УДК 517.95

С. П. Лавренюк (Львів. нац. ун-т),
Н. П. Процах (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ УЗАГАЛЬНЮЄ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

The mixed problem for a nonlinear ultraparabolic equation is considered. This equation is the nonlinear generalization of the equation of diffusion with inertia and contains, as a special case, the Fokker – Plank and Kolmogorov equations. Conditions for the existence and uniqueness of a solution of this problem are established.

Розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке є нелінійним узагальненням рівняння дифузії з інерцією та містить, як окремий випадок, рівняння Фоккера – Планка та рівняння Колмогорова. Знайдено умови, за яких розв’язок цієї задачі існує та є єдиним.

Ультрапараболічні рівняння виникають при дослідженні марковських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, у фінансовій математиці і т. д. (див., зокрема, [1 – 3] та бібліографію в [4, 5]).

Задачу Коші для лінійних ультрапараболічних рівнянь, які є узагальненням рівняння дифузії з інерцією, а також рівнянь, які описують процеси в фінансовій математиці, розглянуто в [4 – 8]. При їх дослідженні використано теорію груп Лі, властивості об’ємних потенціалів.

Дослідження мішаних задач для лінійних та нелінійних ультрапараболічних рівнянь в обмежених областях проведено в працях [9 – 14]. За певних умов на коефіцієнти рівнянь одержано умови, за яких розв’язок цих задач існує і є єдиним.

У цій статті в обмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке, зокрема, містить невідому функцію зі степенем $q \in (1, \infty)$ та її похідні за групою просторових змінних у степені $p \in (1, 2]$. На відміну від [11 – 13] гіперболічна частина цього рівняння містить перші похідні за групою $l+1$, $l \geqslant 1$, незалежних змінних. Крім того, у праці [13] число $p \in (2; \infty)$, а в [12] — $q \in (1, 2)$, $p = 2$. Розглянуте рівняння є нелінійним узагальненням рівняння дифузії з інерцією та містить, як окремий випадок, рівняння Фоккера – Планка та рівняння Колмогорова.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^l$ — обмежені області з межею $\partial\Omega \in C^1$ та $\partial D \in C^1$ відповідно, числа $n, l \in \mathbb{N}$, $T \in (0, \infty)$.

Введемо такі позначення: τ — довільний фіксований момент часу з проміжку $(0, T]$, $G = \Omega \times D$, $Q_\tau = G \times (0, \tau)$, $Q_{s,\tau} = G \times (s, \tau)$, $s < \tau$, $s \in [0, T)$, $\Sigma_\tau = \partial\Omega \times D \times (0, \tau)$, $S_\tau = \Omega \times \partial D \times (0, \tau)$, ν — зовнішня нормаль до поверхні S_T, ∂G — межа області G.

Розглянемо функції, які задовольняють умови:

A) $a_i \in L^\infty\big(0, T; C(\overline{G})\big)$, $a_i(x, y, t) \geqslant a_0$ для майже всіх $(x, y, t) \in Q_T$ та всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_0 — додатна стала;

P) числа p та q такі, що $q \in (1, \infty)$, $p \in (1, 2]$;

C) $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x, y, t) \geqslant c_0$ для майже всіх $(x, y, t) \in Q_T$; c_0 — стала;

G) $g(x, y, t, \xi)$ вимірна за змінними (x, y, t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна по ξ для майже всіх $(x, y, t) \in Q_T$; $|g(x, y, t, \xi)| \leqslant g^0|\xi|^{q-1}$, $\big(g(x, y, t, \xi) -$

$- g(x,y,t,\eta)\big)(\xi-\eta) \geqslant g_0|\xi-\eta|^q$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $\xi,\,\eta\in\mathbb{R}^1$, де g_0, g^0 — такі сталі, що $g_0>0$ для $q\geqslant 2$ і $g_0=0$ для $q\in(1,2)$, $g^0>0$;

L) $\lambda_i\in L^\infty(0,T;C(\overline{G}))$, $\lambda_{iy_i}\in L^\infty(Q_T)$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $i\in\{1,\ldots,l\}$;

F) $f\in L^2(Q_T)$;

U) $u_0\in L^2(G)$.

Позначимо через S_τ^1 частину поверхні S_τ, на якій

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)<0,$$

а через S_τ^2 частину поверхні S_τ, на якій

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)\geqslant 0.$$

Будемо припускати, що для функцій λ_i, $i\in\{1,\ldots,l\}$, виконується умова

S) існує $\Gamma_1\subset\mathbb{R}^{l-1}$ таке, що $\operatorname{mes}\Gamma_1>0$ і поверхню S_T^1 можна подати у вигляді $S_T^1=\Omega\times\Gamma_1\times(0,T)$.

Позначимо $\Gamma_2=\partial D\backslash\Gamma_1$. В області Q_T розглянемо задачу

$$u_t+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\big)_{x_i}+$$

$$+\,c(x,y,t)u+g(x,y,t,u)=f(x,y,t), \tag{1}$$

$$u|_{S_T^1}=0, \tag{2}$$

$$u|_{\Sigma_T}=0, \tag{3}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y). \tag{4}$$

Введемо простори

$$V_1(G)=\Big\{v:\;\; v\in L^q(G)\cap L^2(G),\;\; v_{x_i}\in L^p(G),\;\; v\big|_{\partial\Omega\times D}=0,\;\; i\in\{1,\ldots,n\}\Big\},$$

$$V_2(G)=\Big\{v:\; v\in L^2(G),\;\; v_{y_i}\in L^2(G),\;\; v\big|_{\partial\Omega\times\Gamma_1}=0,\;\; i\in\{1,\ldots,l\}\Big\},$$

$$V^{1,1}(G)=\Big\{v:\; v\in L^2(G),\;\; v_{x_i}\in L^2(G),\;\; v_{x_iy_j}\in L^2(G),$$

$$v_{y_j}\in L^2(G),\;\; i\in\{1,\ldots,n\},\;\; j\in\{1,\ldots,l\}\Big\},$$

$$H_0^1(\Omega)=\Big\{v: v\in H^1(\Omega),\;\; v\big|_{\partial\Omega}=0\Big\},$$

$$H_{1,0}^1(D)=\Big\{v: v\in H^1(D),\;\; v\big|_{\Gamma_1}=0\Big\},$$

$$V_3(Q_T)=\Big\{v: v\in L^q(Q_T)\cap L^2(Q_T),\;\; v_{x_i}\in L^p(Q_T),$$

$$v_{y_j}\in L^2(Q_T),\;\; i\in\{1,\ldots,n\},\;\; j\in\{1,\ldots,l\},\;\; v\big|_{S_T^1}=0,\;\; v\big|_{\Sigma_T}=0\Big\},$$

$$V_4(Q_T) = \Big\{ v : v \in L^q(Q_T) \cap L^2(Q_T),$$

$$v_{x_i} \in L^p(Q_T), \ \ i \in \{1, \dots, n\}, \ \ v\big|_{\Sigma_T} = 0 \Big\},$$

$$V_5(G) = \Big\{ v : v_{x_i} \in L^p(G), \ \ v\big|_{\partial\Omega \times D} = 0, \ \ i \in \{1, \dots, n\} \Big\}.$$

Позначимо через $V_5^*(G)$ простір лінійних неперервних функціоналів на $V_5(G)$ (спряжений простір до $V_5(G)$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — значення функціонала з простору $V_5^*(G)$ на функціях з $V_5(G)$ (назвемо його скалярним добутком між просторами $V_5^*(G)$ і $V_5(G)$), числа p' та q' такі, що виконуються співвідношення

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \qquad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1.$$

Через $L^r(0, T; X)$ та $C\big([0, T]; X\big)$, де $r \in \mathbb{N}$, X — банахів простір, позначимо простори функцій u, заданих на $[0, T]$ зі значеннями в X і таких, що

$$\big\| u \in L^r(0, T; X) \big\| = \left(\int\limits_0^T \big\| u(\cdot, \cdot, t); X \big\|^r dt \right)^{1/r}$$

та $\big\| u \in C\big([0, T]; X\big) \big\| = \max\limits_{[0,T]} \big\| u(\cdot, \cdot, t); X \big\|$.

Нехай $v \in V_5(G)$. Розглянемо детальніше простір $V_5(G)$. З його означення випливає, що $\int_G |v_{x_i}|^p dx\, dy < \infty$, тобто за теоремою Фубіні $\int_D \Big\{ \int_\Omega |v_{x_i}|^p dx \Big\} dy < < \infty$ і для майже всіх y функція $\int_\Omega |v_{x_i}|^p dx < \infty$. Оскільки $v\big|_{\partial\Omega \times D} = 0$, то з нерівності Фрідріхса [15, с. 44] випливає

$$\int\limits_\Omega |v|^p dx \le C \int\limits_\Omega |v_{x_i}|^p dx < \infty \quad \text{для майже всіх} \quad y \in D,$$

тобто $v(\cdot, y) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ для майже всіх $y \in D$ і $V_5(G) = L^p\big(D; W_0^{1,p}(\Omega)\big)$. Нормою цього простору буде $\big\| v; V_5(G) \big\| = \int_G \Big[|v|^p + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^p \Big] dx\, dy$. Тоді згідно з теоремою 1 [16, с. 160] спряжений простір $V_5^*(G)$ є банаховим.

Означення 1. *Функцію u з простору $V_3(Q_T) \cap C\big([0, T]; L^2(G)\big)$, $u_t \in \in L^{p'}\big((0, T); V_5^*(G)\big) + L^{r_0}(Q_T)$ назвемо розв'язком мішаної задачі* (1)–(4), *якщо вона задовольняє умову* (4) *та рівність*

$$\int\limits_0^T \langle u_t, v \rangle\, dt + \int\limits_{Q_T} \Bigg[\sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) u_{y_i} v + \sum_{i=1}^n a_i(x, y, t) |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ c(x, y, t) u v + g(x, y, t, u) v - f(x, y, t) v \Bigg] dx\, dy\, dt = 0$$

для всіх функцій $v \in V_4(Q_T)$. Тут $r_0 = \min\{2, q'\}$.

Доведемо існування розв'язку мішаної задачі (1)–(4). Для цього спочатку наведемо допоміжні леми, які нам будуть потрібні при доведенні розв'язності цієї задачі.

Лема 1. *Нехай функція w є розв'язком задачі* (1)–(4). *Тоді виконується нерівність*

$$\frac{1}{2}\int\limits_G |w(x,y,\tau)|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy +$$

$$+\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)w_{y_i}w+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)|w_{x_i}|^p+c(x,y,t)w^2+\right.$$

$$\left.+\,g(x,y,t,w)w-f(x,y,t)w+\frac{\alpha}{2}w^2\right]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt\geqslant$$

$$\geq\frac{1}{2}\int\limits_G |u_0(x,y)|^2\,dx\,dy \qquad (5)$$

для всіх $\tau\in(0,T]$ та довільного фіксованого числа α. У випадку, коли $u_0\equiv 0$, у формулі (5) *матиме місце знак рівності.*

Доведення. Продовжимо функції λ_i, a_i, c, g, f нулем при $t<0$, а функцію w, зберігши її неперервність, за змінною t. Зафіксуємо $\{s,\tau\}\subset(0,T)$, $s<\tau$. Введемо функції: θ_m — кусково-лінійна неперервна функція в $\mathbb{R}$, причому $\theta_m(t)=1$ при $s+\dfrac{2}{m}<t<\tau-\dfrac{2}{m}$, $\theta_m(t)=0$ при $t<s+\dfrac{1}{m}$ і при $t>\tau-\dfrac{1}{m}$, ρ_k — регуляризуюча послідовність в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_k(t)=\rho_k(-t)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_k(t)\,dt=1,\qquad \operatorname{supp}\rho_k\subset\left[-\frac{1}{k},\,\frac{1}{k}\right]$$

(див. [11, с. 225]).

Покладемо в означенні 1 $u=w$, $v=\big((w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k\big)\theta_m e^{-\alpha t}$ для $k>2m$, де символ $*$ означає згортку по t. Функція v за властивостями згортки належить до $C\big([0,T];L^2(G)\big)$ і $\rho_k*w\to w$ при $k\to\infty$ в $L^1(Q_T)$. Одержимо

$$\int\limits_0^T\big\langle w_t,\big((w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k\big)\theta_m\big\rangle e^{-\alpha t}\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)w_{y_i}\Big((w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k\Big)\theta_m+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}\Big(\big((w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k\big)\theta_m\Big)_{x_i}+$$

$$+\,c(x,y,t)w\big((w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k\big)\theta_m+$$

$$\left.+\big(g(x,y,t,w)-f(x,y,t)\big)\big((w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k\big)\theta_m\right]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt=0.$$

Перетворимо доданки цієї рівності, використавши властивості згортки:

$$I_1 \equiv \int_0^T \langle w_t, ((w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k)\theta_m \rangle e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= \int_0^T \langle \theta_m w_t, (w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k \rangle e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= \int_0^T \langle (\theta_m w)_t * \rho_k, (w\,\theta_m) * \rho_k \rangle e^{-\alpha t}\,dt -$$

$$- \int_0^T \langle \theta_m' w, (w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k \rangle e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= -\int_0^T \langle \theta_m' w, (w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k \rangle e^{-\alpha t}\,dt +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_0^T \langle (\theta_m w) * \rho_k, (w\,\theta_m) * \rho_k \rangle e^{-\alpha t}\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{Q_T} \theta_m' \theta_m w^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt + \frac{\alpha}{2} \int_{T} \theta_m^2 w^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

оскільки $\theta_m(T) = 0$, $\theta_m(0) = 0$,

$$I_2 \equiv \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) w_{y_i} ((w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k)\theta_m e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) w_{y_i} w (\theta_m)^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$I_3 \equiv \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) |w_{x_i}|^{p-2} w_{x_i} (((w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k)\theta_m)_{x_i} e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) (\theta_m)^2 |w_{x_i}|^p e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$I_4 \equiv \int_{Q_T} \big(c(x,y,t)w + g(x,y,t,w) - f(x,y,t)\big) \times$$

$$\times \big((w\,\theta_m) * \rho_k * \rho_k\big)\theta_m e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{Q_T} \big(c(x,y,t)w + g(x,y,t,w) - f(x,y,t)\big) w (\theta_m)^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt.$$

На підставі властивостей інтегралів $I_1 - I_4$ отримаємо рівність

$$-\int\limits_{Q_T}\theta_m'\theta_m w^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_T}w^2\theta_m^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)w_{y_i}w(\theta_m)^2+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)(\theta_m)^2|w_{x_i}|^p+\right.$$

$$\left.+\big(c(x,y,t)w+g(x,y,t,w)-f(x,y,t)\big)w(\theta_m)^2\right]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt=0.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $m\to\infty$, одержимо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{D}\big(w(x,y,\tau)\big)^2e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy+\frac{1}{2}\int\limits_{D}\big(w(x,y,s)\big)^2e^{-\alpha s}\,dx\,dy+$$

$$+\int\limits_{Q_{s,\tau}}\left[\frac{\alpha}{2}w^2+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)w_{y_i}w+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)|w_{x_i}|^p+\right.$$

$$\left.+\,c(x,y,t)w^2+g(x,y,t,w)w-f(x,y,t)w\right]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt=0 \qquad (6)$$

для всіх $s,\tau\in[0,T]$.

З означення 1 випливає, що $w\in L^\infty\big((0,T);L^2(G)\big)$. Тому можна знайти підпослідовність $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ таку, що $s_k\to 0$ при $k\to\infty$ і $w(\cdot,\cdot,s_k)$ збігається слабко в $L^2(G)$. Оскільки $w(\cdot,\cdot,s_k)\to u_0$ в $L^2(G)$ при $k\to\infty$, то $w(\cdot,\cdot,s_k)\to u_0$ слабко в $L^2(G)$ при $k\to\infty$. Зафіксуємо значення τ і виберемо $s=s_k$. Перейшови до границі в (6) при $k\to\infty$ та врахувавши слабку збіжність послідовності $w(\cdot,\cdot,s_k)$ до u_0 у просторі $L^2(G)$ при $k\to\infty$ і нерівність $\|u_0;L^2(G)\|\le\varliminf\limits_{k\to\infty}\|w(\cdot,\cdot,s_k);L^2(G)\|$ [16, с. 179], одержимо (5).

Якщо $u_0\equiv 0$, то, вибравши допустиме $s<0$, переконаємося, що перший доданок формули (6) дорівнює 0. Отже, в (5) матиме місце знак рівності.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональна база простору $H_0^1(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, $\{\psi^m\}_{m=1}^\infty$ — ортогональна база простору $H_{1,0}^1(D)$, ортонормована в $L^2(D)$. Тоді $\{\varphi^k\psi^m\}_{k,m=1}^\infty$ є базою простору $V^{1,1}(G)$.*

Доведення. Позначимо $w^{km}=\psi^m\varphi^k$, $(\cdot,\cdot)_X$ — скалярний добуток у просторі X $\Big(X\in\Big\{V^{1,1}(G),\ H_{1,0}^1(D),\ H_0^1(\Omega)\Big\}\Big)$. Скалярний добуток $(w^{km}$, $w^{k_1m_1})_{V^{1,1}(G)}$ у просторі $V^{1,1}(G)$ запишемо так (для $k\ne k_1$, або $m\ne m_1$):

$$(w^{km},w^{k_1m_1})=\int\limits_{G}\left[\sum_{i=1}^{n}w_{x_i}^{km}w_{x_i}^{k_1m_1}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}w_{x_iy_i}^{km}w_{x_iy_i}^{k_1m_1}+\right.$$

$$\left.+\,w^{km}w^{k_1m_1}+\sum_{j=1}^{l}w_{y_i}^{km}w_{y_i}^{k_1m_1}\right]dx\,dy\,dt=$$

$$=\int\limits_{G}\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}^k\psi^m\varphi_{x_i}^{k_1}\psi^{m_1}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\varphi_{x_i}^k\psi_{y_j}^m\varphi_{x_i}^{k_1}\psi_{y_j}^{m_1}+\right.$$

$$+\varphi^k\psi^m\varphi^{k_1}\psi^{m_1}+\sum_{j=1}^{l}\varphi^k\psi^m_{y_j}\varphi^{k_1}\psi^{m_1}_{y_j}\Bigg]\,dx\,dy\,dt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\varphi^k_{x_i}\varphi^{k_1}_{x_i}\,dx\int\limits_{D}\psi^m\psi^{m_1}\,dy+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\varphi^k_{x_i}\varphi^{k_1}_{x_i}\,dx\int\limits_{D}\sum_{j=1}^{l}\psi^m_{y_j}\psi^{m_1}_{y_j}\,dy+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^{k_1}\,dx\int\limits_{D}\psi^m\psi^{m_1}\,dy+\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^{k_1}\,dx\int\limits_{D}\sum_{j=1}^{l}\psi^m_{y_j}\psi^{m_1}_{y_j}\,dy=0.$$

Отже, система $\{w^{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$ є ортогональною в $V^{1,1}(G)$. Покажемо, що $\{w^{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$ є повною. Нехай в $V^{1,1}(G)$ існує g, ортогональна до всіх $\{w^{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$. Покладемо

$$F_k(y)=(g(\cdot,y),\varphi^k)_{H_0^1(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}g_{x_i}(x,y)\varphi^k_{x_i}+g\varphi^k\right]dx.$$

Тоді $F_k\in H^1_{0,1}(D)$ і

$$(F_k(y),\psi^m)_{H^1_{1,0}(D)}=\int\limits_{D}\left(F_k\psi^m+\sum_{i=1}^{l}F_{ky_i}\psi^m_{y_i}\right)dy=$$

$$=\int\limits_{D}\Bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}g_{x_i}(x,y)\varphi^k_{x_i}\psi^m\,dx+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}g_{x_iy_i}(x,y)\varphi^k_{x_i}\psi^m_{y_i}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}g(x,y)\varphi^k\psi^m\,dx+\int\limits_{\Omega}g_{y_i}\varphi^k\psi^m_{y_i}\,dx\Bigg]dy=(g,w^{km})_{V^{1,1}(G)}=0.$$

Оскільки $\{\psi^m\}_{k,m=1}^{\infty}$ є повною в $H^1_{1,0}(D)$, то $F_k(y)=0$. Але тоді

$$\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}g_{x_i}(x,y)\varphi^k_{x_i}+g\varphi\right]dx=(g(\cdot,y),\varphi^k)_{H_0^1(\Omega)}=0$$

згідно з повнотою системи $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H_0^1(\Omega)$. Тому $g(x,y)=0$ в G. Отже, система $\{\varphi^k\psi^m\}_{k,m=1}^{\infty}$ є повною в $V^{1,1}(G)$, а тому є базою в $V^{1,1}(G)$.

Лему доведено.

Перейдемо безпосередньо до доведення існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4).

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* A), P), C), G), L), F), U), S) *і, крім того,*

1) a_{iy_j}, a_{ix_i}, $c_{y_j}\in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_j}\in L^2(Q_T)$, $u_0\in V_2(G)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in$ $\in\{1,\ldots,l\}$;

2) *існує така стала* g^1, *що для майже всіх* $(x,y,t)\in Q_T$ *та всіх* $i\in\{1,\ldots,l\}$, $\xi\in\mathbb{R}^1$ *виконується нерівність* $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)|\leqslant g^1|\xi|^{q-1}$, *причому* $g^1=0$ *при* $q>2$;

3) $f|_{S_T^1}=0$;

4) $\dfrac{2(n+l)}{n+l+2} < p \leq 2$; *якщо* $q > 2$ *і* $n+l > 2$, *то* $q < \dfrac{2(n+l)}{n+l-2}$, *в іншому випадку* $1 < q < +\infty$.

Тоді існує розв'язок мішаної задачі (1) – (4).

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональна база простору $H_0^1(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, де φ^k — власні функції задачі

$$\Delta_x u = \nu u, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

які відповідають власним значенням ν_k; $\{\psi^m\}_{m=1}^{\infty}$ — ортогональна база простору $H_{1,0}^1(D)$, ортонормована в $L^2(D)$, де ψ^m, $m \geq 1$, — власні функції задачі

$$\Delta_y u = \mu u, \qquad u|_{\Gamma_1} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{7}$$

які відповідають власним значенням μ_m. Тут $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$; $\Delta_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial y_l^2}$. Тоді за лемою 2 $\left\{\varphi^k(x)\psi^m(y)\right\}_{k,m=1}^{\infty}$ — база простору $V^{1,1}(G)$, ортонормована в $L^2(G)$.

Нехай $u^N(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{N} c_{k,m}^N(t)\varphi^k(x)\psi^m(y)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_{k,m}^N(t)$, $k,m \subset \{1,\ldots,N\}$, є розв'язком задачі

$$\int\limits_G \Bigg[u_t^N \varphi^k(x)\psi^m(y) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^N \varphi^k(x)\psi^m(y) + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}^N|^{p-2} u_{x_i}^N \varphi_{x_i}^k(x)\psi^m(y) + \\ + c(x,y,t)u^N\varphi^k(x)\psi^m(y) + g(x,y,t,u^N)\varphi^k(x)\psi^m(y) - \\ - f(x,y,t)\varphi^k(x)\psi^m(y)\Bigg]\,dx\,dy = 0, \tag{8}$$

$$c_{k,m}^N(0) = u_{0,k,m}^N, \qquad u_0^N(x,y) = \sum_{k,m=1}^{N} u_{0,k,m}^N \varphi^k(x)\psi^m(y), \\ \lim_{N\to\infty} \|u_0^N - u_0\|_{V_2(G)} = 0. \tag{9}$$

Згідно з теоремою Каратеодорі [17, с. 54] розв'язок цієї задачі існує і належить простору $C^1([0,\tau_0])$, де $\tau_0 \leqslant T$. З оцінок, встановлених нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на увесь проміжок $[0,T]$.

Домножимо (8) на $c_{k,m}^N(t)e^{-\alpha t}$, де α — додатне число (вигляд якого вкажемо пізніше), підсумуємо по k і m від 1 до N та зінтегруємо по t від 0 до τ. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_t^N u^N + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^N u^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}^N|^p +$$

$$+\, c(x,y,t)(u^N)^2 + g(x,y,t,u^N)u^N - f(x,y,t)u^N\Bigg] e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt = 0. \qquad (10)$$

Перетворимо та оцінимо кожний доданок отриманої рівності окремо, врахувавши умови теореми:

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int\limits_{Q_\tau} u_t^N u^N e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_G |u^N|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_G |u_0^N|^2\,dx\,dy + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}_2 \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^N u^N e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial G} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)|u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dS\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_{iy_i}(x,y,t)|u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\lambda^1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

де $\lambda^1 = \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$,

$$\mathcal{I}_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}^N|^p e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant a_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^p e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}_4 \equiv \int\limits_{Q_\tau} c(x,y,t)|u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}_5 \equiv \int\limits_{Q_\tau} g(x,y,t,u^N)u^N e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant g_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^q e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}_6 \equiv -\int\limits_{Q_\tau} f(x,y,t)u^N e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |f(x,y,t)|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt.$$

На підставі оцінок $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_6$ з (10) одержимо

$$\int\limits_G |u^N|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[2g_0|u^N|^q + 2a_0\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^p + (\alpha - \lambda^1 + 2c_0 - 1)|u^N|^2\right]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_G |u^N_0|^2\,dx\,dy + \int\limits_{Q_\tau}|f(x,y,t)|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt. \tag{11}$$

Виберемо $\alpha = \lambda^1 - 2c_0 + 2$. Тоді з оцінки (11) випливає

$$\int\limits_G |u^N(x,y,\tau)|^2\,dx\,dy \leqslant M_1, \quad \tau\in[0,T], \tag{12}$$

$$\int\limits_{Q_T}\left(|u^N|^2 + |u^N|^q + \sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^p\right)dx\,dy\,dt \leqslant M_1, \tag{13}$$

де стала M_1 не залежить від N.

Домножимо (8) на власне значення задачі (7) $-\mu_m$ та замінимо вираз $-\mu_m u^N$ на $-\Delta_y u^N$ згідно з (7). Матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[-u^N_t\Delta_y u^N - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}\Delta_y u^N -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)|u^N_{x_i}|^{p-2}u^N_{x_i}\Delta_y u^N_{x_i} -$$

$$-c(x,y,t)u^N\Delta_y u^N - g(x,y,t,u^N)\Delta_y u^N + f(x,y,t)\Delta_y u^N\Bigg]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{14}$$

Оцінимо кожний доданок цієї рівності, врахувавши умови теореми:

$$\mathcal{I}_7 \equiv -\int\limits_{Q_\tau}u^N_t\sum_{i=1}^{l}u^N_{y_iy_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_G\sum_{i=1}^{l}|u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_G\sum_{i=1}^{l}|u^N_{0y_i}|^2\,dx\,dy +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}_8 \equiv -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}\sum_{j=1}^{l}u^N_{y_jy_j}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= -\int\limits_{S_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}u^N_{y_j}\cos(\nu,y_j)e^{-\alpha t}\,d\sigma\,dt +$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\lambda_{iy_j}(x,y,t)u^N_{y_i}u^N_{y_j}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\left[\lambda_i(x,y,t)|u^N_{y_j}|^2\right]_{y_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\lambda_{iy_i}(x,y,t)|u^N_{y_j}|^2e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt\equiv$$

$$\equiv\mathcal{I}^1_8+\mathcal{I}^2_8+\mathcal{I}^3_8+\mathcal{I}^4_8,$$

де

$$\mathcal{I}^4_8\geqslant-\frac{1}{2}l\lambda^1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\left|u^N_{y_i}\right|^2e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}^2_8\geqslant-l\lambda^1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\left|u^N_{y_i}\right|^2e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt.$$

Оскільки $\partial D\subset C^1$, то рівняння певної частини цієї поверхні можна записати у вигляді

$$\Psi(y)\equiv\psi(y_1,\ldots,y_{s-1},y_{s+1},\ldots,y_l)-y_s=0.$$

Тоді $\cos(\nu,y_i)=\omega(y)\Psi_{y_i}$, $i=1,\ldots,l$, де $\omega(y)=\left(\sum_{i=1}^{l}|\Psi_{y_i}(y)|^2\right)^{-1/2}$. Звідси $\cos(\nu,y_j)=\dfrac{\Psi_{y_j}}{\Psi_{y_i}}\cos(\nu,y_i)$, $i,j\in\{1,\ldots,l\}$.

Оскільки $u\big(x,y_1,\ldots,y_{s-1},\,\psi(y_1,\ldots,y_{s-1},\,y_{s+1},\ldots,y_l),\,y_{s+1},\ldots,y_l,t\big)=0$, то $u_{y_i}=u_{y_s}\Psi_{y_i}$, $i=1,\ldots,l$. Тому $u_{y_j}\cos(\nu,y_i)=u_{y_i}\cos(\nu,y_j)$. Тоді $\mathcal{I}^1_8+\mathcal{I}^3_8$ можна перетворити так:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S^1_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\Big[2\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}u^N_{y_j}\cos(\nu,y_j)-\lambda_i(x,y,t)|u^N_{y_j}|^2\cos(\nu,y_i)\Big]e^{-\alpha t}\,d\sigma\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{S^1_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|u^N_{y_j}|^2\cos(\nu,y_i)e^{-\alpha t}\,d\sigma\,dt,$$

а оскільки $\dfrac{\partial u^N}{\partial\nu}=\sum_{j=1}^{l}u^N_{y_j}\cos(\nu,y_j)=0$ на S^2_T, то

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S^2_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\Big[2\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}u^N_{y_j}\cos(\nu,y_j)-\lambda_i(x,y,t)|u^N_{y_j}|^2\cos(\nu,y_i)\Big]e^{-\alpha t}\,d\sigma\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{S^2_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}\left[2\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}\frac{\partial u^N}{\partial\nu}-\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}u^N_{y_j}\cos(\nu,y_j)\right]e^{-\alpha t}\,d\sigma\,dt=0.$$

Далі

$$\mathcal{I}_9 \equiv -\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u^N_{x_i}|^{p-2}u^N_{x_i}u^N_{y_jy_jx_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \left((p-1)a_0 - \frac{\delta}{2}a^1\right)\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{p-2}|u^N_{y_jx_i}|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt - \frac{a^1 l}{2\delta}M_1,$$

де $a^1 = \max\limits_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}|a_{iy_j}(x,y,t)|^2$, $\delta > 0$,

$$\mathcal{I}_{10} \equiv -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l} c(x,y,t)u^N u^N_{y_iy_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\left[c_{y_i}(x,y,t)u^N u^N_{y_i} + c(x,y,t)|u^N_{y_i}|^2\right]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}c^2\left(l\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt\right) +$$

$$+\, c_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,$$

де $c^2 = \max\limits_{i}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}|c_{y_i}(x,y,t)|$,

$$\mathcal{I}_{11} = -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l} g(x,y,t,u^N)u^N_{y_iy_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\Big(g(x,y,t,u^N)u^N_{y_i}\Big)_{y_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l} g_{y_i}(x,y,t,u^N)u^N_{y_i}e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l} g_{u^N}(x,y,t,u^N)|u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \equiv$$

$$\equiv \mathcal{I}^1_{11} + \mathcal{I}^2_{11} + \mathcal{I}^3_{11},$$

де

$$\mathcal{I}^1_{11} = 0, \qquad \mathcal{I}^3_{11} \geqslant 0.$$

Для $1 < q < 2$ маємо

$$\mathcal{I}_{11}^2 \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} g_{y_i}(x,y,t,u^N) u_{y_i}^N e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{i=1}^{l} \left(\int\limits_{Q_\tau} |g^1| e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \right)^{1/r} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^q e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \right)^{1/q'} \left(\int\limits_{Q_\tau} |u_{y_i}^N|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{lg^1 \operatorname{mes} Q_T}{r} - \frac{lM(\delta)}{q'} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^q e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt - \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^N|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt,$$

де $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{2}$, а для $q = 2$ —

$$\mathcal{I}_{11}^2 \geqslant -\frac{g^1}{2} \left[l \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^N|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \right].$$

Згідно з умовою теореми $\mathcal{I}_{11}^2 \equiv 0$ для $q > 2$ Далі

$$\mathcal{I}_{12} = \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{Q_\tau} f(x,y,t) u_{y_i y_i}^N e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{Q_\tau} \left(f(x,y,t) u_{y_i}^N \right)_{y_i} e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt -$$

$$- \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{Q_\tau} f_{y_i}(x,y,t) u_{y_i}^N e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^N|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |f_{y_i}(x,y,t)|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt.$$

На підставі оцінок $\mathcal{I}_7$–$\mathcal{I}_{12}$ з (14) одержимо

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^N|^2 e^{-\alpha \tau}\, dx\, dy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[(\alpha - 3l\lambda^1 - c^2 + 2c_0 - \delta - g^1) \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^N|^2 +$$

$$+ \left(2(p-1)a_0 - \delta a^1\right) \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^{p-2} |u_{x_i y_j}^N|^2 \Bigg) e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_G \sum_{i=1}^{l} |u_{0y_i}^N|^2\, dx\, dy + \frac{a^1 l}{\delta} M_1 + \frac{2lg^1 \operatorname{mes} Q_T}{r} +$$

$$+(c^2+g^1)l\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt+\frac{2lM(\delta)}{q'}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^q e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|f_{y_i}|^2e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt. \tag{15}$$

Виберемо $\delta=\big((p-1)a_0\big)/a^1$, $\alpha=3l\lambda^1-c^2+2c_0-\delta-g^1+1$. З оцінки (15) випливає

$$\int\limits_{G}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{y_i}(x,y,\tau)|^2dx\,dy\leqslant M_2,\quad \tau\in[0,T], \tag{16}$$

де стала M_2 не залежить від N.

Крім того, згідно з (13)

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)|u^N_{x_i}|^{p-2}u^N_{x_i}\right\|_{L^{p'}(Q_T)}=\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,y,t)\big)^{p'}|u^N_{x_i}|^p\,dx\,dy\,dt\leqslant M_3, \tag{17}$$

де стала M_3 не залежить від N.

Позначимо через $A_t(u)$ оператор

$$A_t(u)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\big)_{x_i},$$

A_t: $V^{1,1}(G)\to L^2(G)+V_5^*(G)$. Нехай P_N — оператор проектування $L^2(G)$ на $\{\varphi_k(x)\psi_m(y)\}_{k,m=1}^N$.

Оператори P_N рівномірно обмежені у просторах $\mathcal{L}\big(L^2(G),L^2(G)\big)$, $\mathcal{L}\big(L^{q'}(G),L^{q'}(G)\big)$, $\mathcal{L}\big(V^{1,1}(G),V^{1,1}(G)\big)$, $\mathcal{L}\big(L^2(G)+V_5^*(G),L^2(G)+V_5^*(G)\big)$.

З (8) випливає, що

$$u^N_t=-P_N\left(A_t(u^N)\right)-P_N\left(c(x,y,t)u^N\right)-P_N\left(g(x,y,t,u^N)\right)+P_N\left(f(x,y,t)\right).$$

Тому

$$\|u^N_t\|_V\leqslant M_4, \tag{18}$$

де $V=L^{r_0}(Q_T)+L^{p'}((0,T);V_5^*(G))$, а стала M_4 не залежить від N.

З оцінок (11), (12), (15) – (17) випливає існування такої підпослідовності послідовності $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ (за якою збережемо те саме позначення), що при $N\to\infty$

$$u^N\to u\quad \text{*-слабко в}\quad L^\infty\big((0,T);L^2(G)\big),$$

$$u^N\to u\quad \text{слабко в}\quad L^2(Q_T)\cap L^q(Q_T),$$

$$u^N_{x_i}\to u_{x_i}\quad \text{слабко в}\quad L^p(Q_T),$$

$$u^N_{y_j}\to u_{y_j}\quad \text{слабко в}\quad L^2(Q_T),$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)|u^N_{x_i}|^{p-2}u^N_{x_i}\to\sum_{i=1}^{n}\chi_i\quad \text{слабко в}\quad L^{p'}(Q_T),$$

$$u_t^N \to u_t \quad \text{слабко в} \quad V,$$

$i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$. Для u^N виконуються вкладення

$$u_t^N \in V \subset L^s((0,T); V_5^*(G) + L^{r_0}(G)),$$

$$u^N \in V_3(Q_T) \subset L^p((0,T); V_5(G)) \cap L^{r_0'}(Q_T) \subset$$

$$\subset L^{s_1}\big((0,T); V_5(G) \cap L^{r_0'}(G)\big) \subset L^{s_1}\big((0,T); V_5(G) \cap L^2(G)\big),$$

де $s = \min\{p', r_0\}$, $s_1 = \min\{p, r_0'\}$. Оскільки $V_5(G) \cap L^2(G) \subset L^2(G) \subset V_5^*(G) + L^{r_0}(G)$ і вкладення $V_5(G) \cap L^2(G) \subset L^2(G)$ компактне за умови $p > \dfrac{2(n+l)}{n+l+2}$, то згідно з теоремою про компактність [11, с. 70] послідовність $u^N \to u$ при $N \to \infty$ в $L^{s_1}\big((0,T); L^2(G)\big)$ і майже скрізь в Q_T. Тому згідно з умовою G) та знайденими збіжностями $g(x,y,t,u^N) \to g(x,y,t,u)$ в $L^{q'}(Q_T)$.

Домножимо (8) на довільну функцію $z_{k,m}^{N_0} \in C^1([0,T])$, підсумуємо по k, m від 1 до N_0 та зінтегруємо по t від 0 до T. Зауважимо, що простір $V^{1,1}(G)$ компактно вкладений у простір $V_4(G) = \{v\colon v \in L^q(G) \cap L^2(G),\ v_{x_i} \in L^p(G),\ i = 1, \ldots, n,\ v|_{\partial\Omega \times D}\} = 0$ за умови $q < \dfrac{2(n+l)}{n+l-2}$ для $q > 2$ і $n + l > 2$ та $q < \infty$ — в іншому випадку. Перейшовши до границі при $N \to \infty$ і врахувавши щільність множини

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{N_0}, \qquad \mathcal{M}_{N_0} = \left\{ w\colon w(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{N_0} z_{k,m}^{N_0}(t)\varphi^k(x)\psi^m(y) \right\}$$

у просторі $V_4(Q_T)$, отримаємо рівність

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle\, dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i=1}^{n} \chi_i v_{x_i} + c(x,y,t)uv + \right.$$

$$\left. + \, g(x,y,t,u)v - f(x,y,t)v \right] dx\, dy\, dt = 0, \tag{19}$$

що справджується для всіх функцій $v \in V_4(Q_T)$.

Розглянемо послідовність

$$0 \le X_N =$$

$$= \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(x,y,t) \big|u_{x_i}^N\big|^{p-2} u_{x_i}^N - a_i(x,y,t) \big|\xi_{x_i}\big|^{p-2} \xi_{x_i} \Big) \big(u_{x_i}^N - \xi_{x_i}\big) dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(x,y,t) \big|u_{x_i}^N\big|^{p} -$$

$$- a_i(x,y,t) \big|\xi_{x_i}\big|^{p-2} \xi_{x_i} \big(u_{x_i}^N - \xi_{x_i}\big) - a_i(x,y,t) \big|u_{x_i}^N\big|^{p-2} u_{x_i}^N \xi_{x_i} \Big) dx\, dy\, dt. \tag{20}$$

З (8) випливає

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)\big|u^N_{x_i}\big|^p \, dx\, dy\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \Bigg[-u^N_t u^N - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u^N_{y_i} u^N - c(x,y,t)|u^N|^2 -$$

$$- g(x,y,t,u^N)u^N + f(x,y,t)u^N \Bigg] dx\, dy\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{G} |u^N|^2 \, dx\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{G} |u^N_0|^2 \, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \Bigg[- \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u^N_{y_i} u^N - c(x,y,t)|u^N|^2 -$$

$$- g(x,y,t,u^N)u^N + f(x,y,t)u^N \Bigg] dx\, dy\, dt. \tag{21}$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha = 0$ і (21), з (20) маємо

$$0 \leqslant \liminf_{N\to\infty} X_N = -\frac{1}{2} \int\limits_{G} |u|^2 \, dx\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{G} |u_0|^2 \, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \Bigg[- \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u - c(x,y,t)|u|^2 - g(x,y,t,u)u + f(x,y,t)u \Bigg] dx\, dy\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \left[-a_i(x,y,t)|\xi_{x_i}|^{p-2} \xi_{x_i} (u_{x_i} - \xi_{x_i}) - \chi_i \xi_{x_i} \right] dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \big(-a_i(x,y,t)|\xi_{x_i}|^{p-2} \xi_{x_i} + \chi_i \big)(u_{x_i} - \xi_{x_i})\, dx\, dy\, dt.$$

Вибравши $\chi_i = u_{x_i} - \varkappa w_{x_i}$, $w \in V_3(Q_T)$, $\varkappa > 0$, поділивши отриману рівність на $\varkappa$ та спрямувавши $\varkappa$ до 0, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i.$$

Зазначимо, що $u_t \in L^{p'}\big((0,T);\ V_5^*(G)\big) + L^{r_0}(Q_T)$, а $u \in L^p\big((0,T);\ V_5(G)\big) \cap \cap L^{r_0'}(Q_T)$. Тому на підставі теореми 1.17 [15] $u \in C\big([0,T]; L^2(G)\big)$. Крім того, як в [11, с. 27], доводимо, що $u(x,y,0) = u_0(x,y)$. Тому u є розв'язком мішаної задачі (1)–(4).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* A), B), C), G), L), F), U), S). *Тоді задача* (1)–(4) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай існують два розв'язки задачі (1) – (4): u_1 та u_2. Тоді їхня різниця $u \stackrel{\mathrm{df}}{=} u_1 - u_2$ задовольняє рівність

$$\int\limits_0^T \langle u_t, v\rangle\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \Bigg[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)\big(|u_{1x_i}|^{p-2} u_{1x_i} - |u_{2x_i}|^{p-2} u_{2x_i}\big) v_{x_i} +$$

$$+ c(x,y,t) uv + \big(g(x,y,t,u_1) - g(x,y,t,u_2)\big) v \Bigg]\, dx\, dy\, dt = 0$$

та нульову початкову умову. Враховуючи умови, накладені на коефіцієнти рівняння (1), як і при доведенні нерівності (5), одержуємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_G u^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy + \int\limits_{Q_T} \Bigg[\frac{\alpha}{2} u^2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)(|u_{1x_i}|^{p-2} u_{1x_i} -$$

$$- |u_{2x_i}|^{p-2} u_{2x_i}) u_{x_i} + c(x,y,t) u^2 + (g(x,y,t,u_1) - g(x,y,t,u_2)) u \Bigg]\, dx\, dy\, dt = 0.$$

Звідси, як і з оцінки (11) для $\alpha = \lambda^1 - 2c_0 + 2$, отримуємо

$$\int\limits_G |u(x,y,\tau)|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy \leqslant 0, \quad \tau \in [0,T],$$

тобто $u = 0$, отже, і $u_1 = u_2$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Нехай $l = 1$, $n = 1$, область $Q = (0,x_0) \times (0,y_0) \times (0,T)$, де x_0, y_0, T — скінченні числа. Окремим випадком рівняння (1) є рівняння Колмогорова, яке описує випадкові рухи:

$$u_t + x u_y + a^2 u_{xx} = f(x,y,t), \qquad a = \text{const}. \tag{22}$$

Умови (2) – (4) для цього рівняння матимуть вигляд

$$u(x,0,t) = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in (0,x_0) \times (0,T), \tag{23}$$

$$u(0,y,t) = 0, \qquad u(x_0,y,t) = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad (y,t) \in (0,y_0) \times (0,T), \tag{24}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad \text{для майже всіх} \quad (x,y) \in (0,x_0) \times (0,y_0). \tag{25}$$

Згідно з умовами теорем 1 та 2 існуватиме єдина функція u з простору $V_3(Q_T) = \{v\colon v,\ v_x,\ v_y \in L^2(Q_T),\ v(x,y_0,t) = 0,\ v(0,y,t) = v(x_0,y,t) = 0\} \cap C\big((0,T); L^2(G)\big)$, яка буде розв'язком мішаної задачі (22) – (25) за умов $f(x,y_0,t) \equiv 0$, $f_y \in L^2(Q_T)$, u_0, $u_{0y} \in L^2(G)$.

Зауважимо, що задачу (22), (23), (25) з крайовими умовами $u(0,y,t) = 0$, $u_x(x_0,y,t) = 0$ для майже всіх $(y,t) \in (0,y_0) \times (0,T)$ розглянуто у праці [10].

***Зауваження* 2.** Нехай $p = 2$, $q = 2$. Тоді рівняння (1) є лінійним, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією:

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,y,t)u_{x_i}\right)_{x_i} +$$

$$+ c(x,y,t)u + g(x,y,t)u = f(x,y,t), \tag{26}$$

$$u|_{S_T^1} = 0, \tag{27}$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \tag{28}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y). \tag{29}$$

При виконанні умов теореми 1 існує функція $u \in \{v\colon v, v_{x_i}, v_{y_j} \in L^2(Q_T),$ $i \in \{1,\ldots,n\},\ j \in \{1,\ldots,l\},\ v\big|_{S_T^1} = 0,\ v\big|_{\Sigma_T} = 0\}$, яка є єдиним розв'язком задачі (26) – (29).

Задачу Коші для рівняння (26) та його узагальнень розглянуто у працях [3, 6 – 8].

***Зауваження* 3.** Крайові умови за змінною y формулюються на частині межі області D. Наведемо приклади поверхні S_T^1, на якій задано крайові умови (2), залежно від форми та розмірності області D.

1. Нехай $D \in \mathbb{R}^1$, тобто $D = (0, y_0)$, де y_0 — скінченне число. Введемо області

$$O_1 = \Big\{(x,t) \in \Omega \times (0,T):\ \lambda_1(x,0,t) > 0\Big\},$$

$$O_2 = \Big\{(x,t) \in \Omega \times (0,T):\ \lambda_1(x,y_0,t) < 0\Big\}.$$

Тоді $S_T^1 = O_1 \cup O_2$.

2. Нехай $D \in \mathbb{R}^2$, наприклад $D = (0, y_1^0) \times (0, y_2^0)$, де $y_1^0,\ y_2^0$ — скінченні числа. Введемо області

$$O_1 = \Big\{(x,y_2,t) \in \Omega \times (0,y_2^0) \times (0,T):\ \lambda_1(x,y_1^0,y_2,t) < 0\Big\},$$

$$O_2 = \Big\{(x,y_1,t) \in \Omega \times (0,y_1^0) \times (0,T):\ \lambda_2(x,y_1,y_2^0,t) < 0\Big\},$$

$$O_3 = \Big\{(x,y_2,t) \in \Omega \times (0,y_2^0) \times (0,T):\ \lambda_1(x,0,y_2,t) > 0\Big\},$$

$$O_4 = \Big\{(x,y_1,t) \in \Omega \times (0,y_1^0) \times (0,T):\ \lambda_2(x,y_1,0,t) > 0\Big\}.$$

Тоді $S_T^1 = O_1 \cup O_2 \cup O_3 \cup O_4$.

3. Нехай $D \in \mathbb{R}^2$, наприклад, $D = \big\{(y_1,y_2)\colon y_1^2 + y_2^2 < 1\big\}$.

Тоді $S_T^1 = \big\{(x,y_1,y_2,t) \in Q_T\colon\ \lambda_1(x,y_1,y_2,t)y_1 + \lambda_2(x,y_1,y_2,t)y_2 < 0$ для $y_1^2 + y_2^2 = 1\big\}$.

***Зауваження* 4.** Розглянемо мішану задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t) \qquad (30)$$

з умовами (2) – (4). Нехай існує хоча б одне b_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, яке не є тотожним нулем. Крім того, виконується умова

B): $b_i, b_{ix_i} \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Тоді за умов теореми 1, умови B) та при $q \geqslant p'$ існує розв'язок задачі (30), (2) – (4). За умов теореми 2 та умови B) при $q \geqslant p'$ цей розв'язок є єдиним.

1. *Kolmogorov A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116 – 117.
2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.
3. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance // Nonlinear Analysis. – 2001. – **47**. – P. 491 – 502.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p.
5. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear Problems in Math. Phys. and Related Top. II. In honour of Proff. O. A. Ladyzhenskaya. – New York: Kluwer Acad. Publ., 2002. – **2**. – P. 243 – 265.
6. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісн. – 2004. – № 1. – С. 61 – 68.
7. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Допов. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11 – 16.
8. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 7. – С. 1316 – 1331.
9. *Пятков С. Г.* Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения // Некласические уравнения и уравнения смешаного типа. – Новосибирск, 1990. – С. 182 – 197.
10. *Амиров Ш.* Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограниченной области // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск, 1984. – С. 173 – 179.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
12. *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 27 – 34.
13. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 97 – 103.
14. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Different. Equat. – 1998. – **23**, № 5, 6. – P. 847 – 868.
15. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
16. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
17. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958. – 474 с.

Одержано 14.03.2005