УДК 517.91

А. Н. Муровцев (Москов. автодор. ин-т (Техн. ун-т), Россия)

ГЛОБАЛЬНАЯ АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

We show that, under some additional assumptions, analytical equations of sufficiently general nonlinear functional-differential equations are representable by the Dirichlet series with the uniform structure on the whole real axis $\mathbb{R}$ and, occasionally, on the whole complex plane $\mathbb{C}$. We investigate the dependence of these solutions on coefficients of basic exponents of the Dirichlet-series expansion. We obtain sufficient conditions for solutions of the basic initial problem to be representable by exponent series.

Показано, що аналітичні розв'язки достатньо загальних нелінійних диференціально-функціональних рівнянь при деяких додаткових припущеннях зображуються рядами Діріхле єдиної структури на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, а іноді на всій комплексній площині $\mathbb{C}$. Досліджується залежність цих розв'язків від коефіцієнтів при базових експонентах розкладу в ряд Діріхле. Отримано достатні умови зображення розв'язків основної початкової задачі рядами експонент.

1. Настоящая работа продолжает цикл работ [1 – 6]. В ней показано, что аналитические решения довольно общих нелинейных дифференциально-функциональных уравнений (ДФУ) при некоторых дополнительных предположениях представляются абсолютно сходящимися рядами Дирихле единой структуры на всей действительной оси $\mathbb{R}$, а иногда во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Исследуется зависимость аналитических решений от коэффициентов при базовых экспонентах разложения в ряд Дирихле. Показано, что решения основной начальной задачи при некоторых предположениях относительно начальных функций представляются абсолютно сходящимся рядом экспонент.

2. Рассмотрим нелинейное автономное ДФУ вида

$$y'(t) = F_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(y(t+\xi)), \tag{1}$$

где $y(t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi)$ — нелинейный функционал, отображающий каждую комплекснозначную функцию $\varphi(\xi)$, $\xi\in[-\Delta_1,\Delta_2]$, из пространства ограниченных функций $M[-\Delta_1,\Delta_2]$ в $\mathbb{C}$ (пространство ограниченных функций $M[-\Delta_1,\Delta_2]$ с нормой $\|\varphi\|_M = \sup_{-\Delta_1\le\xi\le\Delta_2}|\varphi(\xi)|$ рассматривается в [7]). Предполагается также, что функционал $F_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi)$ переводит каждую действительную функцию $\varphi(\xi)$, $\xi\in[-\Delta_1,\Delta_2]$, из $M[-\Delta_1,\Delta_2]$ в $\mathbb{R}$.

Пусть $y(t) = A$ — одно из стационарных решений уравнения (1). Не уменьшая общность рассуждений, можно предположить, что $A = 0$, так как замена неизвестной функции $y(t) = A + u(t)$ приводит уравнение (1) к уравнению относительно неизвестной функции $u(t)$ со стационарным решением $u(t) = 0$.

Будем предполагать, что функционал $F_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi)$ имеет производные Фреше произвольного порядка в точке $\varphi = 0$, $F^{(n)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)$, $n\in\mathbb{N}$. (Полилинейные функционалы и производные Фреше операторов первого и более высоких порядков в бесконечномерных пространствах рассмотрены в [7, 8]). Норма полилинейного функционала $F^{(n)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)(h_1,\ldots,h_n)$, $h_i(\xi)\in M[-\Delta_1,\Delta_2]$, $i = 1,\ldots,n$, определяется по формуле

$$\left\| F^{(n)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)\right\|_{n,M} = \sup_{\|h_i\|_m=1}\left|F^{(n)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)(h_1,\ldots,h_n)\right|.$$

В случае $n = 1$ норму линейного функционала будем записывать в виде $\left\|\left| F^{(1)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0) \right|\right\|_M$. Предполагается, что существует число $K > 0$, при котором выполняется неравенство $\left\|\left| F^{(n)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0) \right|\right\|_{n,M} \le K$. В этом случае несложно показать, что для любой функции $\varphi \in M[-\Delta_1, \Delta_2]$ функционал $F_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi)$ представляется в виде абсолютно сходящегося ряда Тейлора

$$F_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi) = F^{(1)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)(\varphi) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)(\varphi, \ldots, \varphi). \tag{2}$$

Очевидно, что радиус абсолютной сходимости ряда $R = \infty$. Таким образом, уравнение (1) сводится к уравнению

$$y'(t) = L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(y(t+\xi)) + G_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(y(t+\xi)), \tag{3}$$

где $L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi) = F^{(1)}_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(0)(\varphi)$, $G_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\varphi)$ совпадает со вторым членом в (2). Будем предполагать, что существует некоторое число $\delta \ge 0$, $\delta \le \Delta_1 + \Delta_2$, при котором $G_{[-\Delta_1, \Delta_2]} = G_{[-\Delta_1+\delta, \Delta_2]}$. Это равенство означает, что для любых функций $\varphi_1, \varphi_2 \in M[-\Delta_1, \Delta_2]$, удовлетворяющих условию $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ при $\xi \in [-\Delta_1 + \delta, \Delta_2]$, $G_{[-\Delta_1, \Delta_2]}(\varphi_1) = G_{[-\Delta_1, \Delta_2]}(\varphi_2)$.

В дальнейшем в основном будем рассматривать функционалы $L_{[-\Delta_1, \Delta_2]}$, $G_{[-\Delta_1+\delta, \Delta_2]}$ на пространствах $C[-\Delta_1, \Delta_2]$, $C[-\Delta_1 + \delta, \Delta_2]$ соответственно.

3. Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} y(t) &= f(\eta_1, \ldots, \eta_k), \\ \eta_i &= e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{4}$$

Предполагается, что $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ — аналитическая функция k переменных в некоторой окрестности точки $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, удовлетворяющая условию $f(0, \ldots, 0) = 0$. Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \eta_l \frac{\partial}{\partial \eta_l} f(\vec{\eta}) &= L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(f(\eta_1 e^{\lambda_1 \xi}, \ldots, \eta_k e^{\lambda_k \xi})) + \\ &+ G_{[-\Delta_1+\delta, \Delta_2]}(f(\eta_1 e^{\lambda_1 \xi}, \ldots, \eta_k e^{\lambda_k \xi})). \end{aligned} \tag{5}$$

Разлагая $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ в уравнении (5) в ряд Тейлора в окрестности точки $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$:

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i \eta_i + \sum_{i_1 + \ldots + i_k > 1} f_{i_1, \ldots, i_k} \eta_1^{i_1} \ldots \eta_k^{i_k}, \tag{6}$$

а также аналитический функционал $G_{[-\Delta_1+\delta, \Delta_2]}$ в ряд Тейлора и приравнивая коэффициенты при одинаковых мономах $\eta_1^{i_1} \ldots \eta_k^{i_k}$, получаем цепочку уравнений

$$\left[\lambda_i - L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(e^{\lambda_i \xi})\right] f_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{7}$$

$$\left[\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l i_l\right) - L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}\left(\exp\left(\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l i_l\right)\xi\right)\right)\right] f_{i_1,\ldots,i_k} =$$

$$= \sum_{s=2}^{i_l+\ldots+i_k} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{n_{l_1}+\ldots+n_{l_s}=i_l,\\ l=1,\ldots,k}} f_{n_{11},\ldots,n_{k1}} \ldots f_{n_{1s},\ldots,n_{ks}} G^{(s)}_{[-\Delta_1+\delta,\Delta_2]}(0) \times$$

$$\times \left(\exp\left(\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l n_{l1} \right) \xi \right), \ldots, \exp\left(\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l n_{ls} \right) \xi \right) \right). \tag{8}$$

Из (7) следует, что нетривиальное аналитическое решение уравнения (5) может существовать при значениях λ_i, являющихся корнями характеристического уравнения

$$H(\lambda) = \lambda - L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(e^{\lambda\xi}) = 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть* λ_i, $i = 1, \ldots, k$, — *корни характеристического уравнения* (9) *и* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, *никакие числа* $\omega = i_1\lambda_1 + \ldots + i_k\lambda_k$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$, $i_1 + \ldots + i_k > 1$, *не являются корнями уравнения* (9) *и существует число* $L > 0$, *при котором выполняется неравенство*

$$\frac{e^{-\operatorname{Re}\omega\Delta_1}}{|H(\omega)|} < L. \tag{10}$$

Тогда для любых чисел $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}$ *существует единственное аналитическое решение* $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ *уравнения* (5) *во всей области* $\mathbb{C}^k$, *удовлетворяющее условиям*

$$f(0, \ldots, 0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_1} f(0, \ldots, 0) = f_1, \ldots, \; \frac{\partial}{\partial \eta_k} f(0, \ldots, 0) = f_k.$$

Доказательство. Из цепочки равенств (8) следует неравенство

$$\left| f_{i_1,\ldots,i_k} \right| \le \frac{\exp\left(\operatorname{Re}(\lambda_1 i_1 + \ldots + \lambda_k i_k)(-\Delta_1 + \delta)\right)}{|H(\lambda_1 i_1 + \ldots + \lambda_k i_k)|} \times$$

$$\times K \sum_{s=2}^{i_1+\ldots+i_k} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{n_{l_1}+\ldots+n_{l_s}=i_l,\\ l=1,\ldots,k}} \left(\left| f_{n_{11},\ldots,n_{k1}} \right| \ldots \left| f_{n_{1s},\ldots,n_{ks}} \right| \right). \tag{11}$$

Не уменьшая общность рассуждений, будем предполагать, что $\operatorname{Re}\lambda_1 = \sup_{i=1,\ldots,k} \operatorname{Re}\lambda_i$. Тогда

$$\exp\left(\operatorname{Re}(\lambda_1 i_1 + \ldots + \lambda_k i_k)\delta\right) \le d^{(i_1+\ldots+i_k)}, \tag{12}$$

где

$$d = e^{-\operatorname{Re}\lambda_1\delta} < 1.$$

Из (11) и (12) следует, что аналитическое решение $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ уравнения (5) мажорируется решениями $z(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ уравнения

$$z(\eta_1, \ldots, \eta_k) =$$

$$= LK\left[\exp(z(\eta_1 d, \ldots, \eta_k d)) - 1 - z(\eta_1 d, \ldots, \eta_k d)\right] + |f_1|\eta_1 + \ldots + |f_k|\eta_k, \tag{13}$$

где $z(0, \ldots, 0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \eta_i} z(0, \ldots, 0) = |f_i|$, $i = 1, \ldots, k$. Это означает, что коэффициенты разложения функции $z(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ в ряд Тейлора $z_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0$ и для любых чисел $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ $i_1 + \ldots + i_k \ge 1$, $\left| f_{i_1,\ldots,i_k} \right| \le z_{i_1,\ldots,i_k}$. Кроме того, решения уравнений (5) и (13) одновременно мажорируются решениями $w(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ уравнения

$$w(\eta_1, \ldots, \eta_k) = \frac{LK}{2} \frac{w^2(\eta_1, \ldots, \eta_k)}{1 - w(\eta_1, \ldots, \eta_k)} + |f_1|\eta_1 + \ldots + |f_k|\eta_k. \tag{14}$$

Уравнение (14) имеет единственное аналитическое решение $w(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ в некоторой области $\max_i|\eta_i| < r$, удовлетворяющее тем же условиям $w(0, \ldots, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \eta_i} w(0, \ldots, 0) = |f_i|$. Следовательно, уравнение (13) также имеет единственное аналитическое решение $z(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ в той же области $\max_i|\eta_i| < r$, удовлетворяющее тем же условиям $z(0, \ldots, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \eta_i} z(0, \ldots, 0) = |f_i|$. Из уравнения (13) следует, что $z(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ аналитически продолжается в область $\max_i|\eta_i| < rd^{-1}$, затем в область $\max_i|\eta_i| < rd^{-2}$ и т. д. Поскольку $d^{-k} \to \infty$ при $k \to \infty$, $z(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ аналитически продолжается на все пространство $\mathbb{C}^k$. Следовательно, решение $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ уравнения (5) является аналитической функцией в пространстве $\mathbb{C}^k$.

Теорема доказана.

4. Пусть $\mathbb{C}_1^\infty$ — линейное пространство бесконечномерных векторов $\vec{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots\}$, $\eta_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\eta_i| < \infty$. В этом пространстве вводится норма по формуле

$$\|\vec{\eta}\|_1 = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\eta_i|.$$

Будем также рассматривать линейное пространство $\mathbb{C}_2^\infty$ бесконечномерных векторов $\vec{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots\}$, $\eta_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^\infty |f_i| < \infty$. Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|\vec{\eta}\|_2 = \sum_{i=1}^\infty |f_i|.$$

Введем понятие аналитической функции бесконечного числа переменных.

Определение 1. *Функция* $f(\vec{\eta})$ *является аналитической в точке* $\vec{\eta} = \vec{0}$ $\left(f(\vec{\eta}) \in \mathbf{O}(\vec{\eta} = \vec{0})\right)$, *если существует число* $r > 0$, *при котором для любого* $\vec{\eta} \in \mathbb{C}_1^\infty$, $\|\vec{\eta}\|_1 < r$, *имеет место представление в виде абсолютно сходящегося ряда*

$$f(\vec{\eta}) = f(0) + \sum_{i=1}^\infty f_i \eta_i + \sum_{k=2}^\infty \sum_{\substack{i_1 + \ldots + i_k > 1, \\ i_k \geq 1}} f_{i_1, \ldots, i_k} \eta_1^{i_1} \ldots \eta_k^{i_k}. \tag{15}$$

Положив $\eta_{k+1} = \eta_{k+2} = \ldots = \eta_{k+l} = \ldots = 0$, несложно показать, что

$$f_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} \frac{d^{i_1 + \ldots + i_k}}{d\eta_1^{i_1} \ldots d\eta_k^{i_k}} f(\vec{0}).$$

Определение 2. *Функция* $f(\vec{\eta})$ *является аналитической в открытой области* D, *принадлежащей* $\mathbb{C}_1^\infty$ $\left(f(\vec{\eta}) \in \mathbf{O}(D)\right)$, *если она аналитична в каждой точке* $\vec{\eta} \in D$.

Примерно так же определяются аналитические функции в пространстве $\mathbb{C}_2^\infty$.

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$y(t) = f(\vec{\eta}), \quad \vec{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots\}, \qquad \eta_i = e^{\lambda_i t}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Предполагается, что $f(\vec{\eta}) \in \mathbf{O}(\vec{\eta} = \vec{0})$ и $f(\vec{0}) = 0$. После подстановки функции $y(t)$ в виде (16) в уравнение (3) получим уравнение

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \eta_l \frac{\partial}{\partial \eta_l} f(\vec{\eta}) =$$

$$= L_{[-\Delta_1, \Delta_2]}(f(\eta_1 e^{\lambda_1 \xi}, \ldots, \eta_k e^{\lambda_k \xi}, \ldots)) + G_{[-\Delta_1+\delta, \Delta_2]}(f(\eta_1 e^{\lambda_1 \xi}, \ldots, \eta_k e^{\lambda_k \xi}, \ldots)). \tag{17}$$

Подставляя разложение функции $f(\vec{\eta})$ в ряд Тейлора в (17), разлагая функционал $G_{[-\Delta_1+\delta, \Delta_2]}$ в ряд Тейлора и приравнивая коэффициенты при одинаковых членах $\eta_1^{i_1} \ldots \eta_k^{i_k}$ в обеих частях (17), получаем уравнения (7) и цепочку уравнений типа (8). Из уравнения (7), как и ранее, следует, что необходимым условием существования нетривиального решения является выполнение условий $H(\lambda_i) = 0$.

Нас интересуют достаточные условия существования решения во всем пространстве $\mathbb{C}_1^\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$ — *счетное множество корней характеристического уравнения* (9), *удовлетворяющих условию* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$; *для любого* $k \geq 1$ *никакое число* $\omega = i_1\lambda_1 + \ldots + i_k\lambda_k$, *где* $i_1, \ldots, i_k$ — *целые неотрицательные числа и* $i_1 + \ldots + i_k > 1$, *не является корнем того же уравнения* (9) *и существует число* $L > 0$, *при котором*

$$\frac{e^{-\operatorname{Re}\omega\Delta_1}}{|H(\omega)|} < L. \tag{18}$$

Тогда для любого бесконечномерного вектора $\vec{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots\} \in \mathbb{C}_2^\infty$ *существует единственное аналитическое решение* $f(\vec{\eta})$ *уравнения* (17) *во всем пространстве* $\mathbb{C}_1^\infty$, *представимое в* $\mathbb{C}_1^\infty$ *абсолютно сходящимся степенным рядом единой структуры и удовлетворяющее условиям* $f(\vec{0}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\vec{0}) = f_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Доказательство почти полностью аналогично доказательству теоремы 1. Вместо мажорирующего уравнения (13) в данном случае используется уравнение

$$z(\vec{\eta}) = LK[\exp(z(d\vec{\eta}) - 1 - z(d\vec{\eta}))] + \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \eta_i, \tag{19}$$

а вместо мажорирующего уравнения (14) — уравнение

$$w(\vec{\eta}) = \frac{LK}{2} \frac{w^2(\vec{\eta})}{1 - w(\vec{\eta})} + \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \eta_i. \tag{20}$$

Несложно показать, что решения уравнений (19), (20) можно представить в виде

$z(\vec{\eta}) = \tilde{z}(u)$, $w(\vec{\eta}) = \tilde{w}(u)$, $u = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \eta_i$. Функции $\tilde{z}(u)$, $\tilde{w}(u)$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{z}(u) = LK[\exp(\tilde{z}(du) - 1 - \tilde{z}(du))] + u, \tag{21}$$

$$\tilde{w}(u) = \frac{LK}{2} \frac{\tilde{w}^2(u)}{1 - \tilde{w}(u)} + u \tag{22}$$

соответственно, а также условиям

$$\tilde{z}(0) = 0, \qquad \tilde{w}(0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\tilde{z}(0) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\tilde{w}(0) = 1.$$

Решение уравнения (19) мажорируется решением уравнения (20), а решение уравнения (21) — решением уравнения (22). Следовательно, решение $z(\vec{\eta}) = \tilde{z}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \eta_i\right)$ уравнения (19) существует в некоторой области $\|\vec{\eta}\|_1 \le r$. Несложно показать, что все коэффициенты разложения функции $\tilde{z}(u)$ в ряд Тейлора положительны. Применяя, как и ранее, метод последовательного продолжения, функцию $\tilde{z}(u)$ можно аналитически продолжить во всю комплексную плоскость C. Таким образом, функция $z(\vec{\eta}) = \tilde{z}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \eta_i\right)$ является абсолютно сходящимся рядом вида (15) во всем пространстве $\mathbb{C}_1^{\infty}$. Решение $f(\vec{\eta})$ уравнения (17) мажорируется функцией $z(\vec{\eta})$. Следовательно, $f(\vec{\eta})$ представляется абсолютно сходящимся рядом во всем пространстве $\mathbb{C}_1^{\infty}$.

Теорема доказана.

Используя теорему 2, можно установить ряд простых свойств аналитического уравнения (17). Применяя метод математической индукции, можно показать, что решение $f(\vec{f}, \vec{\eta})$, $\vec{f} \in \mathbb{C}_2^{\infty}$, $\vec{\eta} \in \mathbb{C}_1^{\infty}$, уравнения (17) представимо в виде $\tilde{f}(\{f_i \eta_i\})$, где $\tilde{f}(\vec{u})$ — аналитическая функция в $\mathbb{C}_1^{\infty}$. Методом математической индукции также можно показать, что если λ_i, λ_j — два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения (9), то, выбирая f_i и f_j в векторе $\vec{f} \in \mathbb{C}_2^{\infty}$ комплексно-сопряженными числами, а если λ_i — действительный корень уравнения (9), выбирая в $\vec{f} \in \mathbb{C}_2^{\infty}$ действительное число f_i, можно получить действительное решение уравнения (3), представимое в виде $y(t) = \tilde{f}(\{f_i e^{\lambda_i t}\})$.

Пусть заданы векторы $\vec{f} = \{f_1, \ldots, f_i, \ldots\} \in \mathbb{C}_2^{\infty}$, $\vec{f}_k = \{f_1, \ldots, f_k, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. При $k \to \infty$ $\vec{f}_k \to \vec{f}$ по норме пространства $\mathbb{C}_2^{\infty}$. Исследуем поведение решения $f(\vec{f}, \vec{\eta})$ уравнения (17), удовлетворяющего условиям

$$f(\vec{f}, \vec{0}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_1} f(\vec{f}, \vec{0}) = f_1, \ldots, \ \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\vec{f}, \vec{0}) = f_i, \ldots$$

в зависимости от бесконечномерного вектора $\vec{f}$.

Теорема 3. *Для любого* $r > 0$ *решение* $f(\vec{f}_k, \vec{\eta})$ *уравнения* (17) *равномерно стремится при* $k \to \infty$ *к* $f(\vec{f}, \vec{\eta})$ *в области* $\|\vec{\eta}\|_1 \le r$.

Доказательство. Используя функции $z(\vec{f}, \vec{\eta})$ и $w(\vec{f}, \vec{\eta})$, введенные при доказательстве теоремы 2, можно показать, что функция $f(\vec{f}, \vec{\eta}) - f(\vec{f}_k, \vec{\eta})$ в некоторой окрестности точки $\vec{\eta} = \vec{0}$ мажорируется функцией $z(\vec{f}, \vec{\eta}) - z(\vec{f}_k, \vec{\eta})$, которая в свою очередь мажорируется функцией $w(\vec{f}, \vec{\eta}) - w(\vec{f}_k, \vec{\eta})$, где

$$w(\vec{f},\eta) = \frac{\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|\eta_i\right) - \sqrt{\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|\eta_i\right)^2 - 4(1+LK/2)\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|\eta_i}}{2(1+LK/2)}.$$

Несложно также показать, что при достаточно малом r аналитическое решение $w(\vec{f},\vec{\eta})$ существует в области $\|\vec{\eta}\|_1 < r$ и, кроме того, выполняется неравенство

$$\left|w(\vec{f},\vec{\eta}) - w(\vec{f}_k,\vec{\eta})\right| \le \frac{1}{2(1+LK/2)} D(r)\sum_{i=k}^{\infty}|f_i||\eta_i|,$$

где $D(r)$ — некоторое положительное число, зависящее от r. Следовательно, при $k\to\infty$ $w(\vec{f}_k,\vec{\eta}) - w(\vec{f},\vec{\eta}) \to 0$ равномерно в области $\|\vec{\eta}\|_1 \le r$, и тогда $f(\vec{f}_k,\vec{\eta}) - f(\vec{f},\vec{\eta}) \to 0$ равномерно в той же области. Исходя из уравнения (19) несложно показать, что при $k\to\infty$ $z(\vec{f}_k,\vec{\eta}) \to z(\vec{f},\vec{\eta})$ равномерно в области $\|\vec{\eta}\|_1 \le rd^{-1}$, затем в области $\|\vec{\eta}\|_1 \le rd^{-2}$ и т. д. Следовательно, при $k\to\infty$ $f(\vec{f}_k,\vec{\eta}) \to f(\vec{f},\vec{\eta})$ равномерно в любой ограниченной подобласти пространства $\mathbb{C}_1^\infty$.

Теорема доказана.

Поскольку решение $f(\vec{f},\vec{\eta})$ уравнения (17) для любого $\vec{\eta}\in\mathbb{C}_1^\infty$ является аналитической функцией по $\vec{f}\in\mathbb{C}_2^\infty$ в точке $\vec{f}=\vec{0}$ с радиусом сходимости $R=\infty$, это решение мажорируется абсолютно сходящимся рядом с тем же радиусом сходимости. Используя свойство независимости абсолютно сходящегося ряда от перестановок членов ряда или объединения их в произвольные группы, можно показать, что $f(\vec{f},\vec{\eta})$ — аналитическая функция по $\vec{f}\in\mathbb{C}_2^\infty$ в любой точке $\mathbb{C}_2^\infty$.

5. Будем предполагать, что уравнение (3) является уравнением запаздывающего типа, т. е. $\Delta_1=\Delta>0$, $\Delta_2=0$. В этом наиболее простом случае исследуем задачу представления решений основной начальной задачи абсолютно сходящимися рядами экспонент вида (16). Данная задача сводится к задаче нахождения вектора $\vec{f}=\{f_1,f_2,\ldots,f_k,\ldots\}\in\mathbb{C}_2^\infty$ базовых коэффициентов, при котором решение, представимое в виде ряда Дирихле, совпадает с решением основной начальной задачи.

Пусть задана начальная функция $\varphi(\xi)\in C[-\Delta,0]$, которая определяет решение $y(t,\varphi)$ уравнения (3). Корни $\{\lambda_i\}$ характеристического уравнения (9) образуют счетное множество чисел из $\mathbb{C}$, кроме того, $\operatorname{Re}\lambda_i<0$. Будем предполагать, что множество $\{\varphi_i(\xi)=e^{\lambda_i\xi},\xi\in[-\Delta,0]\}$ представляет собой счетную систему линейно независимых функций, которая является полной в пространстве $C[-\Delta,0]$. Это означает, что любая функция $\varphi(\xi)\in C[-\Delta,0]$ представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$\varphi(\xi) = c_1e^{\lambda_1\xi} + c_2e^{\lambda_2\xi} + \ldots + c_ne^{\lambda_n\xi} + \ldots . \qquad (23)$$

Как указано в [9], такое представление реализуется не всегда, однако в большинстве случаев представление (23) имеет место.

Введем в линейном нормированном пространстве $C[-\Delta,0]$ билинейный функционал по формуле

$$\langle f,\varphi\rangle = h(0)\varphi(0) + L_{[-\Delta,0]}\left(\int_{\xi}^{0} h(\xi-u)\varphi(u)\,du\right). \qquad (24)$$

Несложно показать, что если $i \neq j$, то $\left\langle e^{\lambda_i \xi}, e^{\lambda_j \xi} \right\rangle = 0$, а если $i = j$, то $\left\langle e^{\lambda_i}, e^{\lambda_i \xi} \right\rangle = H'(\lambda_i)$. Следовательно, функции $\{e^{\lambda_j \xi}, \xi \in [-\Delta, 0]\}$ попарно ортогональны относительно билинейного функционала (24). Из разложения (23) следует, что

$$c_n = \frac{\left\langle e^{\lambda_n \xi}, \varphi(\xi) \right\rangle}{\left\langle e^{\lambda_n \xi}, e^{\lambda_n \xi} \right\rangle}.$$

Рассмотрим подкласс функций $\mathbf{B}[-\Delta, 0] \subset C[-\Delta, 0]$, представимых абсолютно сходящимся рядом (23), коэффициенты разложения которых удовлетворяют условию $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| + \ldots < \infty$. Несложно показать, что линейное пространство $\mathbf{B}[-\Delta, 0]$ является банаховым относительно нормы

$$\|\varphi\|_a = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|.$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия, введенные в пп.* 2 *и* 5, *а также условия теоремы* 2. *Тогда существует достаточно малое число* $\varepsilon > 0$ *такое, что если* $\varphi \in \mathbf{B}[-\Delta, 0]$ *и* $\|\varphi\|_c < \varepsilon$, *то решение* $y(t, \varphi)$ *начальной задачи на интервале* $-\Delta \leq t < \infty$ *представляется абсолютно сходящимся рядом Дирихле вида* (16).

Доказательство. Будем рассматривать решение $y(\xi)$ уравнения (3), представленное в виде (16), на начальном отрезке $[-\Delta, 0]$. На этом отрезке оно должно совпадать с начальной функцией $\varphi(\xi) \in \mathbf{B}[-\Delta, 0]$. Используя билинейную форму (24), получаем

$$\left\langle e^{\lambda_i \xi}, y(\xi) \right\rangle = c_i, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Систему уравнений (25) можно привести к виду

$$c_i - f_i - g_i(f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots) = 0, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

где f_i— коэффициенты при базовых экспонентах $e^{\lambda_i \xi}$ разложения (16).

Пусть $\varphi(\xi) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\varphi}(\xi)$, $f_i = \tilde{\varepsilon}\tilde{f}_i$, $\tilde{\varepsilon} = \|\varphi(\xi)\|_c$. Тогда $c_i = \tilde{\varepsilon}\tilde{c}_i$ и уравнение (26) приводится к виду

$$\tilde{c}_i - \tilde{f}_i - \tilde{\varepsilon}\tilde{g}_i(\tilde{\varepsilon}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_i, \ldots) = 0, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Функции $\tilde{g}_i$ являются непрерывными по $\tilde{\varepsilon}$ и $\left\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_i, \ldots\right\} \in \mathbb{C}_2^{\infty}$. При $\tilde{\varepsilon} = 0$ имеется решение $\tilde{f}_i = \tilde{c}_i$, $i \in \mathbb{N}$, и производная Фреше по $\vec{\tilde{f}}$ оператора, стоящего в левой части (16), в точке $\tilde{\varepsilon} = 0$, $\vec{\tilde{f}} = \vec{\tilde{c}}$ совпадает с тождественным оператором. Следовательно, в силу теоремы о неявно заданных функциях в некоторой области $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ существует решение $f_i(\tilde{\varepsilon})$, $i \in \mathbb{N}$, уравнения (27), удовлетворяющее условию $\tilde{f}_i(0) = \tilde{c}_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

6. Будем исследовать решения уравнения (5) без предположения $G_{[-\Delta_1, \Delta_2]} = G_{[-\Delta_1 + \delta, \Delta_2]}$. В этом случае можно ввести малый параметр τ и уравнение (5) заменить измененным уравнением, близким к (5):

$$\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \eta_l \frac{\partial}{\partial \eta_l} f(\vec{\eta}) =$$

$$= L_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(f(\eta_1 e^{\lambda_1 \xi}, \ldots, \eta_k e^{\lambda_k \xi})) + G_{[-\Delta_1,\Delta_2]}(\chi_\tau(\xi) f(\eta_1 e^{\lambda_1 \xi}, \ldots, \eta_k e^{\lambda_k \xi})), \quad (28)$$

где $\chi_\tau(\xi) = 1$ при $-\Delta_1 + \tau \le \xi \le \Delta_2$, $\chi_\tau(\xi) = 0$ при $-\Delta_1 \le \xi \le \Delta_1 + \tau$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни характеристического уравнения (9), удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, и выполняются условия теоремы 1. Тогда для любого $\tau > 0$ существует единственное аналитическое решение $f_\tau(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ уравнения (28) в области $\mathbb{C}^k$, удовлетворяющее условиям $f_\tau(0, \ldots, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \eta_i} f_\tau(0, \ldots, 0) = f_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Если в некоторой ограниченной связной области $\Omega \subset \mathbb{C}^k$, содержащей некоторую окрестность точки $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, $f_\tau(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ стремится равномерно к $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ при $\tau \to 0$, то $f(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ — аналитическое решение уравнения (28) при $\tau = 0$ в области Ω, удовлетворяющее тем же условиям $f(0, \ldots, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \eta_i} f(0, \ldots, 0) = f_i$, $i = 1, \ldots, k$. Преимущество такого подхода состоит в том, что область Ω может оказаться несколько шире, чем малая окрестность точки $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, в которой удается доказать существование аналитического решения уравнения (28) при $\tau = 0$ методом мажорирующих уравнений [1 – 6].

1. *Муровцев А. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1985. – Деп. в ВИНИТИ, 4669-85Деп.
2. *Муровцев А. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1988. – Деп. в ВИНИТИ, 9142-В88.
3. *Муровцев А. Н.* Аналитические решения системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 10. – С. 1817 – 1819.
4. *Муровцев А. Н.* Аналитические решения системы дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1068 – 1077.
5. *Муровцев А. Н.* Решения неавтономного нелинейного дифференциально-функционального уравнения, представимые рядами экспонент // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 7. – С. 992 – 994.
6. *Муровцев А. Н.* Равномерная аппроксимация решений начальной задачи дифференциально-функциональных уравнений рядами Дирихле // Там же. – 2001. – **37**, № 3. – С. 425 – 428.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
9. *Хейл Д.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 422 с.

Получено 02.04.2002,
после доработки — 21.01.2005