-\lambda x} R_s(x)\, dx,$$

а функции $\mathrm{E}\exp\{-s\tau_x\}$, $\mathrm{E}\exp\{-s\tau^x - zT^x\}$, $R_s(x)$, $x \ge 0$, *определены равенствами* (9), (13).

Доказательство. Получим первую формулу следствия. Из равенств (9) и следствия 1 для всех $v > 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mathrm{E}[e^{-s\tau_x}; T_x \in du] = (\lambda - c(s)) e^{-xc(s) - \lambda u} du,$$

$$\mathrm{E} e^{-s\tau_x} = \left(1 - \frac{c(s)}{\lambda}\right) e^{-xc(s)}, \quad x \ge 0,$$

$$\mathrm{E}[e^{-s\chi}; X \in du, A^x] = \mathrm{E}[e^{-s\tau^x}; T^x \in du] - \mathrm{E}[e^{-s\chi}; A_y] \mathrm{E}[e^{-s\tau^{\gamma+B}}; T^{\gamma+B} \in du],$$

$$K_+^{(n)}(v, du, s) = \mathrm{E} e^{-s\tau_{v+B}} \mathrm{E}[e^{-s\tau^{\gamma+B}}; T^{\gamma+B} \in du] T(s)^{n-1}.$$

Подставляя выражения для этих функций в первое равенство теоремы 7, получаем первое равенство следствия. Справедливость остальных двух формул следствия устанавливается аналогично.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 280 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 639 с.
3. *Emery D. J.* Exit problem for a spectrally positive process // Adv. Appl. Probab. – 1974. – P. 498 – 520.
4. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, вып. 1. – С. 104 – 119.
5. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 170 – 174.
6. *Супрун В. Н.* Задача о разорении и резольвента обрывающегося процеса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 1. – С. 53 – 61.
7. *Шуренков В. М.* Предельное распределение момента выхода и положения в момент выхода из широкого интервала для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – **23**, вып. 2. – С. 419 – 425.
8. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
9. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 240 с.
10. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
11. *Каданков В. Ф., Каданкова Т. В.* О распределении момента первого выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1359 – 1384.

12. *Kadankov V. F., Kadankova T. V.* On the disribution of the moment of the first exit-time an interval and the value of overjump through borders interval for the processes with independent increments and random walks // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2005. – **13**, № 3. – P. 219 – 244.
13. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – **11**, вып. 4. – С. 656 – 670.
14. *Печерский Е. А., Рогозин Б. А.* О совместных распределениях случайных величин, связанных с флуктуациями с независимыми приращениями // Там же. – 1969. – **14**, вып. 3. – С. 431 – 444.
15. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
16. *Золотарев В. М.* Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – **9**, вып. 4. – С. 724 – 733.
17. *Kadankov V. F., Kadankova T. V.* On the disribution of duration of stay in an interval of the semi-continuous process with independent increments // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2004. – **12**, № 4. – P. 365 – 388.
18. *Kadankova T. V.* On the distribution of the number of the intersections of a fixed interval by the semi-continuous process with independent increments // Theory Stochast. Process. – 2003. – № 1 – 2. – P. 73 – 81.
19. *Каданкова Т. В.* Про сумісний росподіл supremum'a, infimum'a та значення напівнеперервного процесу з незалежними приростами // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2004. – **70**. – С. 56 – 65.
20. *Каданкова Т. В.* Двограничні задачі для випадкового блукання з геометрично розподіленими від'ємними стрибками // Там же. – 2003. – **68**. – С. 60 – 71.
21. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1966. – 406 с.
22. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 127 с.
23. *Kadankov V. F., Kadankova T. V.* Intersections of an interval by a process with independent increments // Theory Stochast. Process. – 2005. – **11(27)**, № 1 – 2. – P. 54 – 68.

Получено 08.07.2005