УДК 517.9:532

**Б. М. Вронский** (Таврич. нац. ун-т, Симферополь)

# О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ „ЖИДКОСТЬ-ГАЗ” В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Small motions and proper oscillations of a compressible stratified fluid are studied. The structure of a spectrum and the base property of a system of eigenvectors are investigated, asymptotic formulas for eigenvalues are obtained.

Вивчено малі рухи і власні коливання стисливої стратифікованої рідини, досліджено структуру спектра, базисність системи власних векторів, одержано асимптотичні формули для власних значень.

**1. Постановка задачи и приведение ее к операторной форме.** ***1.1. Постановка начально-краевой задачи.*** Пусть неподвижный сосуд целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, т. е. ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси $Oz$ по закону $\rho_0 = \rho_0(z)$. Область, занятую жидкостью, обозначим через $\Omega$, а ее границу (твердую стенку) — через $S$. Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси $Oz$.

Будем рассматривать случай устойчивой стратификации, которая имеет место при выполнении условия (см. [1, 2])

$$0 < N_-^2 \le N^2(z) \le N_+^2 \le \infty,$$
$$N^2(z) \equiv N_0^2(z) - \left(\frac{g}{c}\right)^2, \qquad N_0^2(z) \equiv -g(\ln\rho_0(z))', \tag{1}$$

где $c$ — скорость звука в жидкости. Величину $N^2(z)$ принято называть частотой плавучести или частотой Вяйсяля – Брента.

Малые движения системы описываются уравнениями (см. [1, 2])

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \frac{1}{\rho_0}g\rho\vec{k} \qquad (\text{в } \Omega), \tag{2}$$

$$\rho + w_z\rho_0' + \rho_0 \operatorname{div}\vec{w} = 0 \qquad (\text{в } \Omega), \tag{3}$$

$$\rho + w_z\rho_0' = c^{-2}(p - gw_z\rho_0) \qquad (\text{в } \Omega), \tag{4}$$

краевым условием

$$\vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \qquad (\text{на } S), \tag{5}$$

выражающим условие непротекания на твердой стенке, и начальными условиями

$$\vec{w}(\vec{x},0) = \vec{w}^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial\vec{w}(\vec{x},0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \tag{6}$$

Здесь $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x},t)$ — поле смещения частиц жидкости от состояния равновесия, $p = p(\vec{x},t)$ — отклонение поля давления от равновесного, $\rho = \rho(\vec{x},t)$ — отклонение поля плотности от равновесного, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $S$, $x = (x^1, x^2, z)$ — точка в $R^3$.

***1.2. Метод ортогонального проектирования.*** Начально-краевую задачу (2) – (6) приведем к дифференциальному уравнению в некотором гильбертовом пространстве.

Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\vec{v}, \vec{u})_{L_2} = \int\limits_{\Omega} \rho_0(z)\, \vec{v} \cdot \vec{u}^{\,*}\, d\Omega. \tag{7}$$

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega)$, получающееся замыканием по норме $\vec{L}_2(\Omega)$ множества гладких функций

$$\vec{J}(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in C^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ \text{ на } \ S \right\}. \tag{8}$$

В качестве другого возьмем подпространство

$$\vec{G}(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in \vec{L}(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi \right\}. \tag{9}$$

Скалярные функции $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$, порождающие подпространство $\vec{G}(\Omega)$, образуют пространство, которое будем обозначать $W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1})$. Скалярное произведение и норма в нем задаются по формулам

$$(\Phi, \Psi)_{1,\Omega} = \int\limits_{\Omega} \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi^* d\Omega, \qquad \|\Phi\|_{1,\Omega}^2 = \int\limits_{\Omega} \rho_0^{-1} |\nabla \Phi|^2 d\Omega. \tag{10}$$

Кроме этого на функции $\Phi \in W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$ налагается нормирующее условие

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\, d\Omega = 0.$$

**Лемма 1.** *Пространство* $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ *допускает ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus G(\Omega). \tag{11}$$

Из (11) следует, что любой вектор $\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ можно представить в виде

$$\vec{w} = \vec{u} + \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi, \qquad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \qquad \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi \in \vec{G}(\Omega). \tag{12}$$

В дальнейшем функции $\vec{w}(\vec{x}, t)$, $p(\vec{x}, t)$ при любом $t > 0$ будем считать элементами пространства $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Функцию $\vec{w}$ будем искать в виде (12), а $\rho_0^{-1} \nabla p$ — считать элементом $\vec{G}(\Omega)$. Условие $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ на $S$ позволяет заключить, что $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ на $S$.

Спроектируем уравнение (2) на $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega)$. В результате получим

$$\frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + P_0(N_0^2(z) u_z \vec{k}) + P_0\left( \frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right) + P_0(-g \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \vec{k}) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) + P_G\left( N_0^2(z) u_z \vec{k} + \frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} - g \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \vec{k} \right) +$$

$$+ \rho_0^{-1} \nabla \left( g \rho_0 u_z + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - c^2 \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) \right) = 0,$$

где $P_0$ и $P_G$ — проекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно. Введем в последнем уравнении функции $\Psi_i$, $i = 1, 2, 3$, такие, что $\Psi_i \in W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$ и

$$\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1 = P_G(-g\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}), \qquad \rho_0^{-1}\nabla\Phi_2 = P_G\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\rho_0^{-1}\nabla\Phi_3 = P_G(N_0^2(z)u_z\vec{k}).$$

Затем проинтегрируем его по пространственным переменным. В результате получим систему

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}) +$$

$$+ P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right) + P_0(-g\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0 u_z +$$

$$+ g\frac{\partial\Phi}{\partial z} - c^2\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = 0. \tag{14}$$

***1.3. Операторное уравнение задачи.*** Для перехода от системы (13), (14) к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве введем операторы $A_{ij}$ и $B_{ij}$, $i, j = 1, 2$, следующим образом:

$$A_{11}\vec{u} = P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}), \qquad A_{12}\Phi = P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$A_{21}\vec{u} = \Psi_3, \qquad A_{22}\Phi = \Psi_2,$$

$$B_{12}\Phi = P_0(-g\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}), \qquad B_{21}\vec{u} = g\rho_0 u_z,$$

$$B_{22}\Phi = g\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Psi_1, \qquad B_{11}\vec{u} = 0,$$

$$B_0\Phi = -c^2\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi).$$

Теперь систему (13), (14) можно записать в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + AU + BU = 0, \qquad U(0) = U^0, \qquad U'(0) = U^1,$$
$$U \equiv (\vec{u}, \Phi)^T \in H \equiv \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)). \tag{15}$$

Скалярное произведение в пространстве $H$ задается по формуле

$$(U_1, U_2)_H = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}\int_\Omega (\rho_0(z)\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2^* + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\cdot\nabla\Phi_2^*)\,d\Omega.$$

Операторы $A$ и $B$ из (15) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} + B_0 \end{pmatrix}.$$

***1.4. Свойства операторов.***

**Лемма 2.** *Оператор* $A: H \to H$ *является самосопряженным и неотрицательным, причем* $\|A\| = \max N_0^2(z) \equiv N_0^2$.

***Доказательство*** состоит в составлении билинейной формы $(AU_1, U_2)_H$, где $U_1$, $U_2 \in H$, и применении определений операторов $A_{ij}$, $i, j = 1, 2$, векторов $U_i$ и соответствующих скалярных произведений.

Кроме того, можно показать, что $\|A\| \le N_0^2$. Использовав то, что $\sigma(A_{11}) = [0, N_0^2]$ [4], получим $\|A\| = N_0^2$.

**Лемма 3.** *Оператор $B_0$ является неограниченным, самосопряженным и положительно определенным в пространстве $W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.*

***Доказательство.*** Составим билинейную форму $(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}$, где $\Phi_1, \Phi_2 \in D(B_0)$. Имеем

$$(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = c^2 \int_\Omega \rho_0(z) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1) \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_2^*)\, d\Omega = (\Phi_1, B_0\Phi_2)_{1,\Omega}.$$

В формуле для $(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}$ положим $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \in W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$. Тогда

$$(B_0\Phi, \Phi)_{1,\Omega} = c^2 \int_\Omega \rho_0(z) \left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega.$$

Нетрудно убедиться в том, что оператор $B_0$ эллиптический. Для таких операторов выполняется неравенство

$$c_1 \|\Phi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_2 \|\Phi\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \qquad c_1, c_2 > 0.$$

Выражение для $\|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}$ имеет вид

$$\|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega)} = c^4 \int_\Omega \rho_0(z) \left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega.$$

Сравнивая выражения для $(B_0\Phi, \Phi)_{1,\Omega}$ и $\|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}$, а также используя приведенное неравенство, приходим к выводу, что норма в энергетическом пространстве оператора $B_0$ эквивалентна одной из норм пространства $W_2^2(\Omega)$. Отсюда и из теорем вложения следует, что, во-первых, $(B_0\Phi, \Phi)_{1,\Omega} = \|\Phi\|^2_{B_0} \ge \|\Phi\|^2_{1,\Omega}$, т. е. оператор $B_0$ — положительно определен, и, во-вторых, любое множество, ограниченное в норме энергетического пространства оператора $B_0$, компактно в норме пространства $W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.

**Лемма 4.** *Оператор $B_0^{-1}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$.*

***Доказательство.*** Компактность следует из предыдущей леммы. Кроме того, известно, что собственные значения оператора $B_0^{-1}$ имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_n(B_0^{-1}) = c_{B_0^{-1}} n^{-2/3}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{16}$$

т. е. оператор $B_0^{-1}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$.

**Лемма 5.** *Оператор $D \equiv A + B$ неотрицателен.*

**2. Собственные колебания.** Перейдем к исследованию собственных колебаний системы, т. е. к изучению свойств решений задачи (15), зависящих от времени по закону $\exp(i\omega t)$. В результате получим спектральную задачу

$$\lambda U = AU + BU, \qquad \lambda = \omega^2. \tag{17}$$

Отметим, что так как оператор $D = A + B$ неотрицателен, спектр задачи (17) вещественный и расположен на луче $[0, +\infty)$.

***2.1. Акустические колебания.*** Перепишем уравнение (17) в матричной форме и будем считать, что $\lambda > N_0^2$. От уравнения (17) перейдем к системе

$$
\begin{aligned}
(I - \lambda^{-1}A_{11})\vec{u} \; &= \; \lambda^{-1}D_{12}\Phi, \\
\lambda\Phi \; = \; D_{21}\vec{u} \; + (D_{22} &+ B_0)\Phi, \qquad i, j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{18}
$$

из которой, исключив $\vec{u}$, получим задачу на собственные значения

$$
\lambda\Phi \; = \; \lambda^{-1}D_{21}R(\lambda)D_{12}\Phi \; + \; D_{22}\Phi \; + \; B_0\Phi,
$$

где $R(\lambda) \equiv (I - \lambda^{-1}A_{11})^{-1}$ — аналитическая оператор-функция, принимающая значения на множестве ограниченных самосопряженных операторов $(\lambda > N_0^2)$.

Выполним в последнем равенстве замену $\Phi = B_0^{-1/2}\zeta$ и применим к обеим частям оператор $B_0^{-1/2}$. В результате получим задачу

$$
L(\lambda)\zeta \; \equiv \; (I + S - \lambda B_0^{-1} + \lambda^{-1}F(\lambda))\zeta \; = \; 0, \tag{19}
$$

где

$$
S \; \equiv \; B_0^{-1/2}D_{22}B_0^{-1/2}, \qquad F(\lambda) \; \equiv \; B_0^{-1/2}D_{21}R(\lambda)D_{12}B_0^{-1/2}.
$$

**Лемма 6.** *Оператор-функция* $F(\lambda)$ *из* (19) *при* $\lambda > N_0^2$ *принимает значения на множестве линейных, ограниченных и самосопряженных операторов.*

Доказать нужно только ограниченность. Для этого покажем, что операторы $Q_{12} \equiv D_{12}B_0^{-1/2}$ и $Q_{21} \equiv B_0^{-1/2}D_{21}$ ограничены. Поскольку они взаимно сопряжены, то достаточно доказать ограниченность $Q_{12}$. Имеем $Q_{12} = A_{12}B_0^{-1/2} + B_{12}B_0^{-1/2}$. Первое слагаемое ограничено (и даже компактно) в силу свойств операторов $A$ и $B_0^{-1/2}$. Покажем, что и $B_{12}B_0^{-1/2}$ также ограничен. Для этого вычислим $\left\| B_{12}B_0^{-1/2}\zeta \right\|^2$:

$$
\begin{aligned}
\left\| B_{12}B_0^{-1/2}\zeta \right\|^2 \; &= \; (B_{12}B_0^{-1/2}\zeta,\, B_{12}B_0^{-1/2}\zeta) \; = \; (B_{12}\Phi,\, B_{12}\Phi) \; = \\
&= \; g^2 \int_\Omega \rho_0(z) \left| \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) \right|^2 d\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\|\zeta\|^2 \; = \; (B_0\Phi, \Phi) \; = \; c^2 \int_\Omega \rho_0(z) \left| \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) \right|^2 d\Omega.
$$

Отсюда следует

$$
\left\| B_{12}B_0^{-1/2} \right\|^2 \; = \; g^2 / c^2.
$$

Следовательно, операторы $Q_{12}$ и $Q_{21}$ ограничены и для их норм справедливы оценки

$$
\| Q_{12} \| \; = \; \| Q_{21} \| \; \le \; \lambda_1^{1/2}(B_0^{-1})N_0^2 \; + \; g/c,
$$

где $\lambda_1(B_0^{-1})$ — первое собственное значение оператора $B_0^{-1}$. Таким образом, ограниченность оператор-функции $F(\lambda)$ доказана.

**Лемма 7.** *Оператор* $S$ *является самосопряженным и компактным.*

***Доказательство.*** Самосопряженность следует из структуры оператора $S$ и свойств входящих в него операторов. Покажем его полную непрерывность. Для этого представим $S$ в виде суммы $S = S_A + S_B$, где $S_A \equiv B_0^{-1/2}B_{22}B_0^{-1/2}$, $S_B \equiv B_0^{-1/2}B_{22}B_0^{-1/2}$. Оператор $S_A$ неотрицателен и, кроме, того, $S_A \in \mathfrak{S}_p$ при

$p > 3/2$. Изучим свойства оператора $S_B$. Для этого составим выражение для $(S_B\zeta, \zeta)$:

$$(S_B\zeta, \zeta) = -2g\int_\Omega \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^* d\Omega.$$

Использовав неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|(S_B\zeta, \zeta)| \leq 2g\|\zeta\|\sqrt{(B_0^{-1}\zeta, \zeta)}.$$

Выберем последовательность $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $\zeta_n \to 0$ (слабо), $n \to \infty$. Для нее существует $c > 0$ такое, что для всех $n \in N$

$$\|\zeta_n\| = \left(c^2\int_\Omega \rho_0(z)\left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_n)\right|^2 d\Omega\right)^{1/2} < c$$

и в силу полной непрерывности оператора $B_0^{-1}$ выполнено условие

$$(B_0^{-1}\zeta_n, \zeta_n) = \int_\Omega \rho_0^{-1}(z)|\nabla\Phi_n)|^2 d\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь в силу оценки для $(S_B\zeta, \zeta)$ получим, что $|(S_B\zeta, \zeta)| \to 0$ при $n \to \infty$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$. Отсюда следует, что $S_B \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$. Кроме того, доказано неравенство

$$\|S_B\| \leq \frac{2g}{c^2}\lambda_1^{1/2}(B_0^{-1}).$$

Лемма доказана.

***2.2. Факторизация операторного пучка.*** Для исследования оператор-функции $L(\lambda)$ из (19) воспользуемся теоремой о факторизации из [3, с. 178]. Перед тем как применить эту теорему выполним в (19) замену $\lambda = 1/\mu$ спектрального параметра. В результате получим операторный пучок

$$M(\mu) = \mu I - B_0^{-1} + \mu S_A + \mu S_B + \mu^2 F(\mu^{-1}), \qquad \mu \in [0, N_0^{-2}]. \tag{20}$$

Использовав оценки для норм операторов, составляющих этот пучок, и теорему о факторизации из [3], придем к следующему утверждению.

**Теорема 1** (достаточное условие факторизации). *При выполнении условия*

$$\lambda_1(B_0) > \max\left\{\left(\sqrt{N_0^2 + \frac{g^2}{c^4}} - \frac{g}{c^2}\right)^2, 4\frac{g^2}{c^4}\right\} \tag{21}$$

*оператор-функция* $M(\mu)$ *допускает факторизацию вида* $M(\mu) = M_+(\mu) \times (\mu I - Z)$, *где* $M_+(\mu)$ *голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка* $[-\varepsilon_1, (N_0^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$, *а оператор* $Z$ *такой, что* $\sigma(Z) \subset [-\varepsilon_1, (N_0^2 + \varepsilon_2)^{-1}]$ *при указанном выше выборе чисел* $\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon_2$.

С помощью метода неопределенных коэффициентов легко проверить, что $Z = M_0^{-1}B_0^{-1} = (I + T)B_0^{-1}$, где $T \in \mathfrak{S}_\infty$, т. е. $Z$ — слабовозмущенный компактный оператор, причем $\operatorname{Ker} Z = \{0\}$.

***2.3. О полноте системы мод акустических волн.***

**Теорема 2.** *Если выполнено условие факторизации* (21), *то задача* (19) *при* $\lambda > N_0^2$ *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k = [\mu_k(Z)]^{-1}$, *состоящий из ко-*

*нечно кратных собственных значений с единственной предельной точкой* $\lambda = +\infty$.

*Соответствующие им собственные векторы* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *образуют полную и минимальную систему в пространстве* $W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.

Доказательство следует из теоремы М. В. Келдыша о слабовозмущенном операторе.

**Теорема 3.** *Если выполнено условие факторизации* (21), *то решениям задачи* (19) $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при* $\lambda > N_0^2$ *соответствуют моды колебаний* $U_k = (\vec{u}_k, \Phi_k)^T$, $k = 1, 2, \ldots$, *имеющие характер акустических волн. А именно*: *при нормировке*

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2}^2 + \|\Phi_k\|_{1,\Omega}^2 = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

*имеют место асимптотические формулы*

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2} \to 0, \qquad \left\| B_0^{-1}\Phi_k - \frac{1}{\lambda_k}\Phi_k \right\|_{1,\Omega} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

***Доказательство.*** Положив $\Phi = \Phi_k$ и $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, запишем систему (18) в виде

$$\vec{u}_k = \lambda_k^{-1}(I - \lambda_k^{-1}A_{11}^{-1})D_{12}\Phi_k,$$
$$\lambda_k\Phi_k = D_{21}\vec{u}_k + (D_{22} + B_0)\Phi_k.$$

Затем, выполнив в ней замену $\Phi_k = B_0^{-1/2}\zeta_k$, после некоторых преобразований получим

$$\vec{u}_k = \lambda_k^{-1}(I - \lambda_k^{-1}A_{11}^{-1})D_{12}\Phi_k,$$
$$\lambda_k B_0^{-1}\zeta_k - \zeta_k = Q_{21}\vec{u}_k + S\zeta_k,$$

после чего перейдем к пределу при $k \to \infty$. Из первого из соотношений имеем $\|\vec{u}_k\|_{L_2} \to 0$, а из второго — $\|B_0^{-1}\zeta_k - \lambda_k^{-1}\zeta_k\|_{1,\Omega} \to 0$. Переходя от $\zeta_k$ к $\Phi_k$, получаем утверждение теоремы.

***2.4. Двусторонние оценки собственных значений.*** По-прежнему, будем считать, что выполнено условие (21). В этом случае собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи находятся на интервале $(N_0^2, +\infty)$, образуя там дискретный спектр с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$. Перейдем к пучку с ограниченными операторами. Для этого выполним замену $\zeta = B_0^{1/2}\Phi$. В результате получим

$$\lambda\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_0^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} = 0,$$

или в компактной форме (обозначения ясны)

$$\mathcal{L}(\lambda) \equiv (\lambda\mathcal{R} - \mathcal{A} - \mathcal{J})z = 0, \qquad z = (\vec{u}, \zeta)^T. \tag{22}$$

Умножив скалярно (22) на $z$, можно сделать вывод, что собственные значения $\lambda_k$ находятся среди значений функционала Релея

$$\lambda_k(z) = \frac{(\mathcal{A}z, z) + (\mathcal{J}z, z)}{(\mathcal{R}z, z)},$$

причем можно считать, что $(\mathcal{R}z, z) = 1$. Нетрудно видеть, что $(\mathcal{L}(\lambda(z)z), z) =$

$= 0$ и $(\mathcal{L}'(\lambda(z)z), z) > 0$. Таким образом, пара $(\mathcal{L}(\lambda), \lambda(z))$ образует систему Релея на интервале $(N_0^2, +\infty)$.

Для частот $\lambda_k \in (N_0^2, +\infty)$ справедлив вариационный принцип [1]

$$\lambda_k = \sup_{M_k} \inf_{z \in M_k} \lambda(z), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где $M_k$ — $k$-мерное подпространство.

Далее получим двусторонние оценки для собственных значений $\lambda_k$. В силу свойств входящих в выражение для $\lambda(z)$ операторов

$$\frac{(\mathcal{J} z, z)}{(\mathcal{R} z, z)} \le \lambda(z) \le \frac{(\mathcal{A} z, z) + (\mathcal{J} z, z)}{(\mathcal{R} z, z)}.$$

Дальнейшее преобразование приводит к двойному неравенству

$$(B_0\Phi, \Phi) \le \lambda(z) \le (DU, U), \qquad U = (\vec{u}, \Phi)^T.$$

Воспользовавшись леммой 5, оценим сверху выражение для $(DU, U)$:

$$\begin{aligned}
(DU, U) \le{}& \int_\Omega \rho_0(z) N_0^2(z) \left|(\vec{u} + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\cdot\vec{k}\right|^2 d\Omega + \\
&+ c^2 \int_\Omega \rho_0(z) \left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega + \\
&+ 2g \left| \int_\Omega \rho_0(z)(\vec{u} + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\cdot\vec{k}\,\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\, d\Omega \right| + \\
&+ \int_\Omega \rho_0(z) N_0^2(z) \left|(\vec{u} + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\cdot\vec{k}\right|^2 d\Omega + \\
&+ c^2 \int_\Omega \rho_0(z) \left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega + \\
&+ 2gc^{-1} \left( \int_\Omega \rho_0(z) N_0^2(z) \left|(\vec{u} + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\cdot\vec{k}\right|^2 d\Omega \right)^{1/2} \times \\
&\times \left( c^2 \int_\Omega \rho_0(z) \left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega \right)^{1/2} \le \\
\le{}& N_0^2 + (B_0\Phi, \Phi) + 2gc^{-1}(B_0\Phi, \Phi)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Применив теперь вариационные принципы (23) и Куранта, получим требуемые оценки для собственных значений $\lambda_k$:

$$\lambda_k(B_0) \le \lambda_k \le \lambda_k(B_0) + 2gc^{-1}\lambda_k^{1/2}(B_0) + N_0^2,$$

откуда следует асимптотическая формула

$$\lambda_k = \lambda_k(B_0)(1 + o(1)), \qquad k \to \infty.$$

***2.5. Симметризатор спектральной задачи.*** Введем в рассмотрение оператор $F$ по формуле

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu| = t} M^{-1}(\mu)\, d\mu, \qquad \lambda_1(B_0^{-1}) < t < N_0^{-2}.$$

Так же, как и в пп. 2.1, доказываются следующие утверждения.

**Лемма 8.** *Оператор* $F$ *является самосопряженным, ограниченным и симметризующим справа оператор* $Z$, *т. е.* $(ZF)^* = ZF$.

**Лемма 9.** *Оператор* $F$ *является положительно определенным и имеет структуру* $F = I + F_1$, *где* $F_1 \in \mathfrak{S}_p$ (*при* $p > 3$).

***2.6. Базисность системы мод акустических волн.*** Наличие симметризатора $F$ оператора $Z$ позволяет, при выполнении условия (21), доказать следующую теорему.

**Теорема 4.** *При выполнении условия* (21) *система собственных векторов задачи* (19) *образует* $p$*-базис* (*при* $p > 3$) *пространства* $W_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$.

Доказательство повторяет соответствующие рассуждения из пп. 2.2.

***2.7. Волны, порожденные стратификацией.*** Будем считать, что $\lambda \in [0, N_0^2]$. Перепишем исследуемую систему в виде

$$\lambda \vec{u} = A_{11}\vec{u} + D_{12}\Phi,$$
$$(\lambda I - D_{22} - B_0)\Phi = D_{21}\vec{u}.$$

На отрезке $[0, N_0^2]$ оператор $\lambda I - D_{22} - B_0$ обратим всюду, за исключением конечного числа точек. Действительно,

$$\lambda I - D_{22} - B_0 = -B_0^{-1/2}(I - S - \lambda B_0^{-1})B_0^{-1/2}.$$

Согласно теореме М. В. Келдыша [6] оператор-функция $I - S - \lambda B_0^{-1}$ обратима всюду, за исключением не более чем счетного множества изолированных точек с предельной точкой $\lambda = \infty$. На отрезке $[0, N_0^2]$ этих точек не более конечного числа, т. е. утверждение об обратимости оператора $\lambda I - D_{22} - B_0$ доказано.

В тех же точках, в которых оператор $\lambda I - D_{22} - B_0$ обратим, имеем спектральную задачу

$$\lambda \vec{u} = (A_{11} - Q_{12}Q_{21} + P(\lambda))\vec{u},$$

где оператор-функция $P(\lambda)$ принимает значения на множестве самосопряженных вполне непрерывных операторов.

Далее нам снова понадобится результат работы [6] о предельном спектре оператора $A_{11}$. Опираясь на него и рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям из пп. 2.2, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Предельный спектр задачи* (17) *совпадает с отрезком* $[0, N_0^2]$.


1. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
2. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
3. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
4. *Копачевский Н. Д., Царьков М. Ю.* К вопросу о спектре оператора плавучести // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1987. – № 3. – С. 548 – 551.
5. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей. – Л., 1985. – 79 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 8058-В.
6. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – **24**, вып. 4 (160). – С. 15 – 41.


Получено 24.05.2005