УДК 519.21

Б. В. Бондарев, А. В. Баев (Донецк. нац. ун-т)

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С БЫСТРЫМ ПУАССОНОВСКИМ ВРЕМЕНЕМ. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СБЛИЖЕНИЯ

We obtain an estimator of the rate of convergence of normed Poisson sums of random variables, which are defined by the first-order autoregression procedure, to a family of Wiener processes.

Отримано оцінку швидкості зближення нормованих пуассонівських сум випадкових величин, обумовлених процедурою авторегресії першого порядку, з сім'єю вінерових процесів.

1. Введение. Пусть $\xi_k,\ k \geq 0$, задан на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ с выделенной на нем фильтрацией $\Im_0^t$, $t \geq 0$, где

$$\Im_0^t = \sigma\left\{\xi_k,\ 0 \leq k \leq i\right\}.$$

Принцип инвариантности означает, что последовательность случайных процессов

$$\frac{X([nt])}{\sqrt{n}}, \quad t \in [0, T], \quad n \geq 1,$$

где

$$X(i) = \sum_{k=0}^{i} \xi_k, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

слабо сходится в топологии А. В. Скорохода к винеровскому процессу $W(t)$, $t \in [0, T]$.

Успех при доказательстве принципа инвариантности [1 – 4] связан с тем, насколько процесс $X([t])$, $t \in [0, +\infty)$, „близок" к мартингалу, а точнее опирается на разложение

$$X(i) = \mu(i) + \rho(i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\mu(i)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — квадратично-интегрируемый мартингал, $\dfrac{\rho[nt])}{\sqrt{n}}$, $t \in [0, T]$, — асимптотически при $n \to +\infty$ пренебрежимый процесс. Разложение (1) имеет место, если, например, справедливо [2]

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\mathrm{M}\big[\mathrm{M}\{\xi_k/\Im_0^0\}\big]^2\Big)^{1/2} < +\infty. \tag{2}$$

Пусть

$$v(i+1) = \sum_{k=i+1}^{+\infty} \mathrm{M}\{\xi_k/\Im_0^i\}, \qquad v(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{M}\{\xi_k/\Im_0^0\}. \tag{3}$$

Выражение (3) определено, если, например, выполнено

$$\sum_{k=i+1}^{+\infty} \mathrm{M}\big|\mathrm{M}\{\xi_k/\Im_0^i\}\big| < +\infty. \tag{4}$$

Заметим, что в стационарном случае (4) следует из (2), если учесть, что [3, с. 154]

$$\mathrm{M}\big|\mathrm{M}\{\xi_k/\Im_0^i\}\big| = \mathrm{M}\big|\mathrm{M}\{\xi_{k-i}/\Im_0^0\}\big|.$$

Далее, очевидно, что при выполнении (4) процесс

$$\mu(i) = \mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k/\Im_0^i\right\} - v(0)$$

будет также определен, так как

$$\mathrm{M}\left|\sum_{k=1}^{i} \xi_k + v(i+1)\right| \le \sum_{k=1}^{i} \mathrm{M}|\xi_k| + \sum_{k=i+1}^{+\infty} \mathrm{M}\big|\mathrm{M}\{\xi_k/\Im_0^i\}\big| < +\infty,$$

причем относительно потока $\Im_0^i$, $i \ge 0$, последовательность $\mu(i)$ является мартингалом. Действительно, для любой интегрируемой случайной величины ς

$$\mu(i+1) = \mathrm{M}\{\varsigma/\Im_0^{i+1}\} - v(0),$$
$$\mathrm{M}\big\{\mu(i+1)/\Im_0^i\big\} = \mathrm{M}\big\{M\{\varsigma/\Im_0^{i+1}\}/\Im_0^i\big\} - v(0) = \mathrm{M}\{\varsigma/\Im_0^i\} - v(0) = \mu(i).$$

Используя свойства условных математических ожиданий, получаем

$$\begin{gathered}\mu(i) = \mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k/\Im_0^i\right\} - v(0) = \sum_{k=0}^{i} \xi_k + v(i+1) - v(0),\\ \sum_{k=0}^{i} \xi_k = \mu(i) + \rho(i), \qquad \rho(i) = v(i+1) - v(0).\end{gathered} \tag{5}$$

Нетрудно также убедиться в том, что в случае стационарности в узком смысле последовательности $\{\xi_k\}$, $k \ge 1$, последовательность $\{v(i)\}$, $i \ge 0$, стационарна в узком смысле (это следует из леммы [3, с. 154]). Из (5), в частности, следует, что

$$\frac{X\left([nt]\right)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mu([nt]) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(v(0) - v([(nt]+1)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mu([nt]) + \frac{\rho([nt])}{\sqrt{n}},$$

причем

$$\sup_{0\le t\le T} \frac{\big|\rho([nt])\big|}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

по вероятности. Здесь $[a]$ — целая часть a.

В данной работе рассматривается принцип инвариантности для нормированных сумм с быстрым пуассоновским временем, а именно, рассматривается вопрос об оценке скорости сближения при $n \to +\infty$ процесса

$$\varsigma_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{Z(nt)} \xi_k, \quad t \in [0, T],$$

с некоторым семейством винеровских процессов $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{W}\big(\lambda(nt)\big)$, $t \in [0, T]$. Здесь $Z(t)$ — процесс Пуассона, $\mathrm{M}Z(t) = \lambda(t)$, $\lambda(0) = 0$,

$$\xi_{k+1} = \gamma\xi_k + \eta_{k+1}, \qquad \xi_0 = \eta_0, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{6}$$

— дискретный аналог процесса Орнштейна–Уленбека, $\{\eta_k\}$, $k \geq 0$, — последовательность независимых центрированных случайных одинаково распределенных величин, удовлетворяющих условию Крамера

$$\mathrm{M}|\eta_k|^m \leq \frac{L^{m-2}}{2} m!, \quad m \geq 2$$

(не нарушая общности, в данном случае можно считать, что дисперсии величин $\{\eta_k\}$, $k \geq 0$, равны единице, так как в противном случае, разделив (6) на корень из дисперсии, придем к рассматриваемому варианту).

Следует отметить, что процедура (6) является несколько большим, чем дискретным, аналогом процесса Орнштейна–Уленбека, так как относительно $\{\eta_k\}$, $k \geq 0$, не предполагается гауссовость.

2. Оценка скорости сближения нормированных сумм независимых случайных величин с быстрым пуассоновским временем с такими же суммами независимых нормально распределенных случайных величин. Пусть $\{\eta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, — последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальные распределения, по которой требуется построить последовательность независимых случайных величин $\{\xi_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, с заранее выбранным распределением, причем так, чтобы величина

$$\Delta_n = \max_{k \leq n} \left| \sum_{j=1}^{k} \xi_k - \sum_{j=1}^{k} \eta_k \right|$$

была как можно меньше. Решение этой задачи в случае одинаково распределенных величин дано в [5], в случае разно распределенных величин — в работе [6]. Сформулируем основной результат работы [6].

Теорема 1 [6]. *Пусть* $\mathrm{M}\xi_k = \mathrm{M}\eta_k$, $\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{D}\eta_k$, $k = 1, \ldots, n$, *и при некотором* $\alpha > 0$ *выполняются неравенства*

$$\alpha \mathrm{M}|\xi_k|^3 \exp\big\{\alpha|\xi_k|\big\} \leq D\xi_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Тогда требуемые случайные величины $\{\xi_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, *можно построить по* $\{\eta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, *таким образом, что*

$$\mathrm{M}\exp\{c\alpha\Delta_n\} \leq 1 + \alpha B_n, \tag{8}$$

где $c > 0$ *— некоторая абсолютная постоянная,* $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k$.

Оценка Комлоша–Майора–Тушнади [5] следует из (8) при $B_n^2 = n\mathrm{D}\xi_k$.

А. И. Саханенко в работе [7] приводит уточнение неравенства (8).

Лемма 1 [7]. *Пусть* $\mathrm{M}\xi_k = \mathrm{M}\eta_k$, $\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{D}\eta_k$, $k = 1, \ldots, n$, *и при некотором* $\alpha > 0$ *выполняются неравенства* (7). *Тогда требуемые случайные величины* $\{\xi_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, *можно построить по* $\{\eta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, *таким образом, что*

$$\mathrm{M}\exp\{8c\alpha\Delta_n\} \leq 1 + \alpha B_n,$$

где $c > 0$ *— некоторая абсолютная постоянная,* $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k$*, причем, не уменьшая общности, считаем* $0 < c \leq \dfrac{1}{64}$.

В работе [8] установлен результат, аналогичный [6], но содержащий доказательство построения случайных величин $\{\eta_k\}$, $k = 1, \dots, n$, по $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, n$. Этот момент может быть весьма существен, так как, как правило, мы имеем случайный процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, с определенными свойствами, по которому строится последовательность $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, n$, и неизвестно, будут ли такие же свойства у процесса, построенного по $\{\tilde{\xi}_k\}$, $k = 1, \dots, n$, распределения которых совпадают с $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, n$. По крайней мере это требует доказательства! Вместе с тем установлено существование винеровского процесса $W(t)$, $t \geq 0$, сечения которого по времени с вероятностью 1 будут совпадать с частными суммами $S_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2 [8]. *Пусть* $\mathrm{M}\xi_k = \mathrm{M}\eta_k$, $\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{D}\eta_k$, $k = 1, \dots, n$, *и при некотором* $\alpha > 0$ *выполняются неравенства* (7). *Тогда случайные величины* $\{\eta_k\}$, $k = 1, \dots, n$, *можно построить по* $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, n$, *таким образом, что имеет место* (8), *где* $c > 0$ *— некоторая абсолютная постоянная,* $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k$.

Справедлив и аналог леммы 1.

Лемма 2 [8]. *Пусть* $\mathrm{M}\xi_k = \mathrm{M}\eta_k$, $\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{D}\eta_k$, $k = 1, \dots, n$, *и при некотором* $\alpha > 0$ *выполняются неравенства* (7). *Тогда требуемые случайные величины* $\{\eta_k\}$, $k = 1, \dots, n$, *можно построить по* $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, n$, *таким образом, что имеет место* (8), *где* $c > 0$ *— некоторая абсолютная постоянная,* $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k$, *причем, не уменьшая общности, считаем* $0 < c \leq \dfrac{1}{64}$.

Приведем также и аналог одного результата из работы [9].

Пусть

$$Z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \qquad \mathrm{M}Z(t) = \lambda(t)$$

— процесс Пуассона, причем для функции $\lambda(t)$, $t \geq 0$, имеют место оценки

$$0 < \chi \leq \inf_{1 \leq k \leq n} \Big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\Big] \leq$$
$$\leq \sup_{1 \leq k \leq n} \Big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\Big] \leq \delta < +\infty.$$

Пусть имеется последовательность независимых разно распределенных случайных величин $\{\xi_k\}$ с заранее выбранным распределением. Будем предполагать, что последовательность $\{\xi_k\}$ не зависит от $Z(t)$, $t \geq 0$. Пусть $\{\eta_k\}$ — последовательность независимых разно распределенных случайных величин, имеющих нормальные распределения.

Теорема 3. *Если* $\mathrm{M}\xi_k = \mathrm{M}\eta_k$, $\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{D}\eta_k \leq \sigma^2 < +\infty$, $k = 1, \dots, n$, *и при некотором* $\alpha > 0$ *выполняются неравенства* (7), *то требуемые случайные величины* $\{\eta_k\}$ *можно построить по* $\{\xi_k\}$ *таким образом, что*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{k=1}^{Z(nt)} \xi_k - \sum_{k=1}^{Z(nt)} \eta_k \right| > \rho \right) \leq \ell^{-\frac{\rho\alpha}{8}} \left(1 + \alpha\sigma\sqrt{n\delta}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая результаты работ [6, 7], имеем

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\sum_{k=1}^{Z(nt)}\xi_k-\sum_{k=1}^{Z(nt)}\eta_k\right|>\rho\right)\le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\sup_{1\le i\le Z(nt)}\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k-\sum_{k=1}^{i}\eta_k\right|>\rho\right)\le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\sup_{0\le i\le Z(nT)}\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k-\sum_{k=1}^{i}\eta_k\right|>\rho\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(\sup_{1\le i\le m}\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k-\sum_{k=1}^{i}\eta_k\right|>\rho\right)\mathrm{P}\big(Z(nT)=m\big)\le$$

$$\le\sum_{m=1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(c\alpha\sup_{1\le i\le m}\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k-\sum_{k=1}^{i}\eta_k\right|>c\alpha\rho\right)\mathrm{P}\big(Z(nT)=m\big)\le$$

$$\le\sum_{m=1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(8c\alpha\Delta_n>8c\rho\right)\mathrm{P}(Z(nT)=m)\le$$

$$\le \ell^{-8c\alpha\rho}\sum_{m=1}^{+\infty}\mathrm{M}\ell^{8c\Delta_n}\mathrm{P}\big(Z(nT)=m\big)\le$$

$$\le \ell^{-8c\alpha\rho}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\alpha\sqrt{m\sigma^2}\right)\mathrm{P}\big(Z(nT)=m\big)=$$

$$=\ell^{-8c\alpha\rho}+\ell^{-8c\alpha\rho}\alpha\sigma\sum_{m=1}^{+\infty}\sqrt{m}P\big(Z(nT)=m\big)=$$

$$=\ell^{-8c\alpha\rho}\left(1+\alpha\sigma\mathrm{M}\sqrt{Z(nT)}\right)\le \ell^{-8c\alpha\rho}\left(1+\alpha\sigma\sqrt{MZ(nT)}\right)=$$

$$=\ell^{-8c\alpha\rho}\left(1+\alpha\sigma\sqrt{\lambda(nT)}\right)\le \ell^{-8c\alpha\rho}\left(1+\alpha\sigma\sqrt{n\delta}\right).$$

Теорема доказана.

Приведем некоторые достаточные для (7) условия.

Лемма 3 [7]. *Пусть для некоторого* $\gamma>0$ *имеет место оценка*

$$\mathrm{M}\xi_i^2e^{\gamma|\xi_i|}\le 3\mathrm{D}\xi_i. \tag{10}$$

Тогда условие (7) *выполняется.*

Действительно, возьмем $\alpha=\dfrac{\gamma}{2}$, тогда в силу того, что [7]

$$\alpha|x|^3e^{\alpha|x|}\le x^2\frac{e^{2\alpha|x|}-1}{2},$$

имеем

$$\alpha \mathrm{M}|\xi_i|^3 e^{\alpha|\xi_i|} \leq \mathrm{M}\xi_i^2 \frac{e^{2\alpha|\xi_i|}-1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{M}\xi_i^2 e^{2\alpha|\xi_i|} - \frac{1}{2}\mathrm{M}\xi_i^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{M}\xi_i^2 e^{\gamma|\xi_i|} - \frac{1}{2}\mathrm{M}\xi_i^2 \leq \frac{3}{2}\mathrm{D}\xi_i - \frac{1}{2}\mathrm{D}\xi_i \leq \mathrm{D}\xi,$$

т. е. условие (7) также имеет место. В работе [10] замечено, что, в свою очередь, достаточным для выполнения условия (10) является выполнение классического условия Крамера.

Лемма 4. *Если выполняется условие Крамера*

$$\mathrm{M}|\xi_i|^m \leq \frac{H^{m-2}\mathrm{M}\xi_i^2}{2} m! \quad \textit{при} \quad m \geq 2, \tag{11}$$

то при $\gamma H = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} < 1$ *имеем* (10).

Доказательство. Если выполняется условие Крамера (11), то

$$\mathrm{M}\xi_i^2 e^{\gamma|\xi_i|} = \mathrm{M}\xi_i^2 \left(1 + |\xi_i| + \frac{\gamma^2|\xi_i|^2}{2!} + \ldots\right) =$$
$$= \mathrm{M}|\xi_i|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma|\xi_i|)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \frac{\mathrm{M}|\xi_i|^{m+2}}{m!} =$$
$$= \mathrm{M}|\xi_i|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma|\xi_i|)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \frac{M|\xi_i|^{m+2}}{m!} \leq$$
$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} H^m \frac{\mathrm{M}\xi_i^2}{2}(m+2)! \leq$$
$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)\gamma^m H^m \frac{\mathrm{M}\xi_i^2}{2} \leq$$
$$\leq \mathrm{M}\xi_i^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)}{2}(\gamma H)^m.$$

Пусть

$$\gamma H = \delta < 1,$$

тогда, так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta^m = \frac{1}{1-\delta}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} m\delta^m = \delta \sum_{m=0}^{\infty} m\delta^{m-1} = \frac{\delta}{(1-\delta)^2},$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2\delta^m = \delta^2 \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\delta^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} m\delta^m =$$
$$= \delta^2 \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\delta^{m-2} + \frac{\delta}{(1-\delta)^2} = \frac{2\delta^2}{(1-\delta)^3} + \frac{\delta}{(1-\delta)^2},$$
$$\mathrm{M}\xi_i^2 e^{\gamma|\xi_i|} \leq \left(\frac{1}{1-\delta} + \frac{3}{2}\frac{\delta}{(1-\delta)^2} + \frac{\delta^2}{(1-\delta)^3} + \frac{\delta}{2(1-\delta)^2}\right)\mathrm{M}\xi_i^2 =$$

$$= \frac{(1-\delta)^2 + 4\delta(1-\delta) + 2\delta}{2(1-\delta)^3} \mathrm{M}\xi_i^2 = \frac{1}{(1-\delta)^3} \mathrm{M}\xi_i^2, \tag{12}$$

откуда при $\delta = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} < 1$ имеем (10).

Таким образом, при выполнении условия Крамера (11) при

$$\gamma = \frac{1}{H}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

из (12) получаем (10), а при

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2H}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

— (7).

Следствие. *При выполнении условия Крамера* (11) *неравенство* (9) *примет вид*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\sum_{k=1}^{Z(nt)} \xi_k - \sum_{k=1}^{Z(nt)} \eta_k\right| > \rho\right) \le \ell^{-\frac{\rho}{16H}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)} \left(1 + \frac{1}{2H}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\sqrt{\delta n}\right).$$

3. Оценка скорости сближения нормированных сумм независимых нормально распределенных случайных величин с быстрым пуассоновским временем с суммами независимых нормально распределенных случайных величин. Пусть $Z(t)$, $t \ge 0$, — процесс Пуассона, такой, что $\mathrm{M}Z(t) = \lambda(t) \ge 0$, где $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t)$ — непрерывная возрастающая функция, т. е. при $0 \le s < t < +\infty$

$$\mathrm{P}\big\{Z(t) - Z(s) = k\big\} = \frac{\big[\lambda(t) - \lambda(s)\big]^k}{k!} \ell^{-[\lambda(t)-\lambda(s)]}.$$

Пусть

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{Z(t)} \eta_k \left(\sum_{k=1}^{0} \eta_k = 0\right),$$

где $\{\eta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — независимые от $Z(t)$, $t \ge 0$, независимые между собой нормально $N(0,1)$, $i = 1, 2, \ldots,$ распределенные случайные величины, т. е. мера

$$\Phi(A) = \mathrm{P}(\eta_i \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_A \ell^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Случайный процесс $\eta(t)$ — сложный процесс Пуассона, будет [11] неоднородным во времени процессом с независимыми приращениями. Его можно представлять себе как суперпозицию некоторого стандартного винеровского процесса с пуассоновским временем, т. е. $\eta(t) = W(Z(t))$, $t \ge 0$ (равенство понимается в смысле равенства распределений). Введем случайную меру $\nu(A,t)$. Мера $\nu(A,t)$ строится путем прореживания процесса Пуассона $Z(t), t \ge 0$, осуществляемого следующим способом: засчитываются лишь те скачки процесса $\eta(t)$, величины которых попадают во множество A, т. е. скачок процесса Пуассона $Z(t)$, $t \ge 0$, засчитывается с вероятностью $\Phi(A)$ и не засчитывается с вероятностью $1 - \Phi(A)$. Как известно (см., например, [12]), такой прореженный процесс Пуассона $Z(t)$, $t \geq 0$, будет также процессом Пуассона, но уже с интенсивностью $\lambda(t)\Phi(A)$. При фиксированном $t \geq 0$ $\nu(A,t)$ — случайная мера, удовлетворяющая условию счетной аддитивности. Процесс $\nu(A,t)$ является процессом с независимыми приращениями, такими, что

$$\mathrm{P}\big(\nu(A,t) - \nu(A,s) = k\big) = \frac{\big[[\lambda(t) - \lambda(s)]\Phi(A)\big]^k}{k!}\ell^{-[\lambda(t)-\lambda(s)]\Phi(A)},$$

$$k = 0, 1, \ldots, \quad 0 \leq s < t < +\infty,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\mathrm{M}\nu(A,t) = \lambda(t)\Phi(A).$$

В [12, 13] показано, что сложный процесс Пуассона можно представить в виде интеграла по пуассоновской мере $\nu(A,t)$

$$\eta(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\nu(dx, ds). \tag{13}$$

Введем центрированную меру

$$\tilde{\nu}(A,t) = \nu(A,t) - \mathrm{M}\nu(A,t) = \nu(A,t) - \lambda(t)\Phi(A).$$

В силу того что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\Phi(dx) = 0,$$

из (13) имеем

$$\eta(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\tilde{\nu}(dx, ds). \tag{14}$$

Из (14) следует, что справедливо представление

$$\frac{\eta(nt)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{Z(nt)} \eta_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{tn} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\tilde{\nu}(dx, ds) = \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{tn} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\nu(dx, ds).$$

Теорема 4. *Пусть*

$$Z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \qquad \mathrm{M}Z(t) = \lambda(t),$$

— процесс Пуассона, причем для функции $\lambda(t)$, $t \geq 0$, *имеют место оценки*

$$0 < \chi \leq \inf_{1 \leq k \leq n}\Big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\Big] \leq$$

$$\leq \sup_{1 \leq k \leq n}\Big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\Big] \leq \delta < +\infty.$$

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$ таких, что

$$0 < \alpha^4 \ell^{\delta[\ell^{8\alpha^2}-1]} \leq \left[6(\delta^{2/3}\chi^{1/3}+1)\right]^{-3}\chi < +\infty,$$

справедлива оценка

$$\mathrm{P}\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|\int\limits_0^{kT}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\tilde{\nu}(dx,ds) - \sum_{i=1}^{k}\varsigma_i\right| > \rho\right) \leq \ell^{-\frac{\rho}{8}\alpha}\left(1+\alpha\sqrt{n\delta}\right), \qquad (15)$$

где $\{\varsigma_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые нормально $\big(0, \lambda(iT) - \lambda\big((i-1)T\big)\big)$ распределенные величины.

Доказательство. Пусть $\eta(t) = W(Z(t))$, $0 \leq t \leq n$, $\big\{\xi_k = W(Z(kT)) - W\big(Z((k-1)T)\big), k = 1, \ldots, n\big\}$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathrm{M}\xi_k = \mathrm{M}\Big(W(Z(kT)) - W\big(Z((k-1)T)\big)\Big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty}\mathrm{M}W(l)\mathrm{P}\big\{Z(kT) = l\big\} - \sum_{m=0}^{+\infty}\mathrm{M}W(m)\mathrm{P}\big\{Z((k-1)T) = m\big\} = 0,$$

$$\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{M}\xi_k^2 = \mathrm{M}\Big(W(Z(kT)) - W\big(Z((k-1)T)\big)\Big)^2 =$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty}\mathrm{M}W^2(l)\mathrm{P}\big\{Z(kT) = l\big\} + \sum_{m=0}^{+\infty}\mathrm{M}W^2(m)\mathrm{P}\big\{Z((k-1)T) = m\big\} -$$

$$-2\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{l=m}^{+\infty}\mathrm{M}W(m)W(l)\mathrm{P}\big\{Z(kT) = l\big\}\mathrm{P}\big\{Z((k-1)T) = m\big\} =$$

$$= \mathrm{M}Z(kT) + \mathrm{M}Z((k-1)T) -$$

$$-2\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{l=m}^{+\infty} m\mathrm{P}\left\{Z(kT) = \frac{l}{Z((k-1)T)} = m\right\}\mathrm{P}\big\{Z((k-1)T) = m\big\} =$$

$$= \lambda(kT) + \lambda((k-1)T) -$$

$$-2\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{l=m}^{+\infty} m\mathrm{P}\big\{Z(kT) - Z((k-1)T) = l - m\big\}\mathrm{P}\big\{Z((k-1)T) = m\big\} =$$

$$= \lambda(kT) + \lambda((k-1)T) - 2\lambda((k-1)T) = \lambda(kT) - \lambda((k-1)T).$$

Построим по $\{\xi_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, последовательность независимых случайных величин $\{\varsigma_k\}$, $k = 1, \ldots, n$ $\big(\{\varsigma_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые нормально $(0, \lambda(iT) - \lambda((i-1)T))$ распределенные величины$\big)$, так, чтобы имело место (15). Для того чтобы это построение было осуществимо, проверим выполнение условия (7).

В силу того что

$$\alpha\mathrm{M}|\xi_k|^3\exp\big\{\alpha|\xi_k|\big\} \leq \big(M|\xi_k|^4\big)^{4/3}\big(\mathrm{M}\exp\big\{4\alpha|\xi_k|\big\}\big)^{1/4},$$

необходимо оценить сверху каждый сомножитель последнего соотношения.

Используя представление (13), получаем

$$\mathrm{M}[\xi_k]^4 = \mathrm{M}\left[\int\limits_{(k-1)T}^{kT}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\tilde{\nu}(du, ds)\right]^4 \le$$

$$\le 6\Big(\big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\big]^2 + \big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\big]\Big) \le$$

$$\le 6(\delta^{2/3} + \chi^{-1/3})(\mathrm{D}\xi_k)^{4/3} < +\infty. \qquad (16)$$

Действительно, пусть

$$\eta\big((k-1)T, t\big) = \int\limits_{(k-1)T}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\tilde{\nu}(du, ds).$$

Используя обобщенную формулу Ито [14], с учетом того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^3 d\Phi(u) = 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\Phi(u) = 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^4 d\Phi(u) = 3,$$

$$\mathrm{M}\Big[\eta\big((k-1)T, s\big)\Big]^2 = \int\limits_{(k-1)T}^{s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\Phi(u) d\lambda(\tau) = \lambda(s) - \lambda((k-1)T),$$

имеем

$$\mathrm{M}\Big[\eta\big((k-1)T, t\big)\Big]^4 =$$

$$= \mathrm{M}\int\limits_{(k-1)T}^{t}\Big\{\Big[\eta\big((k-1)T, s\big) + u\Big]^4 - \Big[\eta((k-1)T, s)\Big]^4 -$$

$$- 4\Big[\eta((k-1)T, s)\Big]^3 u\Big\} d\Phi(u) d\lambda(s) =$$

$$= \mathrm{M}\int\limits_{(k-1)T}^{t}\Big\{6\Big[\eta\big((k-1)T, s\big)\Big]^2 u^2 + 4\Big[\eta\big((k-1)T, s\big)\Big] u^3 + u^4\Big\} d\Phi(u) d\lambda(s) =$$

$$= 6\int\limits_{(k-1)T}^{t} \mathrm{M}\big[\eta((k-1)T, s)\big]^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\Phi(u)\, d\lambda(s) + \int\limits_{(k-1)T}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^4 d\Phi(u)\, d\lambda(s) \le$$

$$\le 6\big[\lambda(kT) - \lambda((k-1)T)\big]^2 + 3\big[\lambda(kT) - \lambda((k-1)T)\big] \le$$

$$\le 6\Big(\big[\lambda(kT) - \lambda((k-1)T)\big]^2 + \big[\lambda(kT) - \lambda((k-1)T)\big]\Big),$$

т. е. (16) имеет место.

В силу того что

$$\Big|\eta\big((k-1)T,t\big)\Big| \leq \int\limits_{(k-1)T}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u|\nu(du,ds) = \bar{\eta}\big((k-1)T,t\big),$$

опять используя обобщенную формулу Ито, получаем

$$\mathrm{M}\ell^{4\alpha\bar{\eta}((k-1)T,t)} = 1 + \int\limits_{(k-1)T}^{t}\mathrm{M}\ell^{4\alpha\bar{\eta}((k-1)T,s)}\big[\ell^{4\alpha|u|}-1\big]d\Phi(u)\,d\lambda(s),$$

откуда

$$\mathrm{M}\ell^{4\alpha\bar{\eta}((k-1)T,t)} = \ell^{[\lambda(t)-\lambda((k-1)T)]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{4\alpha|u|}d(u)-1\right]} =$$

$$= \ell^{[\lambda(t)-\lambda(kT)][\ell^{8\alpha^2}-1]} \leq \ell^{\delta[\ell^{8\alpha^2}-1]} < +\infty. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) следует оценка

$$\alpha\mathrm{M}|\xi_k|^3\exp\big\{\alpha|\xi_k|\big\} \leq \mathrm{M}\xi_k^2,$$

и теперь, в силу леммы 2, имеем (15). Построенная таким образом последовательность $\{\varsigma_k\}$, $k=1,\ldots,n$, является последовательностью независимых нормально $N(0,\lambda(kT)-\lambda((k-1)T)$, $k=1,\ldots,n$, распределенных величин.

Неравенство (15) можно переписать также и в следующем виде:

$$\mathrm{P}\left(\sup_{1\leq k\leq n}\Big|\eta(kT)-\tilde{W}(\lambda(kT))\Big| > \rho\right) \leq \ell^{-\frac{\rho}{8}\alpha}\Big(1+\alpha\sqrt{n\delta}\,\Big),$$

где $\tilde{W}(t)$, $t\geq 0$, — некоторый стандартный винеровский процесс. Этот факт следует из того, что для любой последовательности независимых нормально распределенных величин можно построить винеровский процесс, приращения которого с вероятностью 1 будут совпадать с заданными величинами. Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть на полном вероятностном пространстве* $(\Omega,\Im,\mathrm{P})$ *задана последовательность* ξ_i, $i=1,\ldots,l$, *независимых нормально распределенных случайных величин, такая, что* $\mathrm{M}\xi_i=0$, $\mathrm{M}\xi_i^2<+\infty$, $i=1,\ldots,l$. *Тогда существует винеровский процесс* $\tilde{W}(t)$ *такой, что с вероятностью единица*

$$\mu_k = \tilde{W}(t_k), \quad k=0,\ldots,l,$$

где

$$\mu_0=0, \qquad t_0=0, \qquad \mu_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i, \qquad t_k=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{M}\xi_i^2, \qquad k=1,\ldots,l.$$

4. Оценка скорости сближения по вероятности нормированного винеровского процесса с быстрым пуассоновским временем с семейством винеровских процессов. Основным результатом настоящего пункта является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть*

$$Z(t), \quad 0 \le t \le T, \quad \mathrm{M}Z(t) = \lambda(t),$$

— процесс Пуассона, причем для функции $\lambda(t)$, $t \ge 0$, имеют место оценки

$$0 < \chi \le \inf_{k \in N} \Big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\Big] \le \sup_{k \in N} \Big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\Big] \le \delta < +\infty.$$

Пусть $\alpha > 0$ такое, что

$$0 < \alpha^4 \ell^{\delta[\ell^{8\alpha^2}-1]} \le \big[6(\delta^{2/3}\chi^{1/3}+1)\big]^{-3}\chi < +\infty.$$

Тогда найдется некоторый стандартный винеровский процесс $\tilde W(t)$, $t \ge 0$, такой, что при $\rho(n) \ge 1$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0 \le t \le T} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\eta(tn) - \tilde W\big(\lambda(tn)\big)\Big| > 3\frac{1}{\sqrt{n}}\rho(n)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{\alpha\rho(n)}{8}\right\}\big[1+\alpha\sqrt{n\delta}\big] + 2n\exp\left\{-\rho(n) + \delta(\sqrt{\ell}-1)\right\} +$$

$$+ n\frac{4\sqrt{\delta}}{\rho(n)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-[\rho(n)]^2}{2\delta}\right\}.$$

Доказательство. В силу того что на интервале $\big[(k-1)T, kT\big)$ процессы

$$\varsigma_{k-1}^{\pm}(t) = \exp\left\{\pm z\int\limits_{(k-1)t}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\nu(dx,ds) - \int\limits_{(k-1)T}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\ell^{\pm xz}-1]\Phi(dx)d\lambda(s)\right\}$$

являются мартингалами [15], причем

$$\mathrm{M}\varsigma_{k-1}^{\pm}(t) = 1,$$

в силу неравенства А. Н. Колмогорова имеем оценки

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T \le t \le kT}\varsigma_{k-1}^{\pm}(t) > r\right\} \le \frac{\mathrm{M}\varsigma_{k}^{\pm}(kT)}{r} = \frac{1}{r}.$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T \le t \le kT}\big|\eta(t) - \eta((k-1)T)\big| > \rho(n)\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{z\sup_{(k-1)T \le t \le kT}\left|\int\limits_{(k-1)t}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\tilde\nu(dx,ds)\right| > z\rho(n)\right\} \le$$

$$\le \mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T \le t \le kT}\left[z\int\limits_{(k-1)t}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\tilde\nu(dx,ds)\right] > z\rho(n)\right\} +$$

$$+\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T\le t\le kT}\left[-z\int\limits_{(k-1)t}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\tilde{\nu}(dx,ds)\right]>z\rho(n)\right\}\le$$

$$\le\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T\le t\le kT}\left[z\int\limits_{(k-1)t}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\tilde{\nu}(dx,ds)-\int\limits_{(k-1)T}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\ell^{xz}-1]\Phi(dx)d\lambda(s)\right]>\right.$$

$$\left.>z\rho(n)-\delta\left[\exp\left\{\frac{z^2}{2}\right\}-1\right]\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T\le t\le kT}\left[-z\int\limits_{(k-1)t}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\tilde{\nu}(dx,ds)-\int\limits_{(k-1)T}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\ell^{-xz}-1]\Phi(dx)d\lambda(s)\right]>\right.$$

$$\left.>z\rho(n)-\delta\left[\exp\left\{\frac{z^2}{2}\right\}-1\right]\right\}\le$$

$$\le 2\exp\left\{-z\rho(n)+\delta\left[\exp\left\{\frac{z^2}{2}\right\}-1\right]\right\},$$

откуда при $z=1$ получаем оценку

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T\le t\le kT}\left|\eta(t)-\eta\big((k-1)T\big)\right|>\rho(n)\right\}\le 2\exp\left\{-\rho(n)+\delta(\sqrt{\ell}-1)\right\}.$$

Здесь ℓ — постоянная Эйлера.

Известно, что для $\rho(n)\ge 1$ справедлива оценка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{(k-1)T\le t\le kT}\left|\tilde{W}(\lambda(t))-\tilde{W}(\lambda(k-1)T))\right|>\rho(n)\right\}=$$

$$=\mathrm{P}\left\{\sup_{\lambda((k-1)T)\le u\le\lambda(kT)}\left|\tilde{W}(u)-\tilde{W}(\lambda(k-1)T))\right|>\rho(n)\right\}=$$

$$=\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le u\le\lambda(kT)-\lambda((k-1)T)}\left|\tilde{W}(u)\right|>\rho(n)\right\}\le$$

$$\le 4\mathrm{P}\left\{\xi>\rho(n)\big[\lambda(kT)-\lambda\big((k-1)T\big)\big]^{\frac{1}{2}}\right\}\le$$

$$\le\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\rho(n)[\lambda(kT)-\lambda((k-1)T)]^{\frac{1}{2}}}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\le$$

$$\le\frac{4\big[\lambda(kT)-\lambda((k-1)T)\big]^{1/2}}{\rho(n)\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\rho(n)}^{+\infty}x\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\le$$

$$\leq \frac{4\big[\lambda(kT)-\lambda((k-1)T)\big]^{\frac{1}{2}}}{\rho(n)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{[\rho(n)]^2}{2\big[\lambda(kT)-\lambda\big((k-1)T\big)\big]}\right\}\leq$$

$$\leq \frac{4\sqrt{\delta}}{\rho(n)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\big[\rho(n)\big]^2}{2\delta}\right\}.$$

Используя полученные оценки и (15), имеем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\eta(tn)-\tilde{W}(\lambda(tn))\right|>3\frac{1}{\sqrt{n}}\rho(n)\right\}\leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq Tn}\left|\eta(t)-\tilde{W}(\lambda(t))\right|>3\rho(n)\right\}\leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\sup_{(k-1)T\leq t\leq kT}\left|\eta(t)-\tilde{W}(\lambda(t))\right|>3\rho(n)\right\}\leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left|\eta(kT)-\tilde{W}(\lambda(kT))\right|>\rho(n)\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\sup_{(k-1)T\leq t\leq kT}|\eta(t)-\eta((k-1)T)|>\rho(n)\right\}+$$

$$+\mathrm{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\sup_{(k-1)T\leq t\leq kT}\left|\tilde{W}(\lambda(t))-\tilde{W}(\lambda(k-1)T)\right|>\rho(n)\right\}\leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{1}{8}\alpha\rho(n)\right\}\left[1+\alpha\sqrt{\delta n}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{\sup_{(k-1)T\leq t\leq kT}|\eta(t)-\eta((k-1)T)|>\rho(n)\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{\sup_{(k-1)T\leq t\leq kT}|W(\lambda(t))-W(\lambda(k-1)T)|>\rho(n)\right\}\leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{\alpha\rho(n)}{8}\right\}\left[1+\alpha\sqrt{n\delta}\right]+2n\exp\left\{-\rho(n)+\delta\left(\sqrt{\ell}-1\right)\right\}+$$

$$+n\frac{4\sqrt{\delta}}{\rho(n)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\big[\rho(n)\big]^2}{2\delta}\right\}.$$

Выбирая $\rho(n)\to+\infty$ так, чтобы $\dfrac{\rho(n)}{\sqrt{n}}\to 0$, $n\exp(-\rho(n))\to 0$ при $n\to+\infty$, будем иметь оценку скорости сближения в равномерной метрике по вероятности процесса $\dfrac{\eta(nt)}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{Z(nt)}\eta_k=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt}\int_{-\infty}^{+\infty}x\nu(dx,ds)$, $t\in[0,T]$, с процессом $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{W}(\lambda(nt))$, $t\in[0,T]$, где $\tilde{W}(t)$ — некоторый стандартный винеровский процесс.

5. Принцип инвариантности для рекуррентной процедуры. Рассмотрим дискретный аналог процесса Орнштейна – Уленбека, а именно, процедуру

$$\xi_{k+1} = \gamma\xi_k + \eta_{k+1}, \qquad \xi_0 = \eta_0, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{18}$$

Здесь $\{\eta_k\}$, $k \geq 0$, — последовательность независимых центрированных случайных величин. Основным результатом данного пункта является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть*

$$Z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \qquad \mathrm{M}Z(t) = \lambda(t),$$

— процесс Пуассона, причем для функции $\lambda(t)$, $t \geq 0$, *имеют место оценки*

$$0 < \chi \leq \inf_{k\in N} \big[\lambda(kT) - \lambda\big((k-1)T\big)\big] \leq \sup_{k\in N} \Big[\lambda(kT) - \lambda((k-1)T)\Big] \leq \delta < +\infty.$$

Пусть $\alpha > 0$ *такое, что*

$$0 < \alpha^4 \ell^{\delta[\ell^{8\alpha^2}-1]} \leq \big[6(\delta^{2/3}\chi^{1/3}+1)\big]^{-3}\chi < +\infty,$$

и $\{\eta_k\}$, $k \geq 0$, *— последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин, таких, что выполнено условие Крамера*

$$\mathrm{M}|\eta_t|^m \leq \frac{L^{m-2}}{2} m!, \quad m \geq 2.$$

Тогда справедливо разложение

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{Z(nt)} \xi_k = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{W}(\lambda(nt)) + \rho_n(t),$$

причем справедлива оценка

$$\mathrm{P}\bigg\{ \sup_{0\leq t\leq 1} \big|\rho_n(t)\big| > \frac{\rho(n)}{\sqrt{n}} \frac{4-3\gamma}{1-\gamma} \bigg\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{\alpha\rho(n)(1-\gamma)}{8}\right\}\big[1+\alpha\sqrt{n\delta}\,\big] +$$

$$+ 2n\exp\Big\{-\rho(n)(1-\gamma) + \delta(\sqrt{\ell}-1)\Big\} +$$

$$+ n\frac{4\sqrt{\delta}}{\rho(n)(1-\gamma)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\big[\rho(n)\big]^2(1-\gamma)^2}{2\delta}\right\} +$$

$$+ 2\delta n \exp\left\{-\frac{\rho^2(n)n(1-\gamma)^2}{2} \frac{1}{1+1{,}62L\rho(n)\sqrt{n(1-\gamma^2)}}\right\} +$$

$$+ 2\exp\left(-\frac{1}{2L}\rho(n)\sqrt{n}(1-\gamma) + \frac{1}{4L^2}\right) +$$

$$+ \ell^{-\frac{\rho(n)(1-\gamma)}{16L}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)} \left(1 + \frac{1}{2L}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\sqrt{\delta n}\right). \tag{19}$$

Доказательство. Из (18) следует, что

$$\xi_k = \gamma^k\eta_0 + \gamma^{k-1}\eta_1 + \ldots + \gamma\eta_{k-1} + \eta_k.$$

Тогда

$$v_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{M}\left\{\xi_k/\Im_0^n\right\} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{M}\left\{\left[\gamma^k\eta_0 + \gamma^{k-1}\eta_1 + \ldots + \gamma\eta_{k-1} + \eta_k\right]/\Im_0^n\right\} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left\{\left[\gamma^k\eta_0 + \gamma^{k-1}\eta_1 + \ldots + \gamma^{k-n+1}\eta_{n-1} + \gamma^{k-n}\eta_n\right]\right\} =$$

$$= \eta_0 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \gamma^k + \eta_1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \gamma^{k-1} + \ldots + \eta_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \gamma^{k-n} =$$

$$= \frac{\eta_0\gamma^{n+1}}{1-\gamma} + \frac{\eta_1\gamma^n}{1-\gamma} + \ldots + \frac{\eta_n\gamma}{1-\gamma} = \frac{\gamma\xi_n}{1-\gamma},$$

а

$$v_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{M}\left\{\xi_k/\Im_0^0\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{M}\left\{\left[\gamma^k\eta_0 + \gamma^{k-1}\eta_1 + \ldots + \gamma\eta_{k-1} + \eta_k\right]/\Im_0^0\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{\left[\gamma^k\eta_0\right]\right\} = \frac{\eta_0}{1-\gamma}.$$

Пусть

$$m_k = \sum_{i=k}^{+\infty} \left[\mathrm{M}\left\{\xi_i/\Im_0^k\right\} - \mathrm{M}\left\{\xi_i/\Im_0^{k-1}\right\}\right]$$

— мартингал-разности, тогда

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

— мартингал.

В силу того что

$$\left[\mathrm{M}\left\{\xi_i/\Im_0^k\right\} - \mathrm{M}\left\{\xi_i/\Im_0^{k-1}\right\}\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left\{\left[\gamma^i\eta_0 + \gamma^{i-1}\eta_1 + \ldots + \gamma\eta_{i-1} + \eta_i\right]/\Im_0^k\right\} -$$

$$- \mathrm{M}\left\{\left[\gamma^i\eta_0 + \gamma^{i-1}\eta_1 + \ldots + \gamma\eta_{i-1} + \eta_i\right]/\Im_0^{k-1}\right\} =$$

$$= \left[\gamma^i\eta_0 + \gamma^{i-1}\eta_1 + \ldots + \gamma^{i-k}\eta_k\right] -$$

$$- \left[\gamma^i\eta_0 + \gamma^{i-1}\eta_1 + \ldots + \gamma^{i-k+1}\eta_{k-1}\right] = \gamma^{i-k}\eta_k,$$

имеем

$$m_k = \sum_{i=k}^{+\infty} \left[\mathrm{M}\left\{\xi_i/\Im_0^k\right\} - \mathrm{M}\left\{\xi_i/\Im_0^{k-1}\right\}\right] = \sum_{i=k}^{+\infty} \left[\gamma^{i-k}\eta_k\right] = \frac{\eta_k}{1-\gamma},$$

откуда

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{1-\gamma} \sum_{k=1}^{n} \eta_k.$$

Пусть $\{\varsigma_k\}$, $k \geq 1$, — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним таких, что $\mathrm{M}\eta_k^2 = \mathrm{M}\varsigma_k^2$, $k \geq 1$. Далее, пусть

$$\frac{\mu(Z(nt))}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1-\gamma} \sum_{k=1}^{Z(nt)} \eta_k.$$

В силу следствия из теоремы 1 получаем

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{(1-\gamma)\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{Z(nt)}\varsigma_k - \frac{\mu(Z(nt))}{\sqrt{n}}\right| > \frac{\rho(n)}{\sqrt{n}}\right) \leq$$

$$\leq \ell^{-\frac{\rho(n)(1-\gamma)}{16L}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}\left(1+\frac{1}{2L}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\sqrt{\delta n}\right).$$

В силу теоремы 4 при $\rho(n) \geq 1$ имеем оценку

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{(1-\gamma)\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{Z(nt)}\varsigma_k - \frac{1}{(1-\gamma)\sqrt{n}}\tilde{W}(\lambda(tn))\right| > 3\frac{1}{\sqrt{n}}\rho(n)\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1-\gamma}\sum_{k=1}^{Z(nt)}\varsigma_k - \frac{1}{(1-\gamma)\sqrt{n}}\tilde{W}(\lambda(tn))\right| > 3\frac{1}{\sqrt{n}}\rho(n)\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{Z(nt)}\varsigma_k - \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{W}(\lambda(tn))\right| > 3\frac{1-\gamma}{\sqrt{n}}\rho(n)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{\alpha\rho(n)(1-\gamma)}{8}\right\}\left[1+\alpha\sqrt{n\delta}\ \right] +$$

$$+ 2n\exp\left\{-\rho(n)(1-\gamma)+\delta\left(\sqrt{\ell}-1\right)\right\} +$$

$$+ n\frac{4\sqrt{\delta}}{\rho(n)(1-\gamma)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{[\rho(n)]^2(1-\gamma)^2}{2\delta}\right\}.$$

Далее, так как

$$1 \leq B_k^2 = \sum_{i=0}^{k}\gamma^{2(k-i)} = \frac{1-\gamma^{2k}}{1-\gamma^2} < \frac{1}{1-\gamma^2},$$

выполнено условие Крамера

$$\mathrm{M}\left|\gamma^{k-i}\eta_i\right|^m \leq \frac{m!}{2}L^{m-2}\gamma^{2(k-i)}.$$

Теперь, используя результаты В. В. Юринского [16] (см. также [17]), имеем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left|v_0 - v_{Z((n+1)t)}\right| > \rho + \frac{\rho}{1-\gamma}\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{\gamma\xi_{Z((n+1)t)}}{1-\gamma}\right| > \frac{\rho}{1-\gamma}\sqrt{n}\right\} + \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\eta_0}{1-\gamma}\right| > \rho\sqrt{n}\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{|\eta_0| > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} + \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq k\leq Z(nT)}|\xi_k| > \rho\sqrt{n}\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{|\eta_0| > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}\{|\xi_i| > \rho\sqrt{n}\}\mathrm{P}\{Z(nT)=k\} \leq \mathrm{P}\{|\eta_0| > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}\Big\{|\gamma^i\eta_0 + \gamma^{i-1}\eta_1 + \ldots + \gamma\eta_{i-1} + \eta_i| >$$

$$> B_i\rho\sqrt{n(1-\gamma^2)}\Big\}\mathrm{P}\left\{Z(nT)=k\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{|\eta_0| > \delta\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k}2\exp\left\{-\frac{\rho^2 n(1-\gamma^2)}{2}\left[1+1,62\rho\sqrt{n(1-\gamma^2)}\frac{L}{B_i}\right]^{-1}\right\}\mathrm{P}\{Z(nT)=k\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{|\eta_0| > \delta\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} +$$

$$+2\exp\left\{-\frac{\rho^2 n(1-\gamma^2)}{2}\frac{1}{1+1,62L\rho\sqrt{n(1-\gamma^2)}}\right\}\lambda(nT) \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{|\eta_0| > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} + 2n\delta\exp\left\{-\frac{n(1-\gamma^2)}{2}\frac{1}{1+1{,}62\rho L\sqrt{n(1-\gamma^2)}}\right\}.$$

Далее, пусть $z > 0$, $Lz \leq \dfrac{1}{2}$, тогда

$$\mathrm{P}\left\{\eta_0 > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} \leq \mathrm{P}\left\{z\eta_0 > z\rho\sqrt{n}(1-\gamma)\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{\exp(z\eta_0) > \exp(z\rho\sqrt{n}(1-\gamma))\right\} \leq$$

$$\leq \exp(-z\rho\sqrt{n}(1-\gamma))\mathrm{M}\exp(z\eta_0) \leq$$

$$\leq \exp(-z\rho\sqrt{n}(1-\gamma))\left[1+\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\mathrm{M}|\eta_0 z|^m}{m!}\right] \leq$$

$$\leq \exp(-z\rho\sqrt{n}(1-\gamma))\left[1+z^2\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{L^{m-2}z^{m-2}}{2}\right] \leq \exp(-z\rho\sqrt{n}(1-\gamma))[1+z^2] \leq$$

$$\leq \exp(-z\rho\sqrt{n}(1-\gamma)+z^2). \tag{20}$$

Минимизируя правую часть по $0 < z < \dfrac{1}{2L}$, из (20) получаем

$$\mathrm{P}\{|\eta_0| > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\{\eta_0 > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\} + \mathrm{P}\{-\eta_0 > \rho\sqrt{n}(1-\gamma)\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left(-\frac{1}{2L}\rho\sqrt{n}(1-\gamma)+\frac{1}{4L^2}\right). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует оценка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left|v_0 - v_{Z((n+1)t)}\right| > \rho + \frac{\rho}{1-\gamma}\right\} \leq$$

$$\leq n2\delta\exp\left\{-\frac{\rho^2 n(1-\gamma^2)}{2}\frac{1}{1+1{,}62L\rho\sqrt{n(1-\gamma^2)}}\right\}+$$

$$+2\exp\left(-\frac{1}{2L}\rho\sqrt{n}(1-\gamma)+\frac{1}{4L^2}\right).$$

Теорема 6 доказана.

Замечание. Выбирая $\rho(n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$ так, чтобы правая часть неравенства (19) стремилась к нулю, но так, чтобы $\dfrac{\rho(n)}{\sqrt{n}} \to 0$, получаем оценку скорости сближения.

6. Выводы. Методом одного вероятностного пространства получена оценка скорости сближения при $n \to +\infty$ процесса

$$\varsigma_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{Z(nt)}\xi_k, \quad t \in [0,T],$$

с семейством винеровских процессов $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{W}(\lambda(nt))$, $t \in [0,T]$. Здесь $Z(t)$ — процесс Пуассона, $\mathrm{M}Z(t) = \lambda(t)$, $\lambda(0) = 0$,

$$\xi_{k+1} = \gamma\xi_k + \eta_{k+1}, \qquad \xi_0 = \eta_0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

— дискретный аналог процесса Орнштейна – Уленбека, $\{\eta_k\}$, $k \geq 0$, — последовательность независимых центрированных одинаково распределенных величин, удовлетворяющих условию Крамера

$$\mathrm{M}|\eta_k|^m \leq \frac{L^{m-2}}{2}m!, \quad m \geq 2.$$

В построении существенно используется разложение соответствующей суммы на мартингальную составляющую и асимптотически пренебрежимый процесс.

1. *Чикин Д. О.* Функциональная предельная теорема для стационарных процессов. Мартингальный подход // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **14**, вып. 4. – С. 731 – 741.
2. *Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В. и др.* Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. – 1989. – **45**. – С. 5 – 257.
3. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. – М.: Физматлит, 1994. – 368 с.
4. *Баев А. В., Бондарев Б. В.* Принцип инвариантности для одного класса стационарных марковских процессов. Оценка скорости сближения // Вісн. Донец. ун-ту. Сер А. Природничі науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 7 – 17.
5. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. II // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1976. – **34**, H. 1. – S. 33 – 58.
6. *Саханенко А. И.* Скорость сходимости в принципе инвариантности для разно распределенных величин с экспоненциальными моментами // Предельные теоремы для сумм случайных величин. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 4 – 50.

7. *Саханенко А. И.* Оценки в принципе инвариантности // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. – 1985. – **5**. – С. 27 – 44.
8. *Bondarev B. V., Kolosov A. A.* An approximation in probability of normalized integrals of processes with weak dependence by a set of Wiener processes and its applications // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2000. – № 2. – С. 39 – 65.
9. *Бондарев Б. В., Баев А. В., Худолий О. С.* Некоторые задачи для сложного процесса Пуассона // Там же. – 2004. – № 1. – С. 3 – 15.
10. *Зайцев А. Ю.* О гауссовской аппроксимации сверток при выполнении многомерных аналогов неравенства Бернштейна. – Л., 1984. – 48 с. – (Препринт / Ленингр. отд-ние Мат. ин-та АН СССР, Р-9-84).
11. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища шк., 1988. – 439 с.
12. *Бондарев Б. В.* Математические модели в страховании. – Донецк: Апекс, 2003. – 116 с.
13. *Скороход А. В.* Лекції з випадкових процесів. – Київ: Либідь, 1990. – 168 с.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
15. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
16. *Yurinskii V. V.* Exponential inequalities for sums of random vectors // J. Multivar. Anal. – 1976. – **6**, № 4. – P. 473 – 499.
17. *Бондарев Б. В.* Нерівність С. Н. Бернштейна для оцінки параметра авторегресії першого порядку // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1996. – Вип. 55. – С. 13 – 19.
18. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
19. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. – 370 с.

Получено 19.01.2006,
после доработки — 03.05.2006