УДК 512.544

Л. А. Курдаченко (Днепропетр. нац. ун-т),
Н. Н. Семко (Нац. ун-т ГНС Украины, Ирпень)

ГРУППЫ СО СЛАБЫМ УСЛОВИЕМ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП

A group G satisfies the weak maximality condition for nonnilpotent subgroups or, shortly, the condition Wmax-(non-nil), if G does not possess the infinite ascending chains $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ of nonnilpotent subgroups such that the indexes $|H_{n+1} : H_n|$ are infinite for all $n \in \mathbb{N}$. In the present paper, we study the structure of hypercentral groups satisfying the weak maximality condition for nonnilpotent subgroups.

Група G задовольняє слабку умову максимальності для ненільпотентних підгруп або, скорочено, умову Wmax-(non-nil), якщо G не має таких нескінченних зростаючих ланцюжків $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ненільпотентних підгруп, що індекси $|H_{n+1} : H_n|$ є нескінченними для кожного $n \in \mathbb{N}$. У даній роботі вивчається будова гіперцентральних груп, які задовольняють слабку умову максимальності для ненільпотентних підгруп.

Пусть $L_{\text{non-nil}}(G)$ — семейство всех ненильпотентных подгрупп группы G. Изучение групп, в которых семейство $L_{\text{non-nil}}(G)$ „очень мало” в некотором смысле, началось со ставшей уже классической работы О. Ю. Шмидта [1], где были изучены конечные группы, все собственные подгруппы которых нильпотентны (т. е. $\{G\} = L_{\text{non-nil}}(G)$). Если G — бесконечная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны, то G либо конечно порождена, либо локально нильпотентна. Впервые бесконечные группы такого рода рассматривали М. Ньюмэн и Дж. Уайголд [2]. Отметим, что примеры бесконечных конечнопорожденных групп, все собственные подгруппы которых абелевы, построенные А. Ю. Ольшанским [3] (§ 28), показывают, что изучение бесконечных конечнопорожденных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны, пока не очень возможно. Имеется также серия примеров бесконечнопорожденных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны [4 – 8], однако до полного изучения таких групп также далеко. Строение разрешимых групп с этим свойством в общих чертах дано Х. Смитом [9], который получил первые результаты о группах, в которых семейство $L_{\text{non-nil}}(G)$ удовлетворяет условиям максимальности и минимальности, а также слабым условиям максимальности и минимальности. Напомним общее определение слабых условий минимальности и максимальности. Пусть M — некоторая система подгрупп группы G. Будем говорить, что M удовлетворяет слабому условию максимальности (соответственно минимальности) или группа G удовлетворяет слабому условию максимальности для M-подгрупп или, короче, Wmax-M (соответственно слабому условию минимальности для M-подгрупп или, короче, Wmin-M), если G не имеет таких бесконечных возрастающих (соответственно убывающих) цепочек $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ подгрупп из системы M, что индексы $|H_{n+1} : H_n|$ (соответственно $|H_n : H_{n+1}|$) бесконечны для каждого $n \in \mathbb{N}$. Если M — система всех ненильпотентных групп, то получаем группы со слабым условием максимальности (соответственно минимальности) для ненильпотентных подгрупп или, короче, группы с условием Wmax-(non-nil) (соответственно Wmin-(non-nil). Понятия слабых условий минимальности и максимальности были введены Д. И. Зайцевым [10], Р. Бэром [11] и эффективно использовались в различных исследованиях (см., например, обзоры [12, 13]). Последующее после работы Х. Смита достаточно детальное изучение групп, в которых семейство $L_{\text{non-nil}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности, проводилось в работах М. Диксона и Л. А. Курдаченко [14, 15], а группы, в которых семейство $L_{\text{non-nil}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности, продолжали изучать М. Диксон, М. Эванс и Х. Смит [16]. Далее, в работе [17] М. Диксон, М. Эванс и Х. Смит изучали группы, в которых семейство $L_{\text{non-nil}}(G)$ удовлетворяет слабому условию максимальности. Двойственное слабое условие максимальности для ненильпотентных подгрупп рассматривали Л. А. Курдаченко, П. Шумяцкий, И. Я. Субботин [18]. В настоящей работе продолжается изучение таких групп. Более точно, настоящая работа посвящена изучению гиперцентральных групп, удовлетворяющих слабому условию максимальности для ненильпотентных подгрупп.

Отметим сначала некоторые элементарные свойства групп, удовлетворяющих условию Wmax-(non-nil).

Лемма 1. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil).

1. *Если H — подгруппа G, то H также удовлетворяет условию* Wmax-(non-nil).

2. *Если H — нормальная подгруппа G, то фактор-группа G/H также удовлетворяет условию* Wmax-(non-nil).

3. *Если U, V — подгруппы G, причем U нормальна в V, то секция V/U также удовлетворяет условию* Wmax-(non-nil).

Лемма 2. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil). *Пусть, далее, U — ненильпотентная подгруппа G и M — семейство подгрупп, включающих в себя U. Тогда M удовлетворяет условию* Wmax (*слабому условию максимальности для подгрупп*). *Если V — такая подгруппа G, что U нормальна в V, то секция V/U удовлетворяет условию* Wmax. *В частности, если V локально почти разрешима, то V/U минимаксна и почти разрешима.*

В самом деле, локально почти разрешимая группа, удовлетворяющая слабому условию максимальности, минимаксна и почти разрешима согласно теореме Д. И. Зайцева [19].

Лемма 3. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil). *Если H, U, V — подгруппы G, причем U нормальна в V, $H \bigcap V = \langle 1 \rangle$, а подгруппа HU ненильпотентна, то секция V/U удовлетворяет условию* Wmax-H (*слабому условию максимальности для H-инвариантных подгрупп*).

Следующая лемма, доказанная в работе [20] (лемма 3), будет использована в дальнейшем.

Лемма 4. *Пусть G — гиперцентральная группа, A — ее абелева нормальная p-подгруппа, p — простое число. Если фактор-группа $G/C_G(A)$ не включает в себя подгрупп индекса p, то $A \leq \zeta(G)$.*

Если G — группа, то через G_F будем обозначать пересечение всех подгрупп конечного индекса — *конечный резидуал группы G*. Если G — локально нильпотентная группа, удовлетворяющая условию Wmax-(non-nil), то G_F — периодическая подгруппа, а фактор-группа G/G_F минимаксна, нильпотентна и имеет конечную периодическую часть [18] (теорема 1.2).

Лемма 5. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Если фактор-группа $G/C_G(A)$ бесконечна и минимаксна,* *то ее периодическая часть конечна. В частности, $G/C_G(A)$ нильпотентна и почти без кручения.*

Доказательство. Пусть $T/C_G(A)$ — периодическая часть фактор-группы $G/C_G(A)$ и допустим, что она бесконечна. Тогда ее делимая часть $D/C_G(A)$ неединична. С другой стороны, из леммы 4 видно, что $D \leq C_G(A)$. Таким образом, $T/C_G(A)$ конечна. Из леммы 3 работы [19] получаем, что $G/C_G(A)$ включает в себя нормальную подгруппу без кручения конечного индекса. Остается напомнить, что минимаксная локально нильпотентная группа без кручения нильпотентна.

Приведем некоторые понятия теории модулей, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть D — дедекиндова область. Положим

$$\mathrm{Spec}(D) = \big\{P \mid P \text{ — максимальный идеал } D\big\}.$$

Если I — идеал D, то положим

$$A_I = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0\rangle \quad \text{для некоторого} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко видеть, что A_I — D-подмодуль A. A_I называют *I-компонентой* A. Если A совпадает со своей I-компонентой, то будем говорить, что A — *I-модуль над кольцом* D. Далее, пусть

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0\rangle\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\Omega_{I,n}(A)$ — D-подмодуль и $\Omega_{I,n}(A) \leq \Omega_{I,n+1}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, так что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Положим $\mathrm{Ass}_D(A) = \{P \in \mathrm{Spec}(D) \mid A_P \neq \langle 0\rangle\}$. Тогда $t_D(A) = \oplus_{P\in\pi} A_P$, где $\pi = \mathrm{Ass}_D(A)$ (см., например, [21]).

Пусть D — дедекиндова область, C — простой D-модуль. Тогда $C \cong R/P$ для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$. Обозначим D-инъективную оболочку C через $C_P\infty$. Модуль $C_P\infty$ называется *прюферовым P-модулем*. Как и в теории абелевых групп, можно показать, что

$$C_P\infty \cong \varinjlim\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

По построению $C_P\infty$ — P-модуль, причем $\Omega_{P,k}(C_P\infty) \cong D/P^k$ и

$$\Omega_{P,k+1}(C_P\infty)/\Omega_{P,k}(C_P\infty) \cong (D/P^{k+1})/(P/P^{k+1}) \cong D/P$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, если C — собственный D-подмодуль $C_P\infty$, то найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что $C = \Omega_{P,k}(C_P\infty)$. В самом деле, если $b \notin \Omega_{P,k}(C_P\infty)$, то $C = bD$. Отметим также, что прюферов P-модуль $C_P\infty$ монолитичен и его монолит совпадает с $\Omega_{P,1}(C_P\infty)$.

Пусть $0 \neq x \in D$. *Модуль A называется x-делимым, если $A = Ax$. Если A — x-делим для каждого $0 \neq x \in D$, то A называется D-делимым.*

Отметим, что прюферов P-модуль является D-делимым (см., например, [22], лемма 5.1). Как и в теории абелевых групп, можно показать, что если $P \in \mathrm{Spec}(D)$, A — D-делимый модуль, совпадающий со своей P-компонентой, то $A = \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, где A_λ — прюферов P-модуль для любого $\lambda \in \Lambda$.

Пусть $P \in \operatorname{Spec}(J)$ и $A = A_p$. *Подмодуль* B *называется базисным подмодулем модуля* A, *если он удовлетворяет следующим условиям*:

B_1) $B = \oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, *где* C_λ — *циклический* D-*подмодуль,* $\lambda \in \Lambda$;

B_2) $BP^n = (AP^n) \bigcap B$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$;

B_3) *фактор-модуль* A/B — *делим.*

Как и в теории абелевых групп, можно показать, что каждый P-модуль включает в себя базисный подмодуль.

Предложение 1. *Пусть* G — *гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), A — *ее нормальная элементарная абелева* p-*подгруппа для некоторого простого числа* p. *Пусть, далее, фактор-группа* $G/C_G(A)$ *бесконечна и минимаксна и* $xC_G(A)$ — *элемент бесконечного порядка из центра этой фактор-группы. Будем рассматривать* A *как* D-*модуль, где* $D = F_p\langle x\rangle$ — *групповая алгебра бесконечной циклической группы* $\langle x\rangle$ *над простым полем* F_p. *Тогда для* D-*модуля* A *имеем разложение* $A = E_1 \oplus \ldots E_n \oplus B$, *где* E_j, $1 \le j \le n$, — *прюферов* $(x-1)D$-*модуль,* B — *конечный* D-*подмодуль.*

Доказательство. Пусть $1 \ne a \in A$, $F = \langle a, x\rangle$. Поскольку G гиперцентральна, то подгруппа F нильпотентна. Из элементарных свойств нильпотентных групп получаем $\zeta(F) \cap A = \zeta(F) \cap (F \cap A) \ne \langle 1\rangle$. Другими словами, $C_A(x) \ne \langle 1\rangle$. Если рассматривать A как D-модуль, то в приведенных выше обозначениях будем иметь $\Omega_{P,1}(A) \ne \langle 0\rangle$, где $P = (x-1)D$ (как обычно, используя модульный язык, будем использовать аддитивную запись). Более того, нетрудно убедиться в том, что A — P-модуль над кольцом D. Обозначим через B базисный подмодуль A. Имеем $B = \oplus_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, где C_λ, $\lambda \in \Lambda$, — циклический D-подмодуль. Далее, $\operatorname{Ann}_D(C_\lambda) = P^n\lambda$ для некоторого $n_\lambda \in \mathbb{N}$. Положим $\Xi = \{n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ и предположим, что множество Ξ бесконечно. Пусть $n_1 \in \Xi$. Выберем числа n_2, $n_3 \in \Xi$ так, чтобы $n_1 < n_2 < n_3$. Выберем во множестве Λ такие индексы $\lambda(j)$, что $\operatorname{Ann}_D(C_{\lambda(j)}) = P^n j$, $1 \le j \le 3$. Аналогично, использовав бесконечность множества Ξ, можно выбрать индексы $\lambda(j) \in \Lambda$, $j \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\operatorname{Ann}_D(C_{\lambda(j)}) = P^n j$, $j \in \mathbb{N}$, и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Положим $B_1 = \oplus_{\lambda k\in\mathbb{N}} C_{\lambda(2k+1)}$, тогда, очевидно, подгруппа $\langle B_1, x\rangle$ ненильпотентна. Из леммы 3 получаем, что B/B_1 удовлетворяет слабому условию максимальности для $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп. С другой стороны, из выбора B_1 следует, что B/B_1 — прямое произведение бесконечного множества $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп. Нетрудно видеть, что в этом случае B/B_1 не может удовлетворять слабому условию максимальности для $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп. Полученное противоречие показывает, что множество Ξ конечно. Другими словами, $\operatorname{Ann}_D(B) = P^t$ для некоторого натурального числа t. Используя аналог теоремы Куликова об ограниченных сервантных подгруппах, справедливый для модулей над дедекиндовыми областями, получаем разложение $A = B \oplus E$, где $E \cong A/B$ — D-делимый подмодуль. Будучи делимым P-модулем, E включает в себя прюферов P-подмодуль E_1. Из определения следует, что подгруппа $\langle E_1, x\rangle$ ненильпотентна. Тогда из леммы 3 получаем, что A/E_1 удовлетворяет слабому условию максимальности для $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп. Положим $L/E_1 = \Omega_{P,1}(A/E_1)$, тогда L/E_1 — прямая сумма простых D-модулей. Нетрудно убедиться в том, что число прямых слагаемых в этом разложении должно быть конечным. Отсюда следует, что A/E_1 — артинов D-модуль (см., например, [22], лемма 5.6). Поскольку E_1 — артинов D-подмодуль, весь модуль A будет артиновым над D. Утверждение леммы вытекает теперь из теоремы о строении артиновых модулей над дедекиндовыми областями (см., например, [22], теорема 5.7).

***Следствие* 1.** *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Если фактор-группа $G/C_G(A)$ бесконечна и минимаксна, то она почти абелева.*

Доказательство. Пусть $xC_G(A)$ — элемент бесконечного порядка из центра этой фактор-группы $G/C_G(A)$. Существование такого элемента вытекает из леммы 5. Будем рассматривать A как D-модуль, где $D = F_p\langle x\rangle$ — групповая алгебра бесконечной циклической группы $\langle x\rangle$ над простым полем F_p. Тогда из предложения 2 получаем разложение $A = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus B$, где E_j, $1 \leq j \leq n$, — прюферов $(x-1)D$-модуль, B — конечный D-подмодуль. Поскольку $xC_G(A) \in \zeta\big(G/C_G(A)\big)$ и $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ — D-делимая часть A, то E — G-инвариантная подгруппа. По той же причине и $B = \Omega_{P,1}(A)$ также G-инвариантна, где $P = (x-1)D$. Из конечности B следует конечность фактор-группы $G/C_G(B)$. Поскольку $A = E + B$, то $C_G(A) = C_G(B) \cap C_G(E)$. Обозначим через R кольцо эндоморфизмов прюферова P-модуля, тогда $G/C_G(A)$ изоморфна подгруппе $GL_n(R)$. Поскольку R — область целостности [23], то для R существует поле частных F и $\mathrm{char}\, F = p$. Из леммы 5 вытекает нильпотентность $H = G/C_G(A)$. Согласно теореме А. И. Мальцева (см., например, [24], теорема 3.6) H включает в себя такую нормальную подгруппу S конечного индекса, что $g^{-1}Sg \leq T_n(F_1)$ для некоторого конечного расширения F_1 поля F и некоторого элемента $g \in GL_n(F_1)$. Положим $U = (g^{-1}Sg) \cap UT_n(F_1)$, $V = gUg^{-1}$, тогда V нормальна в S. Поскольку $\mathrm{char}\, F_1 = \mathrm{char}\, F = p$, то $UT_n(F_1)$ — ограниченная нильпотентная p-подгруппа. Далее,

$$T_n(F_1)/UT_n(F_1) \cong U(F_1) \times \ldots \times U(F_1),$$

а потому S является расширением ограниченной p-подгруппы с помощью абелевой группы. Принимая во внимание лемму 5, получаем, что $G/C_G(A)$ почти абелева.

***Следствие* 2.** *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Пусть, далее, фактор-группа $G/C_G\big(\Omega_1(A)\big)$ бесконечна и минимаксна и $xC_G\big(\Omega_1(A)\big)$ — элемент бесконечного порядка из центра этой фактор-группы. Будем рассматривать A как $Z\langle x\rangle$-модуль. Тогда A имеет конечный ряд таких $Z\langle x\rangle$-модулей*

$$\langle 0\rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n \leq A_{n+1} = A,$$

что A_{j+1}/A_j — элементарная абелева p-подгруппа (т. е. A_{j+1}/A_j — $F_p\langle x\rangle$-модуль) и A_{j+1}/A_j, $0 \leq j \leq n-1$, — прюферов $(x-1)F_p\langle x\rangle$-модуль, A/A_n — черниковская группа.

Доказательство. Из предложения 1 следует, что $F_p\langle x\rangle$-модуль $\Omega_1(A)$ включает в себя прюферов $(x-1)F_p\langle x\rangle$-подмодуль A_1. Из определения прюферова модуля получаем, что подгруппа $\langle A_1, x\rangle$ ненильпотентна. Согласно лемме 3 A/A_1 удовлетворяет слабому условию максимальности для $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп. Положим $B/A_1 = \Omega_1(A/A_1)$. Если B/A_1 конечна, то A/A_1 черниковская, и все доказано. Поэтому предположим, что B/A_1 бесконечна. Если допустить, что $x^k \in C_G(B/A_1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то в этом случае нетрудно получить, что

B/A_1 включает в себя прямое произведение бесконечного множества конечных $\langle x\rangle$-инвариантных подгрупп. Однако тогда B/A_1 не может удовлетворять условию Wmax-$\langle x\rangle$. Полученное противоречие показывает, что $x^n \notin C_G(B/A_1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из леммы 1 и предложения 1 получаем, что $F_p\langle x\rangle$-модуль B/A_1 включает в себя прюферов $(x-1)F_p\langle x\rangle$-подмодуль A_2/A_1. Используя аналогичные рассуждения и принимая во внимание тот факт, что A/A_1 удовлетворяет условию Wmax-$\langle x\rangle$, через конечное число шагов построим указанный ряд.

Пусть A — бесконечная абелева группа, $G \le \mathrm{Aut}(A)$. Будем говорить, что A G-квазиконечна, если любая собственная G-инвариантная подгруппа A конечна.

Лемма 6. *Пусть G — группа, A, B — ее нормальные подгруппы, причем выполняются следующие условия*:

1) $B \le A$ *и* A *абелева*;

2) $G/C_G(A)$ *нильпотентна*;

3) *центр группы* G *включает в себя* B;

4) A/B G-*квазиконечна и* $A/B = [A/B, G]$.

Тогда A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу D, что $D = [D, G]$, D G-квазиконечна, $A = BD$ и $B \bigcap D$ конечна.

Это утверждение доказывается дословным повторением доказательства леммы 4.14 из работы [14].

***Следствие* 1.** *Пусть G — группа, A — ее нормальная черниковская делимая подгруппа. Если никакой гиперцентр G, имеющий конечный номер, не включает в себя A, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу D, что $D = [D, G]$ и D G-квазиконечна.*

Доказательство. Поскольку A — черниковская группа, то она имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп

$$\langle 1\rangle = B_0 \le B_1 \le \ldots \le B_{m+1} = B,$$

каждый фактор которого G-квазиконечен. В частности, для любого j, $0 \le j \le m-1$, либо $[B_{j+1}/B_j, G] = B_{j+1}/B_j$, либо $[B_{j+1}/B_j, G]$ конечна. Пусть t — наименьший номер, для которого фактор $[B_{t+1}/B_t, G] = B_{t+1}/B_t$. Тогда остается применить достаточное число раз лемму 9 к подгруппе B_{t+1}.

***Следствие* 2.** *Пусть G — группа A, B — ее нормальные подгруппы, причем выполняются следующие условия*:

1) $B \le A$;

2) $G/C_G(A)$ *нильпотентна*;

3) *центр группы* G *включает в себя* B;

4) A/B G-*квазиконечна, делима и* $A/B = [A/B, G]$.

Тогда A включает в себя такую G-инвариантную делимую подгруппу D, что $D = [D, G]$, D G-квазиконечна, $A = BD$ и $B \bigcap D$ конечна.

Доказательство. Поскольку A/B делима, нетрудно получить, что A абелева. Теперь можно применить лемму 9.

***Следствие* 3.** *Пусть G — группа, A, B — ее нормальные подгруппы, причем выполняются следующие условия*:

1) $B \le A$;

2) $G/C_G(A)$ *нильпотентна*;

3) *гиперцентр группы* G *с натуральным номером включает в себя* B;

4) *A/B G-квазиконечна, делима и $A/B = [A/B, G]$.*
Тогда A включает в себя такую G-инвариантную делимую подгруппу D, что $D = [D, G]$, D G-квазиконечна, $A = BD$ и $B \bigcap D$ конечна.

***Следствие* 4.** *Пусть G — группа, A, B — ее нормальные подгруппы, причем выполняются следующие условия*:

1) $B \leq A$;
2) *G/B гиперцентральна*;
3) *гиперцентр группы G включает в себя B*;
4) *A/B G-квазиконечна, элементарная абелева и $A/B = [A/B, G]$.*

Тогда A включает в себя такую G-инвариантную элементарную абелеву подгруппу D, что $D = [D, G]$, D G-квазиконечна, $A = BD$ и $B \bigcap D$ конечна.

Доказательство. Покажем, что A абелева, тогда утверждение будет вытекать из леммы 9. Предположим, что A неабелева, $A \neq C = \zeta(A)$. Пусть $C \neq aC \in \in \zeta(G/C) \bigcap A/C$. Рассмотрим отображение $\phi : A \to A$, $\phi(x) = [a, x]$, $x \in A$. Для любых $x, y \in A$ имеем $\phi(xy) = [a, xy] = [a, y][a, x]^y = [a, x][a, y] = \phi(x)\phi(y)$, так что ϕ — эндоморфизм A. Если $g \in G$, $x \in A$, то $a^g = ac$, где $c \in C$ и

$$\phi(x)^g = [a, x]^g = [a^g, x^g] = [ac, x^g] = [a, x^g]^c[c, x^g] = [a, x^g] = \phi(x^g).$$

Другими словами, ϕ — G-эндоморфизм. Это означает, что подгруппы $\mathrm{Im}\,\phi$ и $\mathrm{Ker}\,\phi$ G-инвариантны. Имеем $D = \mathrm{Im}\,\phi \cong A/\mathrm{Ker}\,\phi$, и, поскольку $C \leq \mathrm{Ker}\,\phi$, D — G-инвариантная элементарная абелева подгруппа A. Более того, D G-квазиконечна. Отсюда получаем, что $B \bigcap D$ конечна. Но тогда BD/B бесконечна, а значит, $BD/B = A/B$ или $A = BD$. Поскольку D абелева, а $B \leq \zeta(G)$, то A абелева.

***Следствие* 5.** *Пусть G — группа, A, B — ее нормальные подгруппы, причем выполняются следующие условия*:

1) $B \leq A$;
2) *G/B гиперцентральна*;
3) *гиперцентр группы G с натуральным номером включает в себя B*;
4) *A/B G-квазиконечна, элементарная абелева и $A/B = [A/B, G]$.*

Тогда A включает в себя такую G-инвариантную элементарную абелеву подгруппу D, что $D = [D, G]$, D G-квазиконечна, $A = BD$ и $B \bigcap D$ конечна.

Лемма 7. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент группы G. Пусть, далее, $A_0 = A$, $A_{n+1} = [A_n, g]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такой номер m, что $A_{m+1} = A_m$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $A_{n+1} \neq A_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Положим $A_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Поскольку последующие рассмотрения будут проводиться в фактор-группе A/A_ω, то без ограничения общности можно допустить, что $A_\omega = \langle 1 \rangle$.

Пусть $1 \neq d_1 \in A$, $D_1 = \langle d_1 \rangle^{\langle g \rangle}$. Так как группа G локально нильпотентна, подгруппа $\langle g, d_1 \rangle$ конечно порождена и нильпотентна. В частности, ее периодическая часть конечна. Далее, так как она включает в себя D_1, то D_1 конечна. Теперь из равенства $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 1 \rangle$ следует существование такого номера $m(1)$, что $D_1 \bigcap A_{m(1)} = \langle 1 \rangle$. Из нильпотентности подгруппы $\langle g, d_1 \rangle = \langle g, D_1 \rangle$ получаем существование такого натурального числа $c(1)$, что $[D_1, g, \ldots, g] = [D_1, {}_{c(1)}, g] = \langle 1 \rangle$. Если допустить, что существует натуральное число r, для которого $[A_{m(1),r}, g] =$

$= \langle 1 \rangle$, то $A_{m(1)+r} = \langle 1 \rangle$. Однако это противоречит условию. Следовательно, найдутся элемент $1 \neq d_2 \in A_{m(1)}$ и номер $c(2) > c(1)$ такие, что $[d_{2,c(2)}, g] = 1$, но $[d_{2,c(2)-1}, g] \neq 1$. Положим $D_2 = \langle d_2 \rangle^{\langle g \rangle}$. Тогда D_2 конечна, а из включения $D_2 \leq A_{m(1)}$ следует равенство $D_1 \bigcap D_2 = \langle 1 \rangle$. Подгруппа $D_1 D_2$ конечна, поэтому найдется такой номер $m(2)$, что $D_1 D_2 \bigcap A_{m(2)} = \langle 1 \rangle$. Использовав аналогичные рассуждения, построим бесконечное семейство конечных $\langle g \rangle$-инвариантных подгрупп $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и бесконечное семейство натуральных чисел $\{c(n) \mid n \in \in \mathbb{N}\}$, которые удовлетворяют следующим условиям: $\langle D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = X_{n \in \mathbb{N}} D_n$; $[D_{n,c(n)}, g] = \langle 1 \rangle$, но $[D_{n,c(n)-1}, g] \neq \langle 1 \rangle$; $c(k) < c(j)$ при $k < j$. В частности, подгруппа $\langle g, D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ не может быть нильпотентной. С другой стороны, в силу следствия 2.8 из работы [18] подгруппа $\langle g, D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ нильпотентна. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 8. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент бесконечного порядка группы G. Если $A = [A, g]$ и индекс $\left|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\right|$ конечен, то подгруппа $C_A(g)$ не может включать в себя делимых подгрупп.*

Доказательство. Поскольку $\left|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\right|$ конечен, то $\langle x, \Omega_1(A) \rangle$ нильпотентна для любого $x \in G$ (см., например, [20], лемма 6.34). Пусть D — делимая подгруппа $C_A(g) = C_1$. Из равенства $A = [A, g]$ следует, что отображение ϕ : $a \to [a, g]$, $a \in A$, является эпиморфизмом с ядром C_1. Положим $D = D_1$. Пусть теперь D_2 — полный прообраз D_1 относительно ϕ, и, вообще, D_{n+1} — полный прообраз D_n относительно ϕ при любом $n \geq 2$. В частности, $D_2/D_1 \cong D_1$, поэтому и D_2 делима. С помощью простой индукции убеждаемся, что D_n делима при любом $n \in \mathbb{N}$. Из элементарных свойств делимых подгрупп (см., например, [21], теорема 21.2) получаем разложение $D_2 = D_1 \times K_2$, где подгруппа K_2 также делима. Тогда из равенства $D_1 = [D_2, g]$ находим $D_1 = [K_2, g]$. Если $d_1 \in \Omega_1(D_1)$, то найдется элемент $d_2 \in K_2$ со свойством $d_1 = [d_2, g]$. Предположим, что $d_2^p \neq 1$. Тогда $1 = d_1^p = [d_2, g]^p = [d_2^p, g]$. Другими словами, $1 \neq d_2^p \in C_A(g) \bigcap D_2 = D_1$. Однако $D_2^p \in K_2$. Полученное противоречие показывает, что $|d_2| = p$. С помощью аналогичных рассуждений можно выбрать бесконечное семейство элементов $\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих следующим условиям: $\langle d_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = X_{n \in \mathbb{N}} \langle d_n \rangle$, $|d_n| = p$, $1 = [d_1, g]$, $d_n = [d_{n+1}, g]$, $n \in \mathbb{N}$. Но, очевидно, $\langle g, d_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \leq \langle \Omega_1(A), g \rangle$ не является нильпотентной. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 1. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент бесконечного порядка группы G, A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент бесконечного порядка группы G. Если $A = [A, g]$ и индекс $\left|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\right|$ конечен, то подгруппа $C_A(g)$ ограничена.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $C = C_A(g)$ не является ограниченной. Обозначим через B ее базисную подгруппу. Если $B \neq C$, то C/B — делимая группа. Поскольку $B \leq C_A(g)$, то B — $\langle g \rangle$-инвариантна. Тогда из доказательства леммы 6 следует, что $\Omega_1(A/B)$ включает в себя такую подгруппу $D/B = \langle d_n B \mid n \in \mathbb{N} \rangle$, что $[d_1 B, g] = 1$, $d_n B = [d_{n+1} B, g]$, $n \in \mathbb{N}$. В частности,

D/B — $\langle g\rangle$-квазиконечна. Из леммы 6 получаем, что D включает в себя элементарную абелеву $\langle g\rangle$-квазиконечную подгруппу E. В частности, подгруппа $\langle g, E\rangle$ ненильпотентна, что противоречит условию. Таким образом, $B = C$. Поскольку C не является ограниченной, она включает в себя подгруппу $L = X_{n\in\mathbb{N}}\langle c_n\rangle$, где $|c_n| = p^n$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $U = \big\langle c_n(c_{n+1})^{-p} \mid n \in \mathbb{N}\big\rangle$, тогда L/U — квазициклическая p-группа. Итак, снова приходим к рассмотренному выше случаю.

Полученное противоречие показывает, что $C_A(g)$ — ограниченная подгруппа.

***Следствие* 2.** *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент бесконечного порядка группы G. Предположим также, что $A = [A, g]$ и индекс $\big|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\big|$ конечен. Если B — такая $\langle g\rangle$-инвариантная подгруппа, что $\langle B, g\rangle$ нильпотентна, то B ограничена.*

Доказательство. Пусть

$$\langle 1\rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots \le C_n \le C_{n+1} \le \ldots \le C_\omega = A$$

— верхний $\langle g\rangle$-центральный ряд A. Из равенства $A = [A, g]$ следует, что $C_n = [C_{n+1}, g]$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $C_{n+1}/C_1 \cong C_n$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь из следствия 1 леммы 8 получаем, что C_n — ограниченная подгруппа при любом $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\langle 1\rangle = B_0 \le B_1 \le \ldots \le B_m = B$$

— верхний $\langle g\rangle$-центральный ряд B. Очевидно, $B_n \le C_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, в частности $B = B_m \le C_m$. Это и показывает, что B — ограниченная подгруппа.

Лемма 9. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil). *Если G ненильпотентна и периодическая, то она черниковская.*

Доказательство. Допустим, что G не является черниковской. Предположим сначала, что для любого простого числа $p \in \Pi(G)$ силовская p-подгруппа G является нильпотентной. Из этого допущения следует, что множество $\Pi(G)$ бесконечно и ступени нильпотентности силовских p-подгрупп G не ограничены. В этом случае найдется такое бесконечное подмножество $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi(G)$, что силовская p_n-подгруппа G включает в себя конечную подгруппу K_n, ступень нильпотентности которой не меньше n для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $D = X_{n\in\mathbb{N}}K_n$. Выберем во множестве $\mathbb{N}$ такую бесконечную возрастающую цепочку подмножеств

$$\Delta(1) \subset \Delta(2) \subset \ldots \Delta(k) \subset \ldots,$$

что $\Delta(k+1)\backslash\Delta(k)$ бесконечно при любом $k \in \mathbb{N}$. Пусть $D_k = X_{n\in\Delta(k)}K_n$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда получаем бесконечную строго возрастающую цепочку

$$D_1 \le D_2 \le \ldots \le D_k \le \ldots$$

таких ненильпотентных подгрупп, что D_{k+1}/D_k бесконечна при любом $k \in \mathbb{N}$. Однако это противоречит тому факту, что G удовлетворяет условию Wmax-(non-nil). Полученное противоречие показывает, что найдется $p \in \Pi(G)$ такое, что силовская p-подгруппа P группы G ненильпотентна. Пусть R — конечный резидуал G. Из теоремы 2.2 работы [9] следует, что фактор-группа $P/(P \bigcap R)$ конечна. Тогда из леммы 2 получаем, что G/P черниковская, а это, в свою очередь, влечет конечность фактор-группы G/R. В этом случае R не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса. Будучи гиперцентральной, R, согласно теореме С. Н. Черникова (см., например, [20], теорема 9.24), является делимой абелевой группой, а потому разлагается в прямое произведение квазициклических подгрупп (см., например, [21], теорема 23.1). Из принятого допущения следует, что R не является черниковской. Пусть F — конечная подгруппа со свойством $G = FR$. Пересечение $F \bigcap R$ конечно, а потому входит в конечную G-инвариантную подгруппу S из R. Но тогда R/S не является черниковской. Не ограничивая общности, можно допустить, что $F \bigcap R = \langle 1 \rangle$. Пусть x — произвольный элемент R. Выберем в R квазициклическую подгруппу C, содержащую x, и положим $L = C^G$. Из конечности G/R следует, что L черниковская. Если допустить, что LF ненильпотентна, то из леммы 3 вытекает, что R/L удовлетворяет условию Wmax-F. Конечность F влечет, что R/L, а значит, и R, будет черниковской, что противоречит допущению. Итак, LF нильпотентна. Но тогда $L \leq \zeta(LF)$ (см., например, [22], теорема 3.14), т. е. $x \in \zeta(G)$. Другими словами, $R \leq \zeta(G)$. В частности, G нильпотентна. Это противоречие показывает, что G черниковская.

Следствие. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil). *Если G ненильпотентна и неминимаксна, то ее периодическая часть T нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что T ненильпотентна. Тогда и вся группа G ненильпотентна, и, как только что было отмечено, в этом случае G/T минимаксна. Из леммы 9 получаем, что T является черниковской. Другими словами, вся группа G минимаксна. Полученное противоречие показывает, что T нильпотентна.

Лемма 10. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент группы G. Если $A = [A, g]$ и $g^m \in C_G(A)$ для некоторого натурального m, то A — черниковская подгруппа.*

Доказательство. Поскольку $A = [A, g]$, то $\langle A, g \rangle$ ненильпотентна. Положим $\langle x \rangle = \langle g^m \rangle$, тогда $x \in \zeta(\langle g, A \rangle)$ и $\langle g, A \rangle / \langle x \rangle$ периодическая. Осталось применить леммы 1 и 9.

Лемма 11. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент бесконечного порядка группы G. Если $A = [A, g]$ и индекс $\big|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\big|$ конечен, то A — черниковская подгруппа.*

Доказательство. Предположим, что A не является черниковской подгруппой. Это означает, что подгруппа $\Omega_1(A)$ бесконечна. Положим $C_1 = C_A(g)$. В силу следствия 1 леммы 8 C_1 — ограниченная подгруппа. Пусть $1 \neq d_1 \in \Omega_1(A)$. Найдется элемент $b_1 \in A$ со свойством $[b_1, g] = d_1$. Поскольку группа G локально нильпотентна, подгруппа $\langle g, b_1 \rangle$ конечно порождена и нильпотентна. В частности, ее периодическая часть D_1 конечна. Обозначим через B_1 максимальную подгруппу C_1, для которой $B_1 \bigcap D_1 = \langle 1 \rangle$. Из конечности D_1 и ограниченности C_1 следует, что C_1/B_1 конечна. Очевидно, что подгруппа B_1 $\langle g \rangle$-инвариантна. Обозначим через M $\langle g \rangle$-инвариантную подгруппу A, максимальную по свойствам $B_1 \leq M$ и $M \bigcap D_1 = \langle 1 \rangle$. Положим $C_2/M = C_{A/M}(g)$. Если X/M — неединичная подгруппа C_2/M, то включение $[C_2, g] \leq M$ влечет $[X, g] \leq M \leq X$, которое означает, что X $\langle g \rangle$-инвариантна. Вследствие выбора M каждая неединичная подгруппа C_2/M имеет неединичное пересечение с D_1. Поэтому, будучи ограниченной в силу следствия 2 леммы 8, C_2/M конечна. Пусть теперь $E/M = \Omega_1(A/M)$. Если g^n централизует E/M для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то из конечности C_2/M нетрудно получить, что E/M конечна. В этом случае A/M будет черниковской группой. Предположим теперь, что $g^n \notin C_G(E/M)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Из следствия 2 предложения 1 получаем, что A/M включает в себя $\langle g \rangle$-инвариантную ограниченную подгруппу S/M, для которой A/S — делимая черниковская группа. Предположим, что $\langle M, g \rangle$ нильпотентна. Из следствия 2 леммы 8 получаем, что M — ограниченная подгруппа и, в частности, S ограничена. Но тогда абелева подгруппа A включает в себя делимую черниковскую подгруппу Q, причем $A = QS$. Очевидно, Q $\langle g \rangle$-инвариантна. Поскольку индекс $\big|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\big|$ конечен, то $\big\langle \Omega_1(A), g \big\rangle$ нильпотентна (см., например, [25], лемма 6.34). Отсюда нетрудно получить нильпотентность $\big\langle \Omega_n(A), g \big\rangle$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Из того факта, что S ограничена, следует существование такого $m \in \mathbb{N}$, что $S \leq \Omega_m(A)$. Но тогда и подгруппа $\langle S, g \rangle$ нильпотентна. В свою очередь это влечет нильпотентность $\langle A/Q, gQ \rangle$. Учитывая равенство $A = [A, g]$, отсюда получаем включение $S \leq Q$, которое свидетельствует о том, что A — черниковская подгруппа. Полученное противоречие показывает, что $\langle M, g \rangle$ ненильпотентна. Тогда в подгруппе M найдется элемент b_2 такой, что $[b_2, g] \neq 1$, но $[b_2, g, g] = 1$. С помощью приводимых выше аргументов найдем такую $\langle g \rangle$-инвариантную подгруппу B_2, что $\langle B_2, g \rangle$ ненильпотентна и $B_2 \bigcap D_1 D_2 = \langle 1 \rangle$, где $D_2 = \langle b_2 \rangle^{\langle g \rangle}$. Использовав аналогичные рассуждения, построим такое бесконечное семейство конечных $\langle g \rangle$-инвариантных подгрупп $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, что $\langle D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = X_{n \in \mathbb{N}} D_n$; $[D_{n,n}, g] = \langle 1 \rangle$, но $[D_{n,n-1}, g] \neq \langle 1 \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, подгруппа $\langle g, D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ не может быть нильпотентной. С другой стороны, в силу следствия 2.8 из работы [18] подгруппа $\langle g, D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ нильпотентна. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Следствие. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, g — элемент группы G. Если $g^m \in C_G\big(\Omega_1(A)\big)$ для некоторого натурального m, то либо A — черниковская подгруппа, либо $\langle A, g \rangle$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $A_0 = A$, $A_{n+1} = [A_n, g]$, $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 7 найдется номер m такой, что $D = A_{m+1} = A_m$. В частности, $D = [D, g]$. Если $D = \langle 1 \rangle$, то $\langle A, g \rangle$ нильпотентна. Предположим теперь, что $D \neq \langle 1 \rangle$. Из лемм 10, 11 получаем, что D — черниковская подгруппа. Предположим, что A не является черниковской. Это означает, что подгруппа $\Omega_1(A)$ бесконечна. Из элементарных свойств делимых подгрупп (см., например, [26], теорема 21.2) получаем разложение $A = C \times D$. Отсюда вытекает равенство $\Omega_1(A) = \Omega_1(C) \times \Omega_1(D)$, которое вследствие конечности $\big|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\big|$ влечет конечность $\big|G : C_G\big(\Omega_1(A/D)\big)\big|$. Учитывая бесконечность $\Omega_1(A/D)$, получаем, что $\Omega_1(A/D)$ не может удовлетворять условию Wmax-$\langle g \rangle$. С другой стороны, равенство $D = [D, g]$ показывает, что $\langle D, g \rangle$ ненильпотентна. Но тогда, в силу леммы 3, A/D удовлетворяет условию Wmax-$\langle g \rangle$. Полученное противоречие и доказывает следствие.

Лемма 12. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Предположим, что $A \leq \zeta(T)$, где T — периодическая часть группы G. Если $\langle A, g \rangle$ нильпотентна для любого $g \in G$, то некоторый гиперцентр G, имеющий конечный номер, включает в себя A.*

Доказательство. Если вся группа G нильпотентна, то доказывать нечего. Поэтому будем предполагать, что G ненильпотентна. Тогда из теоремы 1.2 работы [18] вытекает, что G/T нильпотентна и минимаксна. Из леммы 4.4 работы [18] следует, что G/T включает в себя конечнопорожденную подгруппу F/T, которая соединена с G/T конечным субнормальным рядом, факторы которого делимы и периодические. Пусть K — конечнопорожденная подгруппа G со свойством $F = KT$. Тогда из условия получаем, что $\langle A, K\rangle$ нильпотентна, т. е. имеет конечный K-центральный ряд. Из леммы 4 следует, что этот ряд будет и G-центральным.

Следствие 1. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Предположим, что $A \leq \zeta(T)$, где T — периодическая часть группы G. Если индекс $\left|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\right|$ конечен, то либо A — черниковская подгруппа, либо некоторый гиперцентр G, имеющий конечный номер, включает в себя A.*

Доказательство. Если $\langle A, g\rangle$ ненильпотентна для некоторого $g \in G$, то из следствия леммы 11 вытекает, что A черниковская. Если же $\langle A, g\rangle$ нильпотентна для любого $g \in G$, то применим лемму 12.

Следствие 2. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Предположим, что $A \leq \zeta(T)$, где T — периодическая часть группы G. Тогда либо некоторый гиперцентр G, имеющий конечный номер, включает в себя A, либо A — черниковская группа, либо найдется элемент x бесконечного порядка такой, что $xC_G\big(\Omega_1(A)\big) \in \zeta\big(G/C_G\big(\Omega_1(A)\big)\big)$ и A имеет конечный ряд таких $Z\langle x\rangle$-модулей*

$$\langle 0\rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n \leq A_{n+1} = A,$$

что A_{j+1}/A_j — элементарная абелева p-подгруппа (т. е. A_{j+1}/A_j — $F_p\langle x\rangle$-модуль) и A_{j+1}/A_j, $0 \leq j \leq n-1$, — прюферов $(x-1)F_p\langle x\rangle$-модуль, A/A_n — черниковская группа.

Доказательство. Если индекс $\left|G : C_G\big(\Omega_1(A)\big)\right|$ конечен, то применим следствие 1 леммы 12. Если же подгруппа $G/C_G\big(\Omega_1(A)\big)$ бесконечна, то применим следствие 2 предложения 1.

Следствие 3. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *A — ее нормальная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. Предположим, что $A \leq \zeta(T)$, где T — периодическая часть группы G. Если никакой гиперцентр G, имеющий конечный номер, не включает в себя A, то A имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп, все факторы которого, кроме последнего, G-квазиконечны, а последний фактор конечен.*

Доказательство. В самом деле, из следствия 2 леммы 12 получаем, что A черниковская, либо A удовлетворяет условию Min-$\langle x\rangle$ для некоторого элемента $x \in G$. Если A черниковская, то из следствия 1 леммы 6 получаем, что либо A включает в себя такую G-инвариантную делимую подгруппу D, что $D = [D, G]$ и D G-квазиконечна. Осталось использовать лемму 3. Если A не черниковская, то A удовлетворяет условию Min-G, и, используя следствия 2 леммы 12, получаем требуемый результат.

Лемма 13. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *T — периодическая часть группы G. Если G ненильпотентна и* *непериодическая, D — ее нормальная абелева подгруппа, которая G-квазиконечна, и $[D, G] = D$, то $D \leq \zeta(T)$.*

Доказательство. Пусть T — периодическая часть группы G. Из следствия леммы 9 получаем, что T нильпотентна. Подгруппа D либо делимая черниковская, либо элементарная абелева. В первом случае включение $D \leq \zeta(T)$ следует, например, из теоремы 3.14 из [22]. Пусть теперь D элементарная абелева. Тогда, очевидно, $D \leq \zeta(G_F)$. Теперь из конечности T/G_F нетрудно получить, что $D \bigcap \zeta(T)$ бесконечна, а потому $D \bigcap \zeta(T) = D$, т. е. $D \leq \zeta(T)$.

Лемма 14. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil). *Если G ненильпотентна и непериодическая, то G включает в себя нормальную абелеву подгруппу D, которая G-квазиконечна, и $[D, G] = D$.*

Доказательство. Пусть T — периодическая часть группы G. Из следствия леммы 9 получаем, что T нильпотентна. Пусть

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_n = T$$

— центральный ряд T, факторы которого являются примарными. Поскольку G ненильпотентна, найдется такой наименьший номер m, что Z_m не входит ни в какой гиперцентр G с конечным номером. Из следствия 3 леммы 12 получаем, что Z_m включает в себя такую G-инвариантную подгруппу $V \geq Z_{m-1}$, что V/Z_{m-1} G-квазиконечна и $\left[V/Z_{m-1}, G/Z_{m-1}\right] = V/Z_{m-1}$. Из следствий 3, 5 леммы 6 получаем, что T включает в себя такую G-инвариантную подгруппу D, что $D = [D, G]$ и D G-квазиконечна.

Следствие. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil), *T — периодическая часть группы G. Если G ненильпотентна и непериодическая, то T имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп, все факторы которого, кроме последнего, G-квазиконечны и центральны в T, а последний фактор конечен.*

Доказательство. Применяя лемму 14, получаем, что T имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп

$$\langle 1 \rangle = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_k = H,$$

факторы которого G-квазиконечны и нецентральны в G, а G/H нильпотентна. Из леммы 13 следует, что факторы этого ряда центральны в T. Теперь из леммы 3 можно получить, что T/H черниковская, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Лемма 15. *Пусть G — локально нильпотентная группа, T — ее нормальная подгруппа. Предположим также, что T имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп, все факторы которого центральны в T и либо являются элементарными абелевыми, либо делимыми черниковскими. Тогда T включает в себя такие G-инвариантные подгруппы D, B, что D — делимая черниковская группа, B — ограниченная подгруппа и $T = DB$.*

Доказательство. Пусть сначала U, V — такие G-инвариантные подгруппы T, что $V \leq U$, $V \leq \zeta(T)$, V — ограниченная подгруппа и U/V делимая черниковская. Пусть, далее, g — произвольный элемент U. Для любого $x \in U$ имеем $[g, x] \in V$. Включение $V \leq \zeta(T)$ показывает, что $[g^n, x] = [g, x]^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется число m такое, что $g^m \in V$, так что $1 = [g^m, x] = [g, x]^m$. Другими словами, $[g, U]$ — ограниченная подгруппа. Изоморфизм $[g, U] \cong U/C_U(g)$ вместе с включением $V \leq C_U(g)$ и делимостью U/V приводит к равенству $U = C_U(g)$. Поскольку оно справедливо для любого элемента группы U, то U — абелева. В этом случае $U = VW$, где W — делимая черниковская подгруппа.

Рассмотрим теперь противоположный случай. Пусть U, V — такие G-инвариантные подгруппы T, что $V \leq U$, $V \leq \zeta(T)$, V — делимая черниковская подгруппа и U/V — абелева и ограниченная делимая черниковская группа. Тогда найдется число m такое, что $g^m \in V$ для любого $g \in U$, так что $1 = [g^m, x] = [g, x]^m$ для любого $x \in U$. Иначе говоря, $[g, U]^m = \langle 1 \rangle$. Поскольку это справедливо для любого элемента группы U, то $[U, U]^m = \langle 1 \rangle$. Включение $[U, U] \leq U$ доказывает конечность $[U, U]$. Фактор-группа $U/[U, U]$ будет прямым произведением $V[U, U]/[U, U]$ и некоторой ограниченной подгруппы $W/[U, U]$. Итак, снова $U = VW$, где W — ограниченная подгруппа. Очевидно, W^G также ограничена.

Используя теперь простую индукцию, получаем, что T включает в себя такие G-инвариантные подгруппы D, R, что D — делимая черниковская группа, R — ограниченная подгруппа и $T = DR$. Очевидно, D является G-инвариантной. Из нильпотентности подгруппы T нетрудно получить, что $B = R^G$ — ограниченная подгруппа.

Лемма доказана.

Теперь можно привести основной результат работы.

Теорема. *Пусть G — гиперцентральная группа, удовлетворяющая условию* Wmax-(non-nil). *Предположим, что G ненильпотентна и неминимаксна. Тогда G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что $G/F \leq M \times L$, где M — гиперцентральная минимаксная группа, а L удовлетворяет следующим условиям*:

i) *L гиперцентральна, ненильпотентна, неминимаксна и удовлетворяет условию* Wmax-(non-nil);

ii) *периодическая часть P группы L имеет такой центральный ряд из L-инвариантных подгрупп*

$$\langle 1 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_n = P,$$

что факторы A_{j+1}/A_j, $0 \leq j \leq n-2$, элементарные абелевы и P-квазиконечны, A_n/A_{n-1} конечен, в частности, P — ограниченная нильпотентная подгруппа;

iii) *L/P почти абелева и минимаксна.*

Доказательство. Пусть T — периодическая часть G. Из следствия леммы 14 вытекает, что T имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп, все факторы которого, кроме последнего, бесконечны, центральны в T и G-квазиконечны. Отметим, что хотя бы один из бесконечных факторов этого ряда является элементарным абелевым, так как иначе G была бы минимаксной. Из леммы 15 получаем, что T включает в себя такие G-инвариантные подгруппы D, B, что D — делимая черниковская группа, B — ограниченная подгруппа и $T = DB$. Выберем теперь в G нормальную подгруппу U, максимальную относительно свойств $D \leq U$ и $U \cap T = D$. Тогда имеем $U/D = U/(U \cap T) \cong UT/T$, так что U/D минимаксна, а значит, и U минимаксна. Положим $M = G/B$, $L = G/U$ и $F = B \cap U$. Очевидно, F конечна, M минимаксна. Из теоремы Рэмака получаем вложение $G/F \leq G/B \times G/D = M \times L$. Далее, группа L гиперцентральна, ненильпотентна, неминимаксна и удовлетворяет условию Wmax-(non-nil), поскольку она имеет хотя бы один элементарный абелев G-квазиконечный фактор. Ее периодическая часть P совпадает с T/U, а потому ограничена. Из приведенного выше заключения относительно T получаем, что P удовлетворяет условию ii).

Наконец, пусть

$$\langle 1 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_n = P$$

— центральный ряд P, составленный из L-инвариантных подгрупп, в котором факторы A_{j+1}/A_j, $0 \leq j \leq n-2$, элементарные абелевы и L-квазиконечны. Поскольку $C_L(A_{j+1}/A_j) \geq P$, из леммы 5 и следствия 1 предложения 1 вытекает, что $G/C_L(A_{j+1}/A_j)$, $0 \leq j \leq n-2$, почти абелева и минимаксна. Положим $V = \bigcap_{0 \leq j \leq n-2} C_L(A_{j+1}/A_j)$, тогда, в силу теоремы Рэмака, G/V почти абелева и минимаксна. Так как факторы A_{j+1}/A_j, $0 \leq j \leq n-2$, центральны в P, то $P \leq V$. Далее, $C_L(A_{n-1}) \leq V$ и $V/C_L(A_{n-1})$ — нильпотентная ограниченная группа (см., например, [29], теорема 1.C.1 и предложение 1.C.3). Подгруппа $W = C_L(A_{n-1})$ является центральным расширением $W \cap A_{n-1}$ с помощью нильпотентной группы, а потому сама нильпотентна. Поскольку ее периодическая часть ограничена, из предложения 2 работы [30] следует, что W включает в себя такую нормальную подгруппу без кручения X, что W/X — ограниченная группа. Положим $Y = \bigcap_{g \in L} X^g$, тогда Y является L-инвариантной, и из вложения $W/Y \leq \Pi_{g \in L} W/X^g$ получаем, что W/Y — ограниченная группа. Предположим, что Y неединична, и обозначим через Z полный прообраз Y в G. Тогда $U \leq Z$ и Z/U не имеет кручения. Отсюда следует, что $Z \cap T = D$. Получили противоречие с выбором U. Полученное противоречие показывает, что $Y = \langle 1 \rangle$, а значит, W — ограниченная подгруппа. В свою очередь, это означает, что и V ограниченная, в частности $V \leq P$. Итак, $V = P$, а значит, L/P почти абелева и минимаксна.

Отметим, что структура факторов A_{j+1}/A_j описана в предложении 1. Кроме того, можно показать, что $L = PQ$, Q — минимаксная подгруппа.

1. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**, № 3. – С. 366 – 372.
2. *Newman M. F., Wiegold J.* Groups with many nilpotent subgroups // Arch. Math. – 1964. – **15**. – P. 241 – 250.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 447 с.
4. *Heineken H., Mohamed I. J.* A group with trivial center satisfying the normalizer condition // J. Algebra. – 1968. – **10**. – P. 368 – 376.
5. *Heineken H., Mohamed I. J.* Groups with normalizer condition // Math. Ann. – 1972. – **198**, № 3. – P. 178 – 187.
6. *Heineken H., Mohamed I. J.* Non-nilpotent groups with normalizer condition // Lect. Notes Math. – 1974. – **372**. – P. 357 – 360.
7. *Hartley B.* A note on the normalizer conditions // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – **74**, № 1. – P. 11 – 15.
8. *Menegazzo F.* Groups of Heineken – Mohamed // J. Algebra. – 1995. – **171**. – P. 807 – 825.
9. *Smith H.* Groups with few non-nilpotent subgroups // Glasgow Math. J. – 1997. – **39**. – P. 141 – 151.
10. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 4. – С. 472 – 482.
11. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**, № 1. – P. 1 – 43.
12. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 3. – С. 81 – 126.
13. *Артемович О. Д., Курдаченко Л. А.* Групи, багаті x-підгрупами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – С. 218 – 237.

14. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Locally nilpotent groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups // Glasgow Math. J. – 2001. – **43**, № 1. – P. 85 – 102.
15. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups // J. Group Theory. – 2001. – **4**, № 1. – P. 75 – 87.
16. *Dixon M. R., Evans M. J., Smith H.* Groups with some minimal conditions on non-nilpotent subgroups // Ibid. – № 2. – P. 207 – 215.
17. *Dixon M. R., Evans M. J., Smith H.* Locally soluble-by-finite groups with the weak minimal conditions on non-nilpotent subgroups // J. Algebra. – 2002. – **249**. – P. 226 – 246.
18. *Kurdachenko L. A., Shumyatsky P., Subbotin I. Ya.* Groups with many non-nilpotent subgroups // J. Algebra Colloq. – 2001. – **8**, № 2. – P. 129 – 143.
19. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 652 – 660.
20. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt 2. – Berlin: Springer, 1972. – 254 p.
21. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.
22. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt 1. – Berlin: Springer, 1972. – 210 p.
23. *Зайцев Д. И.* О свойствах групп, наследуемых их нормальными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 707 – 713.
24. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн. – 1984. – **25**, № 4. – С. 589 – 594.
25. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Groups with prescribed quotient groups and associated module theory. – New Jersey: World Sci., 2002. – 227 p.
26. *Matlis E.* Cotorsion modules. – Providence: Mem. Amer. Math. Soc., 1964. – **49**. – 66 p.
27. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with the weak maximal condition for non-nilpotent subgroups // Ric. math. – 1998. – **47**, № 1. – P. 1 – 21.
28. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin etc.: Springer, 1972. – 229 p.
29. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
30. *Heineken H., Kurdachenko L. A.* Groups with subnormality for all subgroups that are not finitely generated // Ann. Math. – 1995. – **169**, № 4. – P. 203 – 232.

Получено 11.11.2004,
после доработки — 23.03.2006