УДК 519.24

І. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД НАПІВМАРКОВСЬКОЇ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ*

Both regular and singular components of an asymptotic expansion of the semi-Markov random evolution are found, the regularity of boundary conditions is shown. In addition, by using boundary conditions for a singular component of the expansion, an algorithm for finding initial conditions for $t = 0$ is proposed.

Знайдено регулярну та сингулярну складові розкладу напівмарковської випадкової еволюції, показано регулярність граничних умов. Крім того, з використанням граничних умов для сингулярної частини розкладу запропоновано алгоритм для знаходження початкових умов при $t = 0$ в явному вигляді.

1. Вступ. Стохастична система у схемі серій задається розв'язком еволюційного рівняння в евклідовому просторі R^d, $d \geq 1$:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = v\left(u^\varepsilon(t);\, \kappa\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right). \tag{1}$$

Вектор-функція $v(u; x) = (v_k(u; x),\, k = \overline{1, d})$, $u \in R^d$, $x \in E$, задовольняє умови існування глобального розв'язку систем [1]

$$\frac{du_x(t)}{dt} = v(u_x(t); x), \qquad u_x(0) = u \in R^d, \quad x \in E. \tag{2}$$

Процес, що перемикає швидкості $\kappa(t)$, $t \geq 0$, є напівмарковським [2] у стандартному фазовому просторі станів $(E, \mathscr{E})$ і задається напівмарковським ядром [1]

$$Q(x, B, t) = P(x, B) F_x(t), \qquad x \in E, \quad B \in \mathscr{E}, \quad t \geq 0,$$

що визначає ймовірності переходу процесу марковського відновлення κ_n, τ_n, $n \geq$ ≥ 0:

$$Q(x, B, t) = P\{\kappa_{n+1} \in B,\, \theta_{n+1} \leq t \mid \kappa_n = x\} =$$
$$= P\{\kappa_{n+1} \in B \mid \kappa_n = x\} P\{\theta_{n+1} \leq t \mid \kappa_n = x\}.$$

Стохастичне ядро

$$P(x, B) = P\{\kappa_{n+1} \in B \mid \kappa_n = x\}$$

задає перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова $\kappa_n = \kappa(\tau_n)$, $n \geq 0$; функції розподілу

$$F_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t \mid \kappa_n = x\} =: P\{\theta_x \leq t\}, \quad x \in E,$$

задають розподіли часів перебування θ_x у станах $x \in E$.

Генератор асоційованого марковського процесу має вигляд

$$Q = q(x)(P - I),$$

де оператор перехідних імовірностей

$$Pf(x) = \int_E P(x, dy) f(y), \quad x \in E,$$

* Виконано при частковій підтримці проекту DFG 436 UKR 113/70/0-1.

$$q(x) = \frac{1}{m_1(x)}, \qquad m_k(x) = \int_0^\infty s^k F_x(ds).$$

Позначимо через $\pi(B)$, $B \in \mathscr{E}$, стаціонарний розподіл напівмарковського процесу $\kappa(t)$, $t \geq 0$, що задовольняє співвідношення

$$\pi(dx) = \frac{\rho(dx) m_1(x)}{\hat{m}},$$

$$\hat{m} = \int_E \rho(dx) m_1(x),$$

$\rho(B)$, $B \in \mathscr{E}$, є стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова κ_n, $n \geq$ ≥ 0, що визначається формулою

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B), \qquad \rho(E) = 1.$$

Метою роботи є побудова асимптотичного розкладу напівмарковської випадкової еволюції $\Phi_t^\varepsilon(u, x) = E\left[\varphi(u^\varepsilon(t)) \mid u^\varepsilon(0) = u,\ \kappa(0) = x\right]$ у вигляді

$$\Phi_t^\varepsilon(u, x) = U^\varepsilon(t) + W^\varepsilon(\tau) = U_0(t) + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k (U_k(t) + W_k(\tau)), \tag{3}$$

де $\tau = t/\varepsilon$.

***Зауваження* 1.** Початкові умови мають вигляд

$$\Phi_0^\varepsilon(u, x) = U^\varepsilon(0) + W^\varepsilon(0) = \varphi(u),$$

звідки випливає

$$U_0(0) = \varphi(u),$$

$$U_k(0) + W_k(0) = 0, \quad k \geq 1.$$

Сингулярна частина розкладу задовольняє граничні умови:

$$W^\varepsilon(\infty) = 0.$$

Асимптотичний розклад розв'язків інтегральних рівнянь досліджено у багатьох роботах [3, 4]. Також відомими є результати асимптотичного розкладу деяких характеристик марковських та напівмарковських процесів, зокрема функціоналів від еволюції [5 – 7].

У роботах [5, 6] розглядались асимптотичні розклади для розподілів часу поглинання відповідно марковського та напівмарковського процесу. Диференціальне рівняння, яке виникає у марковському випадку, в [5] мало вигляд

$$\frac{du_t^\varepsilon}{dt} = (\varepsilon^{-1} Q + Q_1) u_t^\varepsilon.$$

Більш загальне рівняння

$$\frac{d\Phi_t^\varepsilon}{dt} = (\varepsilon^{-1} Q + \mathbb{V}(x)) \Phi_t^\varepsilon$$

буде розглянуто в окремій публікації. В цій роботі ми будемо шукати асимптотичний розклад інтегрального рівняння марковського відновлення для напівмарковської еволюції.

На відміну від багатьох інших робіт буде знайдено регулярну та сингулярну складові розкладу, показано регулярність граничних умов. Крім того, на підставі граничних умов для сингулярної частини розкладу (див. зауваження 1) ми запропонуємо алгоритм для знаходження початкових умов при $t = 0$ в явному вигляді. При цьому початкові умови для регулярної та сингулярної частин розв'язку у просторі значень оператора Q забезпечують виконання початкової умови із зауваження 1.

Основний результат буде доведено в кілька етапів у вигляді лем. Сформулюємо його попередньо у вигляді теореми.

Теорема. *За умов рівномірної ергодичності напівмарковського процесу та існування глобального розв'язку систем* (2) *асимптотичний розклад напівмарковської еволюції*

$$\Phi_t^{\varepsilon}(u, x) = E\left[\varphi(u^{\varepsilon}(t)) \mid u^{\varepsilon}(0) = u,\ \kappa(0) = x\right]$$

має вигляд

$$\Phi_t^{\varepsilon}(u, x) = U^{\varepsilon}(t) + W^{\varepsilon}(\tau) = U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (U_k(t) + W_k(\tau)),$$

де

$$U_0(t) = c_0(t)\mathbf{1},$$

функція $c_0(t)$ *задовольняє рівняння*

$$\hat{\upsilon}(u)\frac{\partial c_0(t)}{\partial u} - \frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = 0$$

з початковою умовою

$$c_0(0) = \varphi(u),$$

де $\hat{\upsilon}(u) := \int_E \pi(dx)\,\upsilon(u, x)$.

Наступні регулярні члени мають вигляд

$$U_k(t) = \mathbb{R}_0\left(\sum_{n=1}^{k} \mu_n(x) L_n U_{k-n}(t)\right) + c_k(t),$$

де згідно з [8] $\mathbb{R}_0 = [Q + \Pi]^{-1} - \Pi$,

$$\mu_k(x) = \frac{m_k(x)}{k!\,m_1(x)}, \qquad \mu_1(x) := 1, \qquad L_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \mathbb{V}^n(x) P U^{(k-n)}(t).$$

Функції $c_k(t)$ *задовольняють рівняння*

$$\hat{L}_1 c_k(t) = -\Pi\mathfrak{L}_k c_0(t) - \ldots - \Pi\mathfrak{L}_1 c_{k-1}(t),$$

де

$$\Pi\mathfrak{L}_k := \sum_{k=1}^{k} \Pi\mu_n(x) L_n \mathbb{R}_0 \mathfrak{L}_{k-n} + \Pi\mu_{k+1}(x) L_{k+1}, \qquad \Pi\mathfrak{L}_0 := \Pi L_1.$$

Сингулярні члени мають вигляд

$$W_1(\tau) = \mathbf{R}_0\left[\psi^1(\tau) + \overline{F}_x(\tau) P U_1(0) + \int_{\tau}^{\infty} (\tau - s) F_x(ds) P U_0'(0)\right],$$

$$W_k(\tau) = \mathbf{R}_0\left[\psi^k(\tau) - \psi_0^k(\tau) + \overline{F}_x(\tau) P U_k(0) + \sum_{n=1}^{k} \int_{\tau}^{\infty} (\tau - s)^n F_x(ds) P U_{k-n}^{(n)}(0)\right],$$

де $\mathbf{R_0}$ — *матриця марковського відновлення* [9]

$$\mathbf{Q}W(\tau) = \int_0^\infty F_x(ds)PW(\tau - s),$$

$$\psi^k(\tau) = \overline{F}^{(k)}(\tau)\mathbb{V}^k P\varphi(u), \qquad \psi_0^k(\tau) = \sum_{r=1}^{k-1}\mathbf{Q}^r W_{k-r}(\tau),$$

$$\overline{F}^{(k)}(\tau) = \int_\tau^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\overline{F}_x(s)\,ds, \qquad \mathbf{Q}^r W(\tau) = \int_0^\infty \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r PW(\tau - s).$$

Початкові умови є такими:

$$(I - \Pi)\big[U_k(0) + W_k(0)\big] = 0,$$

$$c_k(0) = -\,\Pi W_k(0),$$

$$U_k(0) = \left[\sum_{r=0}^{k-1}\int \pi(dx)\nu_{k-r}(x)L_{k-r}(x)U_r(0) \;-\right.$$

$$\left. -\;\sum_{r=1}^{k-1}\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r(x)PW_{k-r}(\tau - s)\,d\tau\right]\Big/\hat{m},$$

де $\nu_k(x) = (-1)^k\big[m_k(x) - \mu_{k+1}(x)\big]$.

2. Рівняння марковського відновлення. Детермінована еволюція

$$\Phi_x(t,u) = \varphi(u_x(t)), \qquad u_x(0) = u$$

(див. (2)) породжує відповідну напівгрупу

$$\mathbb{V}_t(x)\varphi(u) := \varphi(u_x(t)), \qquad u_x(0) = u,$$

її генератор має вигляд

$$\mathbb{V}(x)\varphi(u) = \upsilon(u,x)\varphi'(u).$$

Лема 1. *Напівмарковська еволюція* $\Phi_t^\varepsilon(u,x)$ *задовольняє рівняння*

$$\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x) - \Phi_t^\varepsilon(u,x) =$$

$$= \varepsilon\mathbb{V}(x)\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\varphi(u)\,ds, \tag{4}$$

де $\tau = t/\varepsilon$.

Доведення. З урахуванням моменту першого стрибка перемикаючого процесу еволюція має вигляд

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = E_{u,x}\big[\varphi(u^\varepsilon(t));\,\theta_x > t/\varepsilon\big] + E_{u,x}\big[\varphi(u^\varepsilon(t));\,\theta_x \le t/\varepsilon\big] =$$

$$= \overline{F}_x(t/\varepsilon)\mathbb{V}_t(x)P\varphi(u) + \int_0^{t/\varepsilon} F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)P\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x).$$

Таким чином,

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) - \int_0^{t/\varepsilon} F_x(ds)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,P\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x) = \overline{F}_x(\tau)\,\mathbb{V}_t(x)\,P\varphi(u).$$

Продовживши за неперервністю $\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x) = \varphi(u)$, $t - \varepsilon s \le 0$, перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) - \int_0^\infty F_x(ds)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,P\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x) =$$

$$= \overline{F}_x(\tau)\,\mathbb{V}_t(x)\,P\varphi(u) - \int_\tau^\infty F_x(ds)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,P\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x) =$$

$$= \overline{F}_x(\tau)\,\mathbb{V}_t(x)\,P\varphi(u) - \int_\tau^\infty F_x(ds)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,P\varphi(u).$$

Отже, маємо

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) - \int_0^\infty F_x(ds)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,P\Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon(u,x) = \overline{F}_x(\tau)\,\mathbb{V}_t(x)\,P\varphi(u) -$$

$$- \overline{F}_x(s)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,P\varphi(u)\big|_\tau^\infty - \varepsilon\mathbb{V}(x)\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\,\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)\,\varphi(u)\,ds.$$

Після скорочення доданків отримуємо (4).

Лему доведено.

3. Рівняння для регулярних членів. Уведемо позначення: Q — генератор асоційованого марковського процесу,

$$\mu_k(x) = \frac{m_k(x)}{k!\,m_1(x)}, \quad \mu_1(x) := 1, \quad L_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \mathbb{V}^n(x)\,PU^{(k-n)}(t).$$

Лема 2. *Рівняння для регулярних членів асимптотики мають вигляд*

$$QU(t) = \left[\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k m_k(x)\,L_k\right] U(t). \tag{5}$$

Доведення. Скористаємось рівністю

$$aPb - 1 = (P-1) + (a-1)P + P(b-1) + (a-1)P(b-1),$$

де

$$a = \mathbb{V}_{\varepsilon s}(x) = I + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x), \qquad b = \Phi_{t-\varepsilon s}^\varepsilon = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\Phi_t^{(k)}(u,x).$$

Перепишемо (4) у вигляді

$$(P-I)\Phi_t^\varepsilon(u,x) + \int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)\right) P\Phi_t^\varepsilon(u,x) +$$

$$+ \int_0^\infty F_x(ds)\,P\left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\Phi_t^{(k)}(u,x)\right) +$$

$$+\int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)\right)P\left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\Phi_t^{(k)}(u,x)\right) =$$

$$= \varepsilon\mathbb{V}(x)\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon s}(x)P\varphi(u)\,ds.$$

Підставивши вираз (3) для регулярних членів, отримаємо

$$(P-I)U(t) = -\int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)\right)PU(t) -$$

$$-\int_0^\infty F_x(ds)P\left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\varepsilon^k \frac{s^k}{k!}U^{(k)}(t)\right) -$$

$$-\int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)\right)P\left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\varepsilon^k \frac{s^k}{k!}U^{(k)}(t)\right).$$

Зібравши члени при однакових степенях ε, будемо мати

$$(P-I)U(t) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k\left[-\int_0^\infty F_x(ds)\frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)PU(t) -\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty F_x(ds)\left(\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\mathbb{V}^n(x)PU^{(k-n)}(t)\right) - \int_0^\infty (-1)^k F_x(ds)P\frac{s^k}{k!}U^{(k)}(t)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{m_k(x)}{k!}L_kU(t).$$

Поділивши останню рівність на $m_1(x)$, отримаємо (5).

Якщо підставити в (5) розклад $U^\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k U_k(t)$ та зібрати члени при однакових степенях ε, то одержимо наслідок.

***Наслідок* 1.** *Регулярні члени асимптотики задовольняють систему рівнянь*

$$QU_0(t) = 0,$$

. . . .

$$QU_k(t) = \sum_{n=1}^k \mu_n(x)L_nU_{k-n}(t), \quad k \geq 1, \tag{6}$$

. . . .

З першого рівняння системи (6) маємо $U_0(t) \in N_Q$. Таким чином, можемо покласти

$$U_0(t) = c_0(t)\mathbf{1},$$

де $c_0(t)$ — скалярна функція, що не залежить від x.

З умови розв'язності для другого рівняння системи отримуємо рівняння для $c_0(t)$:

$$\hat{L}_1c_0(t) = 0,$$

де

$$\hat{L}_1 c_0(t) := \hat{\upsilon}(u)\frac{\partial c_0(t)}{\partial u} - \frac{\partial c_0(t)}{\partial t}, \qquad \hat{\upsilon}(u) := \Pi\upsilon(u,x) := \int_E \pi(dx)\upsilon(u,x).$$

***Зауваження* 2.** Рівняння для $c_0(t)$ узгоджується з теоремою усереднення [1], яка стверджує, що для напівмарковської випадкової еволюції

$$\Phi_t^{\varepsilon}(u,x) \Rightarrow \hat{\Phi}_t(u), \qquad \varepsilon \to 0,$$

гранична еволюція задовольняє рівняння

$$\frac{d\Phi_t^{\varepsilon}(u)}{dt} = \hat{\mathbb{V}}\Phi_t^{\varepsilon}(u),$$

де

$$\hat{\mathbb{V}}\varphi(u) := \hat{\upsilon}(u)\varphi'(u).$$

***Наслідок* 2.** *Функція $c_0(t)$ задовольняє рівняння з початковою умовою*

$$\hat{\upsilon}(u)\frac{\partial c_0(t)}{\partial u} - \frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = 0,$$

$$c_0(0) = \varphi(u).$$

Для $U_1(t)$ отримуємо

$$U_1(t) = \mathbb{R}_0 L_1 U_0(t) + c_1(t) = \mathbb{R}_0 L_1 c_0(t) + c_1(t).$$

Використовуючи умову розв'язності для третього рівняння системи (4), маємо

$$\Pi L_1 \mathbb{R}_0 L_1 c_0(t) + \Pi\mu_2(x) L_2 c_0(t) + \hat{L}_1 c_1(t) = 0,$$

або

$$\hat{L}_1 c_1(t) = -\Pi\mathfrak{L}_1 c_0(t),$$

де $\Pi\mathfrak{L}_1 := \Pi L_1 \mathbb{R}_0 L_1 + \Pi\mu_2(x) L_2$.

Аналогічно для $U_k(t)$ одержуємо

$$U_k(t) = \mathbb{R}_0\left(\sum_{n=1}^{k}\mu_n(x) L_n U_{k-n}(t)\right) + c_k(t),$$

$$\hat{L}_1 c_k(t) = -\Pi\mathfrak{L}_k c_0(t) - \ldots - \Pi\mathfrak{L}_1 c_{k-1}(t),$$

де

$$\Pi\mathfrak{L}_k := \sum_{n=1}^{k}\Pi\mu_n(x) L_n \mathbb{R}_0 \mathfrak{L}_{k-n} + \Pi\mu_{k+1}(x) L_{k+1}, \qquad \Pi\mathfrak{L}_0 := \Pi L_1.$$

4. Рівняння для сингулярних членів. Використаємо позначення

$$\mathbf{Q}W(\tau) = \int_0^{\infty} F_x(ds) P W(\tau - s),$$

$$\psi^k(\tau) = \overline{F}^{(k)}(\tau)\mathbb{V}^k P\varphi(u), \qquad \psi_0^k(\tau) = \sum_{r=1}^{k-1}\mathbf{Q}^r W_{k-r}(\tau),$$

$$\overline{F}^{(k)}(\tau) = \int_\tau^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\overline{F}_x(s)\,ds, \qquad \mathbf{Q}^r W(\tau) = \int_0^\infty \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r P W(\tau - s),$$

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Лема 3. *Рівняння для сингулярних членів мають вигляд*

$$(\mathbf{Q} - I)\,W_1(\tau) = \psi^1(\tau),$$
$$(\mathbf{Q} - I)\,W_k(\tau) = \psi^k(\tau) - \psi_0^k(\tau). \tag{7}$$

Доведення. Підставляючи в (4) розклад сингулярної частини $W^\varepsilon(\tau) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau)$, маємо

$$\int_0^\infty F_x(ds)\left[I + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k\right] P\left[\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau - s)\right] - \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau) =$$

$$= \int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\left[\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{V}^k\right] P\varphi(u)\,ds.$$

Таким чином,

$$\varepsilon[\mathbf{Q} - I]W_1(\tau) + \sum_{k=2}^\infty \varepsilon^k[\mathbf{Q} - I]W_k(\tau) + \sum_{k=2}^\infty \varepsilon^k \sum_{r=1}^{k-1}\mathbf{Q}^r W_{k-r+1}(\tau) =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \overline{F}^k(\tau)\mathbb{V}^k P\varphi(u).$$

Збираючи члени при степенях ε, отримуємо (7).

Наслідок 3. *Сингулярні члени асимптотики мають вигляд*

$$W_1(\tau) = \mathbf{R}_0\left[\psi^1(\tau) - \int_\tau^\infty F_x(ds)PW_1(\tau - s)\right],$$

$$W_k(\tau) = \mathbf{R}_0\left[\psi^k(\tau) - \psi_0^k(\tau) - \int_\tau^\infty F_x(ds)PW_k(\tau - s)\right], \qquad k \geq 2.$$

Тут $\mathbf{R}_0$ — *матриця марковського відновлення* [9].

5. Початкові умови. Регулярність граничних умов. Запишемо розклад $\Phi_{\varepsilon\tau}(u, x)$ у ряд Тейлора при $\tau < 0$:

$$\varphi(u) = \Phi_{\varepsilon\tau}(u, x)\big|_{\tau<0} =$$

$$= U_0(t) + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{\tau^k}{k!}U_0^{(k)}(0) + \varepsilon U_1(0) + \varepsilon\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{\tau^k}{k!}U_1^{(k)}(0) + \ldots + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k W_k(\tau).$$

Отже,

$$W^\varepsilon(\tau) = W^\varepsilon(0) - \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \frac{\tau^k}{k!}U^{\varepsilon(k)}(0),$$
$$W_k(\tau) = W_k(0) - \sum_{n=1}^k \frac{\tau^n}{n!}U_{k-n}^{(n)}(0). \tag{8}$$

Лема 4. *Для* $\tau = 0$

$$(P - I)[U^{\varepsilon}(0) + W^{\varepsilon}(0)] = 0.$$

Доведення. Розглянемо рівняння (7). Для $W_1(\tau)$ маємо

$$\int_0^{\infty} F_x(ds) P W_1(\tau - s) - W_1(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \overline{F}_x(ds) \mathbb{V}(x) P U_0(0).$$

При $\tau = 0$ отримуємо

$$\left[\int_0^{\infty} F_x(ds) P W_1(0) - W_1(0)\right] + \int_0^{\infty} F_x(ds) P (W_1(-s) - W_1(0)) =$$

$$= \int_0^{\infty} \overline{F}_x(ds) \mathbb{V}(x) P U_0(0).$$

Враховуючи рівності (8), знаходимо

$$(P - I) W_1(0) = -\int_0^{\infty} s F_x(ds) P U_0'(0) + \int_0^{\infty} s F_x(ds) \mathbb{V}(x) P U_0(0).$$

Для відповідного регулярного члена з (5) одержуємо

$$(P - I) U_1(0) = \int_0^{\infty} s F_x(ds) P U_0'(0) - \int_0^{\infty} s F_x(ds) \mathbb{V}(x) P U_0(0),$$

тобто справджується рівність

$$(P - I)[U_1(0) + W_1(0)] = 0.$$

Застосуємо метод математичної індукції. Припустимо, що виконуються рівності

$$(P - I)[U_n(0) + W_n(0)] = 0, \quad n = 1, \ldots, k.$$

Тоді для $U_{k+1}(0)$ та $W_{k+1}(0)$ маємо

$$\int_0^{\infty} F_x(ds) P W_{k+1}(\tau - s) - W_{k+1}(\tau) =$$

$$= \int_{\tau}^{\infty} \overline{F}_x(ds) \sum_{n=1}^{k+1} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{V}^n(x) P U_0(0) - \int_0^{\infty} F_x(ds) \sum_{n=1}^{k} \frac{s^n}{n!} \mathbb{V}^n(x) P W_{k-n+1}(\tau - s).$$

При $\tau = 0$ отримуємо

$$\left[\int_0^{\infty} F_x(ds) P W_{k+1}(0) - W_{k+1}(0)\right] + \int_0^{\infty} F_x(ds) P (W_{k+1}(-s) - W_{k+1}(0)) =$$

$$= \int_0^{\infty} \overline{F}_x(ds) \frac{s^k}{k!} \mathbb{V}^{k+1}(x) P U_0(0) - \int_0^{\infty} F_x(ds) \sum_{n=1}^{k} \frac{s^n}{n!} \mathbb{V}^n(x) P W_{k-n+1}(-s).$$

Згідно з рівністю (8)

$$(P - I) W_{k+1}(0) = \int_0^{\infty} F_x(ds) P \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-s)^n}{n!} U_{k-n+1}^{(n)}(0) +$$

$$+\int_0^\infty F_x(ds)\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}\mathbb{V}^{k+1}(x)PU_0(0) - \int_0^\infty F_x(ds)\sum_{n=1}^{k}\frac{s^n}{n!}\mathbb{V}^n(x)P \times$$

$$\times\left[W_{k-n+1}(0) - \sum_{n=1}^{k-n+1}\frac{(-s)^n}{n!}U_{k-n+1}^{(n)}(0)\right].$$

Оскільки справджуються зроблені за індукцією припущення та початкові умови із зауваження 1, можемо записати

$$(P-I)W_{k+1}(0) = \int_0^\infty F_x(ds)P\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-s)^n}{n!}U_{k-n+1}^{(n)}(0) +$$

$$+\int_0^\infty F_x(ds)\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}\mathbb{V}^{k+1}(x)PU_0(0) - \int_0^\infty F_x(ds)\sum_{n=1}^{k}\frac{s^n}{n!}\mathbb{V}^n(x)P \times$$

$$\times\left[-U_{k-n+1}(0) - \sum_{n=1}^{k-n+1}\frac{(-s)^n}{n!}U_{k-n+1}^{(n)}(0)\right].$$

Для відповідного регулярного члена з (5) отримуємо

$$(P-I)U_{k+1}(0) = -\int_0^\infty F_x(ds)P\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-s)^n}{n!}U_{k-n+1}^{(n)}(0) -$$

$$-\int_0^\infty F_x(ds)\sum_{n=1}^{k+1}\frac{s^n}{n!}\mathbb{V}^n(x)PU_{k-n+1}(0) -$$

$$-\int_0^\infty F_x(ds)\sum_{n=1}^{k}\frac{s^n}{n!}\mathbb{V}^n(x)P\sum_{r=1}^{k-n+1}\frac{(-s)^r}{r!}U_{k-n-r+1}^{(r)}(0).$$

Легко бачити, що виконується рівність

$$(P-I)[U_{k+1}(0) + W_{k+1}(0)] = 0.$$

Лему доведено.

***Наслідок* 4.** *Справджується рівність*

$$(I-P)[U^{\varepsilon}(0) + W^{\varepsilon}(0)] = 0,$$

або, що те саме,

$$(I-\Pi)[U_k(0) + W_k(0)] = 0.$$

Таким чином, бачимо, що у просторі значень оператора Q регулярна та сингулярна частини розв'язку забезпечують виконання початкової умови із зауваження 1.

Водночас у підпросторі нулів оператора Q початкові умови для регулярних членів визначаються значеннями початкових умов для примежових шарів, тобто має місце такий наслідок.

***Наслідок* 5.**

$$c_k(0) = -\Pi W_k(0), \quad k \geq 1.$$

Доведення. Ми, очевидно, маємо

$$\Pi[W_k(0) + U_k(0)] = \Pi W_k(0) + c_k(0) = 0.$$

***Наслідок* 6.** *Сингулярні члени асимптотики мають явний вигляд*

$$W_1(\tau) = \mathbf{R}_0\left[\psi^1(\tau) + \overline{F}_x(\tau)PU_1(0) + \int_\tau^\infty (\tau - s)F_x(ds)PU_0'(0)\right],$$

$$W_k(\tau) = \mathbf{R}_0\left[\psi^k(\tau) - \psi_0^k(\tau) + \overline{F}_x(\tau)PU_k(0) + \sum_{n=1}^{k}\int_\tau^\infty (\tau - s)^n F_x(ds)PU_{k-n}^{(n)}(0)\right].$$

Доведення. Використовуючи формули (8) та наслідок 4, обчислюємо

$$\int_\tau^\infty F_x(ds)PW_k(\tau - s) = \int_\tau^\infty F_x(ds)P\left[-U_k(0) - \sum_{n=1}^{k}(\tau - s)^n U_{k-n}^{(n)}(0)\right] =$$

$$= -\overline{F}_x(\tau)PU_k(0) - \sum_{n=1}^{k}\int_\tau^\infty (\tau - s)^n F_x(ds)PU_{k-n}^{(n)}(0).$$

Згідно з граничними умовами (див. зауваження 1) при $\tau \to \infty$ запишемо алгоритм для знаходження початкових умов для примежових шарів при $\tau = 0$. Для першого сингулярного члена $W_1(\tau)$ маємо рівняння (див. (7))

$$\int_0^\infty Q(ds)W_1(\tau - s) - W_1(\tau) = \overline{F}_x^{(1)}(\tau)\mathbb{V}(x)P\varphi(u), \tag{9}$$

де $\overline{F}_x^{(1)}(\tau) = \int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)ds$.

Розділивши перший інтеграл на дві частини, отримаємо рівняння

$$\int_0^\tau Q(ds)W_1(\tau - s) - W_1(\tau) = \overline{F}^{(1)}(\tau)\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \int_\tau^\infty Q(ds)W_1(\tau - s).$$

Згідно з теоремою відновлення [10] при $\tau \to \infty$ маємо

$$0 = W_1(\infty) = \left(\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\,ds\,d\tau\,\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \right.$$

$$\left. - \int \rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)W_1(\tau - s)\,d\tau\right)\Big/\hat{m}, \tag{10}$$

де $\hat{m} = \int \rho(dx)m_1(x)$.

При $\tau < 0$ з (8) знаходимо

$$W_1(\tau) = W_1(0) - \tau U_0'(0). \tag{11}$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (10), отримуємо

$$0 = \left(\int \rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\,ds\,d\tau\,\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \right.$$

$$\left. - \int \rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)[W_1(0) - (\tau - s)U_0'(0)]\,d\tau\right)\Big/\hat{m} =$$

$$= \left(\int \rho(dx)\int_0^\infty \overline{F}_x^{(1)}(s)\,d\tau\,\mathbb{V}(x)P\varphi(u) - \right.$$

$$- \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty F_x(s) P W_1(0)\, ds\, d\tau + \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_\tau^\infty Q(ds)(\tau - s) U_0'(0)\, d\tau \Bigg) / \hat{m} =$$

$$= \left(\int \rho(dx) \frac{m_2(x)}{2} \mathbb{V}(x) P \varphi(u) - \right.$$

$$\left. - \int \rho(dx) m_1(x) P W_1(0) - \int \rho(dx) \frac{m_2(x)}{2} P U_0'(0) \right) / \hat{m} =$$

$$= \Big(- \int \rho(dx) m_1(x) \mu_2(x) L_1(x) \varphi(u) - \int \rho(dx) m_1(x) (P - I) W_1(0) -$$

$$- \int \rho(dx) m_1(x) W_1(0) \Big) / \hat{m} =$$

$$= \Big(- \int \rho(dx) m_1(x) \mu_2(x) L_1(x) \varphi(u) - \int \rho(dx) m_1(x) (P - I) W_1(0) \Big) / \hat{m} - U_1(0). \quad (12)$$

Тут $\mu_2(x) = \dfrac{m_2(x)}{2m_1(x)}$.

Поклавши в (9) $\tau = 0$, отримаємо

$$\int_0^\infty Q(ds) W_1(-s) - W_1(0) = \int_0^\infty \overline{F}_x(s)\, ds\, \mathbb{V}(x) P \varphi(u).$$

З (11) випливає $W_1(-s) = W_1(0) + sU_0^1(0)$. Підставимо цей вираз у попереднє співвідношення:

$$\int_0^\infty Q(ds) [W_1(0) + sU_0'(0)] - W_1(0) = m_1(x) \mathbb{V}(x) P \varphi(u).$$

Таким чином,

$$(P - I) W_1(0) = m_1(x) [\mathbb{V}(x) P \varphi(u) - P U_0'(0)] = L_1(x) \varphi(u).$$

Підставивши цей вираз у (12), остаточно будемо мати

$$0 = \Big(- \int \rho(dx) m_1(x) \mu_2(x) L_1(x) \varphi(u) + \int \rho(dx) m_1^2(x) L_1(x) \varphi(u) \Big) / \hat{m} - U_1(0),$$

або

$$U_1(0) = \int \pi(dx) \nu_1(x) L_1(x) \varphi(u) / \hat{m},$$

де

$$\pi(dx) = \rho(dx) m_1(x), \qquad \nu_1(x) = m_1(x) - \mu_2(x) = \frac{2m_1^2(x) - m_2(x)}{2m_1(x)}.$$

Зауваження **3.** Відомо, що $\nu_1(x) = 0$, коли $F_x(t)$ має показниковий розподіл. У цьому випадку, очевидно, маємо

$$U_1(0) = 0.$$

Алгоритм для наступних членів асимптотики наведемо на прикладі $W_2(\tau)$:

$$\int_0^\infty Q(ds) W_2(\tau - s) - W_2(\tau) = \overline{F}_x^{(2)}(\tau) \mathbb{V}^2(x) P \varphi(u) - \int_0^\infty \frac{s}{1!} F_x(ds) \mathbb{V}(x) P W_1(\tau - s), \quad (13)$$

де $\overline{F}^{(2)}(\tau) = \int_\tau^\infty s \overline{F}_x(s)\, ds$.

Розділивши перший інтеграл на дві частини, отримаємо рівняння

$$\int_0^\tau Q(ds)W_2(\tau-s) - W_2(\tau) = \overline{F}^{(2)}(\tau)\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u) - \int_0^\infty \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s) -$$

$$- \int_\tau^\infty Q(ds)W_2(\tau-s).$$

Згідно з теоремою відновлення [10] при $\tau \to \infty$ маємо

$$0 = W_2(\infty) = \left(\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty s\overline{F}_x(s)\,ds\,d\tau\,\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u) - \int\rho(dx)\ \times\right.$$

$$\times \int_0^\infty\left[\int_0^\tau \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)\,d\tau + \int_\tau^\infty \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)\,d\tau\right] -$$

$$\left. - \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)W_2(\tau-s)\,d\tau\right)\Big/\hat{m}. \tag{14}$$

При $\tau < 0$ з (8) знаходимо

$$W_2(\tau) = W_2(0) - \tau U_1'(0) - \tau^2 U_0''(0). \tag{15}$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (14), отримуємо

$$0 = \left(\int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty s\overline{F}_x(s)\,ds\,d\tau\,\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u) - \int\rho(dx)\ \times\right.$$

$$\times \int_0^\infty\left[\int_0^\tau \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)\,d\tau + \int_\tau^\infty \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)P\{W_1(0)-(\tau-s)U_0'(0)\}\,d\tau\right] -$$

$$\left. - \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)\big[W_2(0)-(\tau-s)U_1'(0)-(\tau-s)^2U_0''(0)\big]\,d\tau\right)\Big/\hat{m} =$$

$$= \left(\int\rho(dx)\frac{m_3(x)}{3!}\mathbb{V}^2(x)P\varphi(u)\ -\right.$$

$$- \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_0^\tau \frac{s}{1!}F_x(ds)\mathbb{V}(x)PW_1(\tau-s)\,d\tau - \int\rho(dx)\frac{m_2(x)}{2!}\mathbb{V}(x)PW_1(0)\ +$$

$$+ \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty s(\tau-s)F_x(ds)\mathbb{V}(x)PU_0'(0)\ -$$

$$- \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)W_1(0)\,d\tau + \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)(\tau-s)U_1'(0)\,d\tau\ +$$

$$\left. + \int\rho(dx)\int_0^\infty\int_\tau^\infty Q(ds)(\tau-s)^2U_0'(0)\,d\tau\right)\Big/\hat{m} =$$

$$= \left(\int \rho(dx) \frac{m_3(x)}{3!} \mathbb{V}^2(x) P\varphi(u) \; - \right.$$

$$- \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_0^\tau \frac{s}{1!} F_x(ds) \mathbb{V}(x) P W_1(\tau - s) d\tau + \int \rho(dx) \frac{m_2(x)}{2!} \mathbb{V}(x) P W_1(0) \; -$$

$$- \int \rho(dx) \frac{m_3(x)}{3!} \mathbb{V}(x) P U_0'(0) \; -$$

$$- \int \rho(dx) m(x) [P - I] W_2(0) - \int \rho(dx) m_1(x) U_2(0) - \int \rho(dx) \frac{m_2(x)}{2!} P U_1'(0) \; +$$

$$\left. + \int \rho(dx) \frac{m_3(x)}{3!} P U_0''(0) \right) / \hat{m} \; =$$

$$= \left(- \int \rho(dx) m_1(x) \mu_2(x) L_1(x) U_1(0) - \int \rho(dx) m_1(x) \mu_3(x) L_2(x) U_0(0) \; - \right.$$

$$- \int \rho(dx) m_1(x) (P - I) W_2(0) \; -$$

$$\left. - \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_0^\tau \frac{s}{1!} F_x(ds) \mathbb{V}(x) P W_1(\tau - s) d\tau \right) / \hat{m} \; - \; U_1(0). \qquad (16)$$

Поклавши в (13) $\tau = 0$, будемо мати

$$\int_0^\infty Q(ds) W_2(-s) \; - \; W_2(0) \; = \; m_2(x) \mathbb{V}^2(x) P\varphi(u) - \int_0^\infty s F_x(ds) \mathbb{V}(x) P W_1(-s),$$

звідки

$$\int_0^\infty Q(ds) \left[W_2(0) + s U_1'(0) - s^2 U_0''(0) \right] - \; W_2(0) \; = \; m_2(x) \mathbb{V}^2(x) P\varphi(u) \; -$$

$$- \int_0^\infty s F_x(ds) \mathbb{V}(x) P \left\{ W_1(0) + s U_0'(0) \right\}.$$

Таким чином,

$$[P - I] W_2(0) \; = \; m_2(x) \mathbb{V}^2(x) P\varphi(u) \; - \; m_1(x) P U_1'(0) \; + \; m_2(x) P U_0''(0) \; +$$

$$+ \; m_1(x) \mathbb{V}(x) P U_1(0) \; - \; m_2(x) \mathbb{V}(x) P U_0'(0) \; = \; m_2(x) L_2(x) U_0(0) \; - \; m_1(x) L_1(x) U_1(0).$$

Підставляючи цей вираз у (16), остаточно маємо

$$U_2(0) \; = \; \left[\int \pi(dx) \nu_2(x) L_2(x) U_0(0) \; + \; \int \pi(dx) \nu_1(x) L_1(x) U_1(0) \; - \right.$$

$$\left. - \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_0^\tau \frac{s}{1!} F_x(ds) \mathbb{V}(x) P W_1(\tau - s) d\tau \right] / \hat{m},$$

де

$$\nu_2(x) \; = \; \mu_3(x) - m_2(x) \; = \; \frac{m_3(x) - 2 m_1(x) m_2(x)}{3! m_1(x)}.$$

Для наступних членів аналогічно одержуємо

$$U_k(0) = \left[\sum_{r=0}^{k-1} \int \pi(dx) \nu_{k-r}(x) L_{k-r}(x) U_r(0) - \right.$$

$$\left. - \sum_{r=1}^{k-1} \int \rho(dx) \int_0^\infty \int_0^\tau \frac{s^r}{r!} F_x(ds) \mathbb{V}^r(x) P W_{k-r}(\tau - s) d\tau \right] / \hat{m},$$

де

$$\nu_k(x) = (-1)^k \left[m_k(x) - \mu_{k+1}(x) \right].$$

1. *Королюк В. С.* Стохастичні системи з усередненням у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 9. – С. 1235 – 1252.
2. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 200 p.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
4. *Korolyuk V. S.* Boundary layer in asymptotic analysis for random walks // Theory Stochast. Process. – 1998. – **1-2**. – P. 25 – 36.
5. *Королюк В. С., Пенев И. П., Турбин А. Ф.* Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения марковской цепи // Кибернетика. – 1973. – **4**. – С. 133 – 135.
6. *Таджиев А.* Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения полумарковского процесса // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 3. – С. 422 – 426.
7. *Samoilenko I. V.* Asymptotic expansion for the functional of markovian evolution in R^d in the circuit of diffusion approximation // J. Appl. Math. and Stochast. Anal. – 2005. – № 3. – P. 247 – 258.
8. *Korolyuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundation of state lumping of large systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. – 280 p.
9. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 181 с.
10. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Одержано 07.10.2005