УДК 517.946

С. П. Дегтярев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ НА МГНОВЕННУЮ КОМПАКТИФИКАЦИЮ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

We study the instantaneous support shrinking phenomenon and the initial behavior of support of a solution of filtration equation in an inhomogeneous porous medium.

Вивчається миттєва компактифікація та початкова поведінка носія розв'язку рівняння фільтрації у неоднорідному пористому середовищі.

1. Введение. Целью данной работы является изучение явления мгновенной компактификации носителя решения следующей задачи для уравнения фильтрации в пористой среде:

$$\begin{gathered}\rho(x)u_t = \Delta u^m - u^p, \quad x \in R^N, \quad t > 0,\\ u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in R^N,\end{gathered} \tag{1}$$

где $m > 0$, $0 < p < \min\{1, m\}$, $\rho(x)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция с заданным ростом на бесконечности:

$$B^{-1} \le \rho(x)/\rho_0(|x|) \le B \quad \text{для} \quad |x| \ge 1, \quad B \ge 1, \tag{2}$$

свойства функции $\rho_0(r)$ будут уточнены ниже.

Явление мгновенной компактификации носителя к настоящему времени изучено довольно полно, и в этом направлении получено много глубоких результатов, включая изучение такого типа явлений для уравнений высокого порядка (см., например, [1]). В данной работе мы будем следовать методу и технике работ [2 – 4] и рассмотрим влияние неоднородности среды как для степенного, так и для нестепенного поведения функций $\rho_0(r)$ и $u_0(x)$ из (1), (2).

Рассмотрим сначала случай степенного поведения указанных функций. Пусть $\rho_0(r) \equiv r^q$, $q > 0$ и, следуя [3], предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим предположениям:

H_1) $u_0(x)$ непрерывна, ограничена, неотрицательна и $u_0(x) \to 0$ равномерно при $|x| \to \infty$;

H_2) $|x|^a u_0(x) \to A$ равномерно при $|x| \to \infty$ для некоторых $a, A > 0$.

Для задачи (1) с $\rho(x) \equiv 1$ и $m > 0$ в [2, 3] описано начальное поведение носителя решения, а именно

$$\left\{(x,t) : |x| < c_1 t^{-\frac{1}{a(1-p)}}\right\} \subset S(t) \subset \left\{(x,t) : |x| < c_2 t^{-\frac{1}{a(1-p)}}\right\},$$

где $S(t)$ — носитель $u(x,t)$. Оказывается, что в случае неоднородной среды, когда $\rho(x) \ne \text{const}$ и ведет себя, как описано в (2), справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены условия* (2), H_1, H_2, *а также сформулированные ниже условия* H_3, H_4. *Тогда если* $-a(1-p)+q < 0$, *то*

$$\left\{(x,t) : |x| < c_3 t^{\frac{1}{-a(1-p)+q}}\right\} \subset S(t) \subset \left\{(x,t) : |x| < c_4 t^{\frac{1}{-a(1-p)+q}}\right\}$$

для слабого решения $u(x,t)$ *задачи* (1) *с некоторыми постоянными* $0 < c_3 <$

$< c_4$. *Если же* $-a(1-p)+q \geq 0$ *и* $m \geq 1-(q+2)/a$, *то явление мгновенной компактификации носителя может отсутствовать.*

2. Предварительные сведения. Сформулируем некоторые аналоги теорем существования и сравнения из [2, 3, 5 – 7] для случая неоднородной среды, т. е. когда $\rho(x) \neq \mathrm{const}$.

Пусть $u_0 : R^N \to R$ — непрерывная неотрицательная ограниченная функция.

Определение 1. *Неотрицательная функция* $u(x,t)$, *определенная на* $R^N \times \times [0,T]$, *называется непрерывным слабым решением задачи* (1) *на* $[0,T]$, *если*:

1) $u(x,t)$ *непрерывна на* $R^N \times [0,T]$, *неотрицательна и ограничена*;

2) *для любой области* $\Omega \subset R^N$ *с гладкой границей и для любой пробной функции* $\varsigma \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap C^2(\Omega \times (0,T))$ *такой, что* $\zeta \geq 0$ *на* $\overline{\Omega} \times \times [0,T]$ *и* $\zeta = 0$ *на* $\partial\Omega \times [0,T]$, $u(x,t)$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_\Omega \rho(x)u(x,t)\zeta(x,t)\,dx = \int_\Omega \rho(x)u_0(x)\zeta(x,0)\,dx - \int_0^t \int_{\partial\Omega} u^m(x,\tau)\partial_\nu\zeta\,ds\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_\Omega \left[u\varsigma_t + u^m\Delta\zeta - u^p\zeta\right]dx\,d\tau \tag{3}$$

для любого $0 \leq t \leq T$. *Здесь* ∂_ν *обозначает производную по нормали, внешней к* Ω.

Наряду с задачей Коши (1) рассмотрим также соответствующую задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \rho(x)u_t &= \Delta u^m - u^p, \quad x \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= U(x,t), \quad x \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

где $T > 0$ и $\Omega \subset R^N$ — ограниченная связная область с компактной границей $\partial\Omega$, кусочно принадлежащей C^1 и удовлетворяющей условию внешней сферы [8], $U(x,t) \in C(\partial\Omega \times [0,T])$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $u_0(x) = U(x,0)$ при $x \in \partial\Omega$, $u_0, U \geq 0$.

Определение 2. *Неотрицательная функция* $u(x,t)$, *определенная на* $\overline{\Omega} \times \times [0,T]$, *называется слабым решением задачи* (4) *с данными* u_0 *и* U, *если*:

1) $u \in C([0,T] : L^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times [0,T])$;

2) *для любой пробной функции* $\varsigma \in C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, $\zeta \geq 0$ *в* $\overline{\Omega} \times [0,T]$ *и* $\zeta = 0$ *на* $\partial\Omega \times [0,T]$, $u(x,t)$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_\Omega \rho(x)u(x,t)\zeta(x,t)\,dx = \int_\Omega \rho(x)u_0(x)\zeta(x,0)\,dx - \int_0^t \int_{\partial\Omega} U^m(x,\tau)\partial_\nu\zeta\,ds\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_\Omega \left[u\varsigma_t + u^m\Delta\zeta - u^p\zeta\right]dx\,d\tau \tag{5}$$

для любого $0 \leq t \leq T$.

Заменяя равенство в (5) на неравенство $\leq$, получаем определение слабого субрешения $u(x,t)$ задачи (4) на $[0,T]$ с данными u_0 и U.

Определение 3. *Обобщенным суперрешением задачи* (4) *с данными* u_0 *и* U *называется функция* $u(x,t)$ *такая, что существуют функции* u_0^*, U^*, *удовлетворяющие тем же предположениям, и функция* $h \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$, *так что* $u_0 \le u_0^*$ *в* Ω, $U \le U^*$ *на* $\partial\Omega \times (0,T)$, $h \ge 0$ *почти везде в* $\Omega \times (0,T)$ *и* $u(x,t)$ — *слабое решение задачи* (4) *с данными* u_0^*, U^* *и со слагаемым* $\int_0^t \int_\Omega h(x,\tau)\zeta(x,\tau)dx d\tau$, *добавленным в правую часть* (5).

Аналогично определяются обобщенные суб- и суперрешения задачи Коши (1).

Теорема 2. *Задачи* (1) *и* (4) *допускают единственное слабое решение на* $[0,T]$.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ — *слабое решение задачи* (4) *на* $[0,T]$ *с данными* u_0, U. *Если* $v(x,t)$ — *слабое субрешение задачи* (4) *на* $[0,T]$ *с теми же данными, то* $v \le u$ *почти везде в* Ω *для* $0 \le t \le T$. *Если* $w(x,t)$ — *обобщенное суперрешение задачи* (4) *на* $[0,T]$ *с теми же данными, то* $w \ge u$ *почти везде в* Ω *для* $0 \le t \le T$.

Аналогичная теорема сравнения имеет место и для задачи Коши (1). Доказательства теорем 2, 3 для $m < 1$ аналогичны доказательствам соответствующих теорем из [2], а для случая $m \ge 1$ — доказательствам из [5–7], причем из результатов [9] следует непрерывность слабых решений при непрерывных данных. Отметим, что требование непрерывной дифференцируемости функции $\rho(x)$ связано с методом доказательства теорем 2, 3 и необходимостью применения при этом классических результатов о разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений (см. [8]).

Чтобы сформулировать аналог леммы 3.1 из [3], введем описанную ниже замену переменных. Пусть

$$f(k) = \frac{1}{\sup\limits_{|x|>k} u_0(x)}, \qquad k > 0,$$

где в силу предположения H_2 $f(k) \simeq k^a/A$ при $k \to \infty$. Определим функции $u_k(x,t)$ следующим образом:

$$u_k(x,t) = f(k)u(kx, f(k)^{-(1-p)}k^q t), \tag{6}$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (1). Как следует из определения $u_k(x,t)$,

$$L_k(u_k) \equiv \rho_k(x)(u_k)_t - D(k)\Delta u_k^m + u_k^p = 0, \qquad x \in R^N, \quad t > 0,$$

$$u_k(x,0) = u_{0k}(x) = f(k)u_0(kx), \qquad x \in R^N.$$

Здесь $\rho_k(x) = \rho(kx)k^{-q}$, $D(k) = f(k)^{p-m}k^{-2}$. Отметим, что $f(k) \to \infty$, $D(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Лемма 1. *Если для заданной положительной постоянной* C $u_{0k}(x) < C$ *для* $|x| > R > 0$, $k > k(R)$, *то* $u_k(x,t) < C$ *для* $|x| > R + d(k)$, $k > k(R)$, *где* $d(k) < C(m,p,N,M)k^{-1}$, $M = \| u_0 \|_\infty$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1 из [2] и вытекает из следующего утверждения (леммы 3.1 из [3]).

Лемма 2. *Существует* $d = d(m,p,N,M) > 0$ *такое, что если в задаче* (1) $0 \le u_0(x) \le \varepsilon$ *при* $|x| \ge R$ *для некоторых* ε, $R > 0$, *то* $0 \le u(x,t) \le \varepsilon$ *при* $|x| \ge R + d(m,p,N,M)$, $t > 0$.

Сформулируем теперь следующее условие:

H_3) для заданного $R > 0$ существует функция $U_0(|x|)$, убывающая к нулю при $|x| \to \infty$, такая, что $u_{0k}(x) < U_0(|x|)$ при $|x| > R$, $k > k(R)$.

Теорема 4. *При выполнении условий* $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$ $-a(1-p) + q < 0$ *и для фиксированного* $t_0 > 0$ *существует константа* C, *не зависящая от* k, *такая, что* $u_k(x, t_0) \equiv 0$ *при* $|x| > C$, $k > \bar{k}$.

***Следствие* 1.** $u(x,t) \equiv 0$ *для* $0 < t < T_0$, $|x| > c\,t^{\frac{1}{-a(1-p)+q}}$.

Действительно, как следует из теоремы 4, $f(k)u(kx, f(k)^{-(1-p)}k^q t_0) \equiv 0$ для $|x| > C$. Обозначая $f(k)^{-(1-p)}k^q t_0 = t \in (0, T_0]$, $kx = \xi$, и учитывая, что $f(k) \simeq \simeq k^a/A$, получаем $u(\xi, t) \equiv 0$ для $0 < t < T_0$, $|\xi| > c\,t^{\frac{1}{-a(1-p)+q}}$.

Следуя [3], введем следующее предположение:

H_4) для заданных $l_1 < l_2$ существует константа B_1 такая, что $u_{0k}(x) > B_1$ для $l_1 \le |x| \le l_2$, $k > k(l_1, l_2)$.

Теорема 5. *При выполнении предположения* H_4 *для любого* $l_1 < |x_0| < l_2$ *выполнено*

$$u_k(x_0, t) \ \ge\ \left[B_1^{1/r} - \lambda t\right]_+^r, \qquad 0 \le t \le T_0,$$

где $r = (\min(1, m) - p)^{-1}$ *и* λ, T_0 — *некоторые положительные постоянные, зависящие от* m, p, N, B, B_1.

Из этой теоремы следует, что для $t = T_0/2$ $u_k(x_0, T_0/2) > \left[B_1^{1/r} - \lambda T_0/2\right]^r = = c > 0$, $k > \bar{k}$, где C не зависит от k.

Следовательно,

$$f(k)u(kx_0, (T_0/2) f(k)^{-(1-p)}k^q) \ \ge\ c.$$

Полагая $kx_0 = \xi$, $(T_0/2) f(k)^{-(1-p)}k^q = t$, получаем, что $u(\xi, t) > 0$ при $c_1 t^{\frac{1}{-a(1-p)+q}} < |\xi| < c_2 t^{\frac{1}{-a(1-p)+q}}$, где учтены свойства $f(k)$.

3. Доказательства теорем 4, 5 и 1. Из леммы 1 и предположения H_3 следует, что для достаточно больших k $u_k(x,t) < U_0(R)$ для $|x| > R + 1$, $k > > \bar{k}(R, p, m, N, q, M)$. Рассмотрим случаи $m \ge 1$ и $m < 1$ отдельно. Зафиксируем $t_0 > 0$ и для любого $k > \bar{k}$ определим $S_k(t_0)$ — носитель $u_k(x, t_0)$.

Рассмотрим случай $m \ge 1$. Зафиксируем x_0 и рассмотрим функцию сравнения

$$w(x,t) = \left[h(t_0 - t, x)^m + y(|x - x_0|)\right]^{1/m}, \qquad 0 < t < t_0,$$

где $h(t, x)$ — решение задачи

$$B|x|^q h_z'(z, x) = \frac{1}{2}h^p(z, x), \qquad h(0, x) = 0$$

и функция y — решение уравнения

$$\Delta y = \frac{1}{2} y^{\frac{p}{m}},$$

т. е.

$$h(t_0 - t, x) = \left[\frac{1}{2}(1-p)\right]^{\frac{1}{1-p}} B^{-\frac{1}{1-p}} |x|^{-\frac{q}{1-p}} (t_0 - t)^{\frac{1}{1-p}},$$

$$y(|x - x_0|) = C\left(N, \frac{p}{m}\right)|x - x_0|^{\frac{2}{1-p/m}}.$$

Для функции $w(x,t)$ имеем

$$L_k(w) = \rho_k(x) w_t - D(k)\Delta w^m + w^p =$$

$$= -\rho_k(x)\frac{1}{m}\left[h^m + y\right]^{\frac{1}{m}-1} m h^{m-1} h' - D(k)\Delta\left[h^m + y\right] + \left[h^m + y\right]^{\frac{p}{m}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\rho_k(x)}{B|x|^q}\left[h^m + y\right]^{\frac{1}{m}-1} h^{m-1+p} - D(k)\Delta y - D(k)\Delta h^m + \left[h^m + y\right]^{\frac{p}{m}} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\left[h^m + y\right]^{\frac{1}{m}-1} h^{m-1+p} - D(k)\Delta y - D(k)\Delta h^m + 2^{\frac{p}{m}-1}\left[h^p + y^{\frac{p}{m}}\right],$$

где использовано то, что $\left[h^m + y\right]^{\frac{p}{m}} \geq 2^{\frac{p}{m}-1}\left[h^p + y^{\frac{p}{m}}\right]$.

Следовательно,

$$L_k(w) \geq \frac{1}{2}h^p\left(1 - \frac{h^{m-1}}{\left[h^m + y\right]^{1-\frac{1}{m}}}\right) + \frac{1}{2}y^{\frac{p}{m}}(1 - D(k)) + \frac{2^{\frac{p}{m}} - 1}{2}\left[h^p + y^{\frac{p}{m}}\right] - D(k)\Delta h^m \geq$$

$$\geq c_1 h^p - D(k) c_2 h^m |x|^{-2}$$

для достаточно больших k, так как $\Delta h^m = c h^m |x|^{-2}$.

Поэтому

$$L_k(w) \geq h^p\left[c_1 - D(k) c_2 h^{m-p}|x|^{-2}\right] = h^p\left[c_1 - D(k) c_3 t_0^{\frac{m-p}{1-p}} |x|^{-\frac{q(m-p)}{1-p} - 2}\right] \geq 0$$

при $|x| \geq R_1 = R_1(t_0, m, p, q)$.

Выберем R больше, чем R_1, и заметим, что по определению $y(r)$ существует R_0, зависящее от $U_0(R)$, N, p/m, такое, что $y(R_0) = U_0(R)$, $y(r) > U_0(R)$ для $r > R_0$.

Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого достаточно большого k существует x_0 такое, что $|x_0| \geq R + 1 + R_0$ и $u_k(x_0, t_0) > 0$ (если это невозможно, то доказательство завершено с $C = R + 1 + R_0$). В шаре $B(x_0, R_0) = \{|x - x_0| < R_0\}$ имеем

1) на $\partial B(x_0, R_0) = \{|x - x_0| = R_0\}$: $u_k(x,t) < U_0(R) \leq y \leq w$ для $0 \leq t \leq t_0$;

2) $u_k(x_0, t_0) - w(x_0, t_0) = u_k(x_0, t_0) > 0$;

3) $L_k(w) \geq 0$, $L_k(u_k) = 0$ в $B(x_0, R_0) \times (0, t_0)$.

Следовательно, $u_k - w$ должна достигать своего (положительного) максимума на начальном множестве $B(x_0, R_0) \times \{t = 0\}$ и поэтому существует точка $\bar{x} \in B(x_0, R_0)$ такая, что $u_{0k}(\bar{x}) - w(\bar{x}, 0) > 0$, откуда следует, что $c(t_0)\left(|x_0| + R_0\right)^{-\frac{q}{1-p}} \leq c\left(|x_0| - R_0\right)^{-a}$, что, в свою очередь, при достаточно больших $|x_0|$, $|x_0| > C(R_0)$, дает $|x_0|^{\frac{a(1-p)-q}{1-p}} \leq C$. И так как $a(1-p) - q > 0$, $|x_0| \leq$

$\leq C_0 = C(t_0, R_0, a, q, p)$, что доказывает данное утверждение для случая $m \geq 1$ с $C = \max\{R + 1 + R_0, C_0\}$.

В случае $m < 1$ рассмотрим барьерную функцию $w = h(t_0 - t, x) + y^{1/m}(|x - x_0|)$, где $y(r)$ и $h(z, x)$ такие же, как и выше. Имеем

$$L_k(w) = -\frac{\rho_k(x)}{B|x|^q}\frac{1}{2}h^p - D(k)\Delta w^m + \left[h + y^{1/m}\right]^p \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}h^p - D(k)\Delta w^m + \frac{2^p}{2}\left[h^p + y^{\frac{p}{m}}\right] \geq -D(k)\Delta w^m + c\left[h^p + y^{\frac{p}{m}}\right].$$

Рассмотрим

$$\Delta w^m = \left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} y^{\frac{1}{m}-2}(\nabla y)^2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} y^{2\left(\frac{1}{m}-1\right)}(\nabla y)^2 +$$

$$+ \left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} y^{\frac{1}{m}-1}\Delta y + 2(m-1)\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} y^{\frac{1}{m}-1}(\nabla h \nabla y) +$$

$$+ m(m-1)\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2}(\nabla h)^2 + m\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}\Delta h = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6.$$

Оценим каждое слагаемое отдельно, учитывая при этом, что

$$|\nabla y| = c|x - x_0|^{\frac{2}{1-p/m}-1} = c\,y^{\frac{1+p/m}{2}}, \qquad |\nabla h| = c|x|^{-1}h.$$

Поскольку $m < 1$, то

$$|A_1| \leq c\,y^{\frac{m-1}{m}} y^{\frac{1}{m}-2}\left(y^{\frac{1+p/m}{2}}\right)^2 = c\,y^{\frac{p}{m}}.$$

A_2 и A_3 оцениваются аналогично. Далее,

$$|A_4| \leq c\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} h\,y^{\frac{1}{m}-1}|x|^{-1} y^{\frac{1+p/m}{2}} \leq \frac{c}{|x|}\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} y^{\frac{1}{m}-1}|x|^{-1} y^{\frac{1+p/m}{2}} \leq$$

$$\leq c\frac{|x - x_0|}{|x|} y^{-\frac{1-p/m}{2}} y^{\frac{1+p/m}{2}} \leq c\,y^{\frac{p}{m}}$$

при $|x_0|$, достаточно больших по сравнению с R_0. Здесь мы воспользовались тем, что $|x - x_0|^{-1} = c\,y^{-\frac{1-p/m}{2}}$.

Заметим, что $A_5 \leq 0$,

$$|A_6| \leq c\left(h + y^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} h|x|^{-2} \leq ch^m|x|^{-2}.$$

Кроме того, при достаточно больших x и фиксированном t_0 можно считать $h \leq 1$, так что $|A_6| \leq ch^p|x|^{-2} \leq ch^p$.

Из изложенного выше следует, что

$$L_k(w) \geq -c_1 D(k) y^{p/m} - c_2 D(k) h^p + c_3\left(y^{p/m} + h^p\right) \geq 0$$

при $k > \bar{k}$ для достаточно больших $\bar{k}$ и достаточно большом $|x_0|$.

Как и в случае $m \geq 1$, сравнивая функцию $u_k(x,t)$ с $w(x,t)$ на множестве $B(x_0,t_0)\times[0,t_0]$, видим, что при некотором $\bar{x}\in B(x_0,t_0)$ $w(\bar{x},0) < u_{0k}(\bar{x})$, и доказательство завершается, как и в случае $m \geq 1$. Тем самым теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2.4 из [3] с той же барьерной функцией

$$\left[G\left(1-\frac{|x-x_0|^2}{L^2}\right)-\lambda t\right]_+^r, \quad \frac{1}{r} = \min(1,m)-p, \quad [x]_+ \equiv \max\{x,0\},$$

при подходящем выборе констант G, L, λ, $l_1 < |x_0| < l_2$.

Обратимся теперь к случаю $-a(1-p)+q \geq 0$. Рассмотрим функцию $f(x,t) = \dfrac{(t_0-\gamma t)}{(1+x^2)^{a/2}}$, где a — константа из условия H_2.

Простые вычисления показывают, что при условии $-a(1-p)+q \geq 0$ можно выбрать t_0 достаточно малым, чтобы получить $f(x,0) \leq u_0(x)$. Затем можно выбрать γ достаточно большим, чтобы получить $L(f) \leq 0$, так как в силу (2)

$$L(f) \leq \frac{\rho(x)}{(1+x^2)^{a/2}}\left[-\gamma + t_0^m c_1\left(1+x^2\right)^{(-a(m-1)-2-q)/2} + t_0^p c_2\left(1+x^2\right)^{(a(1-p)-q)/2}\right].$$

Таким образом, f является субрешением и $u(x,t) \geq f(x,t)$ при t достаточно малых, что означает отсутствие мгновенной компактификации носителя. Тем самым теорема 1 доказана.

4. Нестепенной случай. Рассмотрим теперь ситуацию, когда функции $\rho(x)$ и $u_0(x)$ могут вести себя нестепенным образом. При этом мы ограничимся случаем $m > 1$ и предположим, что существует такая монотонно убывающая до 0 функция $v(r)$, $r \in [0,\infty)$, что

$$B^{-1} \leq u_0(x)/v(|x|) \leq B, \quad B \geq 1.$$

Предположим далее, что функция $v(r)$ и функция $\rho_0(r)$ из (2) удовлетворяют следующим условиям: $\left|\left(v(r)^{1-p}\right)'_r\right| + \left|\left(v(r)^{1-p}\right)''_{rr}\right| + \left|(1/\rho_0(r))'_r\right| + \left|(1/\rho_0(r))''_{rr}\right| \leq C$; функция $F(r) \equiv v(r)^{1-p}\cdot\rho_0(r)$ монотонно убывает до нуля при $r \to \infty$ (аналог условия $-a(1-p)+q < 0$ из теоремы 1). Предположим также, что $m+p > 2$.

Теорема 6. *При сделанных выше предположениях существуют константы* $0 < C_1 < C_2$ *и* $t_0 > 0$ *такие, что*

$$\{(x,t): |x| < F^{-1}(C_2 t)\} \subset S(t) \subset \{(x,t): |x| < F^{-1}(C_1 t)\}$$

при $t \in [0,t_0]$, *где* F^{-1} *— функция, обратная к* F.

Доказательство. Использовав подход из [4], рассмотрим следующую радиально симметричную функцию: $h(x,t) = [y(x,t)]^{1/(1-p)}$, где

$$y(x,t) \equiv \left[f(|x|) - \frac{1}{2}tg(|x|)\right]_+, \quad f(r) \equiv [(B+1)v(r)]^{1-p}, \quad g(r) \equiv 1/B\rho_0(r).$$

Проверим, что $h(x,t)$ является суперрешением уравнения из (1):

$$Lh \equiv \rho(x)h_t - \Delta h^m + h^p =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\rho(x)}{B\rho_0(x)}\, y^{\frac{p}{1-p}} - \frac{m}{1-p}\,\frac{m-1+p}{1-p}\, y^{\frac{m-2+2p}{1-p}}\left(f'(|x|) - \frac{1}{2}\mathrm{tg}'(|x|)\right)^2 -$$

$$-\frac{m}{1-p} y^{\frac{m-1+p}{1-p}}\left(f''(|x|) - \frac{1}{2}\mathrm{tg}''(|x|)\right) - \frac{N-1}{|x|}\,\frac{m}{1-p}\, y^{\frac{m-1+p}{1-p}}\left(f'(|x|) - \frac{1}{2}\mathrm{tg}'(|x|)\right) + y^{\frac{p}{1-p}} \geq$$

$$\geq y^{\frac{p}{1-p}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\rho(x)}{B\rho_0(x)} - c_1(t)\, y^{\frac{m-2+p}{1-p}} - c_2(t)\, y^{\frac{m-1}{1-p}} - \frac{c_3(t)}{|x|}\, y^{\frac{m-1}{1-p}}\right\},$$

где мы воспользовались радиальной симметрией и ограниченностью производных от функций f и g. В силу сделанных предположений нетрудно видеть, что существуют такие достаточно большое $r_0 > 0$ и достаточно малое $t_0 > 0$, что для $|x| > r_0$, $t \in [0, t_0]$ $y \in [0, y_0]$ при y_0 достаточно малом, откуда получаем $Lh \geq 0$ при $|x| \geq r_0$, $t \in [0, t_0]$.

При этом $h(x, 0) = (B+1)\,v(|x|) > u_0(x)$, $|x| \geq r_0$ и, в частности, $h(x, 0)\big|_{|x|=r_0} = (B+1)\,v(r_0) > u_0(x)\big|_{|x|=r_0}$, так что при достаточно малых t $h(x, t)\big|_{|x|=r_0} > u(x, t)\big|_{|x|=r_0}$, где $u(x, t)$ — решение задачи Коши (1). Уменьшая, если необходимо, t_0, будем считать, что последнее неравенство выполняется при $t \in [0, t_0]$. Таким образом, $h(x, t)$ является суперрешением для $u(x, t)$ в области $|x| \geq r_0$, $t \in [0, t_0]$, и, следовательно, $0 \leq u(x, t) \leq h(x, t)$ в этой области. Из определения функции h следует, что ее носитель содержится в множестве $f(|x|) - \frac{1}{2}\mathrm{tg}(|x|) \geq 0$, т. е. $v(|x|)^{1-p}\rho_0(|x|) \leq \frac{t}{2B(B+1)^{1-p}}$, или $|x| \leq$ $\leq F^{-1}\left(\frac{t}{2B(B+1)^{1-p}}\right)$, что доказывает правое включение в теореме 6. Левое включение доказывается аналогично, если в качестве субрешения рассмотреть аналогичную функцию $h(x, t)$, только в качестве $y(x, t)$ взять $y = [f(|x|) - 2\mathrm{tg}(|x|)]_+$, причем $f(r) = \left[\frac{1}{2B}v(r)\right]^{1-p}$, $g(r) = B/\rho_0(r)$.

Теорема доказана.

5. Исчезновение решения за конечное время.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *или* 6. *Тогда существует такое* $T_0 > 0$, *что решение задачи Коши* (1) *характеризуется свойством*: $u(x, t) \equiv 0$ *при* $t \geq T_0$, $x \in R^N$.

Доказательство этой теоремы при наличии растущей $\rho(x)$ следует из теорем 1 и 6, утверждающих наличие эффекта мгновенной компактификации носителя решения задачи Коши (1), и леммы 2 (о „локализации"). Применяя лемму 2, нетрудно установить, что решение, имеющее в какой-то момент времени $t_0 > 0$ компактный носитель, содержащийся в некотором шаре радиуса $R_0 >$ > 0, сохраняет свойство компактности носителя и при всех $t > t_0$, причем его носитель содержится в шаре радиуса $R_1 = R_0 + d(m, p, |u(x, t_0)|_\infty)$. Рассматривая теперь решение $u(x, t)$ задачи (1) как решение задачи Дирихле в шаре радиуса R_1 с нулевыми граничными условиями, видим, что пространственно-однородная функция вида $h = h(T_0 - t)$ будет суперрешением указанной задачи Дирихле, если в качестве $h(y)$ использовать решение задачи $M\,h'(y) = h^p(y)$, $h(0) = 0$, где $M \equiv \max\rho(x)$ по шару радиуса R_1, а T_0 выбрано достаточно большим.

6. О необходимых условиях компактификации. В заключение рассмотрим вопрос о необходимых условиях мгновенной компактификации, накладываемых на начальную функцию. В частности, А. Шишковым и Р. Кериснером в [1] был поставлен вопрос о том, может ли наблюдаться явление мгновенной компактификации носителя, если начальная функция имеет, например, представление $u_0(x) = \sum_{n\in Z} c_n\delta(x-n) + f(x)$, Z — множество целых чисел, $\sum_{n\in Z}|c_n| < \infty$, $x \in R^1$, $\delta(x)$ — дельта-функция, $f > 0$, $f \in L_1(R^1)$. Этот вопрос был сформулирован для случая, когда диффузия в уравнении описывается p-лапласианом $\nabla(|\nabla u|^{\lambda-1}\nabla u)$ вместо $\Delta(u^m)$, но он же имеет место и для уравнения пористой среды в (1). В рассматриваемом случае задачи (1) с $\rho(x) \equiv 1$ и в простейшем случае $m = 1$ ответ положителен, т. е. явление мгновенной компактификации носителя имеет место. Более того, явление мгновенной компактификации наблюдается даже при начальных данных с неограниченным максимумом и не принадлежащих $L_1(R^N)$. Рассмотрим, например, для случая размерности $N = 1$ простейшую задачу:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - u^p, \quad x \in R^N, \quad t > 0, \\
u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in R^N,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $u_0 = \sum_{n\in Z} \frac{1}{|n|^a}\delta(x-n)$, $a \in (0,1)$.

Нетрудно показать, что эта задача имеет неотрицательное при $t > 0$ решение $u(x,t)$, которое в силу принципа сравнения мажорируется решением уравнения теплопроводности с теми же начальными данными:

$$
u(x,t) \le v(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = C(t)\sum_{n\in Z}\frac{1}{|n|^a} e^{-\frac{(x-n)^2}{4t}}.
$$

Несложные вычисления показывают, что при $t > 0$ $v(x,t) \le C(t)(1+|x|)^{-a}$ и, следовательно, $u(x,t) \le C(t)(1+|x|)^{-a}$. Но тогда из [3] или [4] следует, что при любом $\tau > 0$ функция $u(x, t+\tau)$ имеет ограниченный носитель. Следовательно, в силу произвольности t и τ носитель $u(x,t)$ ограничен при любом $t > 0$.

Если же коэффициенты при дельта-функциях в последнем выражении для $u_0(x)$ в (7) не стремятся к нулю, например $u_0(x) = \sum_{n\in Z}\delta(x-n)$, то явление мгновенной компактификации отсутствует. Действительно, зафиксируем произвольное $x_0 \in R^1$ и рассмотрим шар K с центром в точке x_0 радиуса 1/2. Пусть $\zeta = \zeta(x)$ — положительная собственная функция задачи Дирихле для оператора Лапласа в этом шаре, нормированная каким-либо образом (например, можно положить $\zeta(x) = \sin(\pi(x - x_0 + 1/2))$ для $N = 1$). Умножим обе части уравнения в (7) на $\zeta(x)^s$, $s \ge 2$, и проинтегрируем по носителю $\zeta(x)$ (пределы интегрирования опускаем):

$$
\frac{d}{dt}\int u\zeta(x)^s\,dx = s\int u\zeta_{xx}\zeta(x)^{s-1}\,dx + s(s-1)\int u\zeta_x^2\zeta(x)^{s-2} - \int u^p\zeta^s.
$$

Принимая во внимание, что $\zeta_{xx} = -\pi^2\zeta$, $\int u^p\zeta^s\,dx \le \int u^p\zeta^{ps}\,dx \le \left(\int u\zeta^s\,dx\right)^p$, и обозначая $f(t) \equiv \int u\zeta^s\,dx$, имеем

$$\frac{df(t)}{dt} + c_1 f(t) + f(t)^p \geq 0, \quad c_1 = \text{const} > 0.$$

Решая это дифференциальное неравенство, для $f(t)$ получаем оценку

$$f(t) \geq \left[f(0)^{1-p} - c_2\left(1 - e^{-c_3 t}\right)\right]^{\frac{1}{1-p}},$$

что означает, что $f(t) > f(0)/2$ при $t \in [0, t_0]$, где t_0 не зависит от выбора x_0 в определении ζ и f, если $f(0)$ отделено от нуля. Это и доказывает отсутствие компактификации.

1. *Kersner R., Shishkov A.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 729 – 750.
2. *Borelli M., Ughi M.* The fast diffusion equation with strong absorption: the instantaneous shrinking phenomenon // Rend. Ist. mat. Univ. Trieste. – 1994. – **26**, Fasc. I E, II. – P. 109 – 140.
3. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Adv. Math. Sci. and Appl. Gakkotosho, Tokyo. – 2001. – **11**, № 1. – P. 333 – 345.
4. *Абдуллаев У. Г.* О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Мат. заметки. – 1998. – **63**, вып. 3. – С. 323 – 331.
5. *Berstch M.* A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term // Nonlinear Analysis, Methods and Appl. – 1983. – **7**, № 1. – P. 117 – 127.
6. *Berstch M., Kersner R., Peletier L. A.* Positivity versus localization in degenerate diffusion equations // Ibid. – 1985. – **9**, № 9. – P. 987 – 1008.
7. *Aronson D., Crandall M. G., Peletier L. A.* Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem // Ibid. – 1982. – **6**, № 10. – P. 1001 – 1022.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. *DiBenedetto E.* Continuity of weak solutions to a general porous medium equation // Indiana Univ. Math. J. – 1983. – **32**, № 1. – P. 83 – 118.

Получено 28.12.2004