УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Exact-order estimates are obtained for the best approximations in the metric L_∞ of classes $B^r_{\infty,\theta}$ of periodic functions of two variables by trigonometric polynomials with spectrum belonging to the hyperbolic cross. Best approximations in the metric L_∞ of classes $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$, of periodic multivariable functions by trigonometric polynomials with spectrum belonging to the step-type hyperbolic cross are also investigated.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень у метриці L_∞ класів $B^r_{\infty,\theta}$ періодичних функцій двох змінних тригонометричними поліномами зі спектром із гіперболічного хреста. Досліджено також найкращі наближення в метриці L_∞ класів $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$, періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами зі спектром із східчастого гіперболічного хреста.

Введение. В работе изучаются наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами с „номерами” гармоник из гиперболических крестов. Погрешность приближений оценивается в равномерной метрике. Параллельно исследуется вопрос о возможности реализации наилучших приближений соответствующими линейными методами. Установленные в работе оценки дополняют результаты, полученные в [1], где можно ознакомиться с соответствующей библиографией. Приведем необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$, и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, — пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далее будем предполагать, что для функций $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \qquad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций условимся обозначать $L^0_p(\pi_d)$.

Для функции $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j-й переменной с шагом h

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l-го порядка

$$\Delta^l_{h,j} f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \ldots \Delta_{h,j}}^{l} f(x)$$

в точке x_j с шагом h. Далее, если $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \ldots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \ldots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы вектор $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, и числовые параметры $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le p \le \infty$. Функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int_{\pi_d} \left\| \Delta_h^k f(x) \right\|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \le 1, \qquad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\sup_h \left\| \Delta_h^k f(x) \right\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \le 1, \qquad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ и $r = (r_1, \ldots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = \overline{1, d}$. Классы $B_{p,\theta}^r$ были введены О. В. Бесовым [2]; при $\theta = \infty$ $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r — аналоги классов, введенных С. М. Никольским (см., например, [3, с. 182]). В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться следующим эквивалентным определением классов $B_{p,\theta}^r$.

Для векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{ k : k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j} \right\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коэффициенты Фурье $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда классы $B_{p,\theta}^r$ можно определить следующим образом (см., например, [4]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \qquad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \le 1 \right\}.$$

Приведенное определение классов $B_{p,\theta}^r$ можно распространить и на предельные значения $p = 1$ и $p = \infty$, несколько видоизменив при этом „блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k - l}{l} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d}\left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где $*$ — операция свертки. Тогда при каждом $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\|A_s(f,x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) : \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)}\|A_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \ldots, r_d)$, содержащихся в определениях классов, упорядочены в виде $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$, а $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ — вектор с координатами $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, d}$. При изложении результатов будет фигурировать также вектор $r' = (r_1', \ldots, r_d')$, который связан с вектором $r = (r_1, \ldots, r_d)$ так, что $r_1 = r_1' = \ldots = r_\nu'$ и $r_1 < r_j' < r_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$. Соответственно $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_d')$ — вектор с координатами $\gamma_j' = r_j' / r_1$, $j = \overline{1, d}$.

Пусть $Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma)\le n} \rho(s)$. Тогда множество векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ таких, что $k \in Q_n^r$, называют ступенчатым гиперболическим крестом. Через $S_n^\gamma(f, x)$ будем обозначать частную сумму Фурье функции $f(x)$ вида

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{(s,\gamma)\le n} \delta_s(f, x),$$

которую называют ступенчатой гиперболической суммой Фурье. Иногда нам удобно рассматривать множество $\Gamma(N, \gamma)$, соответствующее множеству Q_n^r. По определению

$$\Gamma(N,\gamma) = \left\{ k : k = (k_1, \ldots, k_d),\ 0 < \prod_{j=1}^{d} |k_j|^{\gamma_j} \le N \right\},$$

и это множество называют гиперболическим крестом.

Через $T(N, \gamma)$ будем обозначать множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{k\in\Gamma(N,\gamma)} c_k e^{i(k,x)},$$

а через $T(Q_n^r)$ — множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{k\in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)}.$$

Отметим, что в принятых обозначениях справедливы включения

$$T(Q_n^r) \subset T(2^n, \gamma) \subset T(Q^r_{n+\gamma(d)}),$$

где $\gamma(d) = \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$.

Для $f \in L_p^0(\pi_d)$ определим величины

$$E_{N,\gamma}(f)_p = \inf_{t \in T(N,\gamma)} \|f - t\|_p, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

$$E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t \in T(Q_n^r)} \|f - t\|_p, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

— наилучшие приближения функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник из гиперболического и ступенчатого гиперболического крестов соответственно. Для функционального класса F полагаем

$$E_{N,\gamma}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{N,\gamma}(f)_p,$$

$$E_{Q_n^r}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q_n^r}(f)_p.$$

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 << \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 << \mu_2$ и $\mu_1 >> \mu_2$. Отметим, что все постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые будут использоваться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Наконец, если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

1. Наилучшие приближения классов $B^r_{\infty,\theta}$ в метрике L_∞. Здесь мы установим в двумерном случае, т. е. при $d = 2$, точные по порядку оценки величины $E_{N,\gamma}(B^r_{\infty,\theta})_\infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $r_1 > 0$, $1 \le \theta < \infty$. *Тогда при* $d = 2$ *имеет место оценка*

$$E_{N,\gamma}(B^r_{\infty,\theta})_\infty \asymp N^{-r_1}(\log N)^{1-1/\theta}. \tag{1}$$

Доказательство. Установим в (1) оценку сверху. Нам будет удобнее получить искомую оценку для величины $E_{Q_n^r}(B^r_{\infty,\theta})_\infty$, из которой естественным образом при $2^n \le N < 2^{n+1}$ можно записать порядковую оценку сверху для $E_{N,\gamma}(B^r_{\infty,\theta})_\infty$. Более того, оценку сверху величины $E_{Q_n^r}(B^r_{\infty,\theta})_\infty$ мы проведем при $d \ge 2$.

Итак, пусть $f \in B^r_{\infty,\theta}$. Рассмотрим приближающий полином $t_n(f, x)$ вида

$$t_n(f, x) = \sum_{(s,\gamma) \le n} A_s(f, x), \tag{2}$$

где число $n \in \mathbb{N}$ подобрано по заданному N из соотношения $2^n \le N < 2^{n+1}$. Тогда согласно (2) можно записать

$$\|f(x) - t_n(f, x)\|_\infty = \left\| \sum_{(s,\gamma) > n} A_s(f, x) \right\|_\infty \le \sum_{(s,\gamma) > n} \|A_s(f, x)\|_\infty. \tag{3}$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $1 < \theta < \infty$. Тогда, применив к последней сумме из (3) неравенство Гельдера с показателем θ и воспользовавшись затем соотношением

$$\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{d-1}, \qquad \alpha > 0, \tag{4}$$

будем иметь

$$E_{Q_n^r}(f)_\infty \le \|f(x) - t_n(f,x)\|_\infty \le \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll \|f\|_{B^r_{\infty,\theta}} 2^{-nr_1} n^{(d-1)/\theta'} \le 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-1/\theta)},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Отсюда, поскольку $f(x)$ — произвольная функция из $B^r_{\infty,\theta}$, находим

$$E_{N,\gamma}(B^r_{\infty,\theta})_\infty \ll N^{-r_1} (\log^{d-1} N)^{1-1/\theta}. \tag{5}$$

В случае $\theta = 1$, отправляясь от (3), получаем

$$E_{Q_n^r}(f)_\infty \le 2^{-nr_1} \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_\infty \le 2^{-nr_1} \|f\|_{B^r_{\infty,1}} \le 2^{-nr_1}$$

и, следовательно,

$$E_{N,\gamma}(B^r_{\infty,1})_\infty \ll N^{-r_1}.$$

Оценка сверху в теореме установлена.

***Замечание* 1.** Оценку (5) можно уточнить, если в качестве приближающего полинома для $f \in B^r_{\infty,\theta}$ использовать полином

$$\tilde{t}_n(f,x) = \sum_{(s,\gamma')\le n} A_s(f,x).$$

Тогда, проводя аналогичные рассуждения и используя вместо (4) соотношение [5, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \qquad \alpha > 0, \tag{6}$$

имеем

$$E_{Q_n^{r'}}(f)_\infty \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}.$$

Следовательно, при $\theta \in (1, \infty)$

$$E_{N,\gamma'}(B^r_{\infty,\theta})_\infty \ll N^{-r_1} (\log^{\nu-1} N)^{1-1/\theta}.$$

Перейдем к установлению в (1) соответствующей оценки снизу. При этом будем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые применялись В. Н. Темляковым при установлении оценки снизу величины $E_{N,\gamma}(H^r_\infty)_\infty$ (см., например, [5, с. 55]).

Рассмотрим вектор $\gamma = (1, \gamma_2)$, где $\gamma_2 \ge 1$, и по заданному N подберем n из равенства $n = [\log_3 N] + \gamma_2 + 2$. Пусть $S(n,\gamma)$ обозначает множество векторов $s = (s_1, s_2)$, удовлетворяющих условию $n < s_1 + \gamma_2 s_2 \le n+1$, где s_j — неотрицательные целые числа; при фиксированном j все s_j различны. В таком случае для количества элементов множества $S(n,\gamma)$ справедливо соотношение

$$|S(n,\gamma)| \asymp n.$$

Рассмотрим функцию

$$f_n(x) = \sum_{s\in S(n,\gamma)} 3^{-r_1(s_1+\gamma_2 s_2)} \cos 3^{s_1} x_1 \cos 3^{s_2} x_2 .$$

Поскольку функция

$$g(x) = C_1 \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 3^{-r_1(s_1+\gamma_2 s_2)} \cos 3^{s_1} x_1 \cos 3^{s_2} x_2 ,$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$, принадлежит классу H_∞^r [5, с. 55], согласно теореме 1.1 [5, с. 32]

$$\| A_s(g, x)\|_\infty << 2^{-r_1(s_1+\gamma_2 s_2)}, \qquad s_1,\, s_2 \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, если $\tilde{S}(n,\gamma)$ — множество тех векторов $s = (s_1, s_2)$, для которых $\| A_s(f_n, x)\|_\infty \neq 0$, то в силу соотношения $\left|\tilde{S}(n,\gamma)\right| \asymp |S(n,\gamma)| \asymp n$ будем иметь

$$\| f_n \|_{B^r_{\infty,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f_n, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s\in\tilde{S}(n,\gamma)} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(g, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} << \left(\sum_{s\in\tilde{S}(n,\gamma)} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{1/\theta}. \tag{7}$$

Таким образом, из (7) заключаем, что функция $v(x) = C_2 n^{-1/\theta} f_n(x)$ с соответствующей постоянной $C_2 > 0$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta}$.

Теперь рассмотрим функцию

$$F_n(x) = \prod_{s\in S(n,\gamma)} \left(1 + \cos 3^{s_1} x_1 \cos 3^{s_2} x_2\right).$$

Как установлено в [5, с. 56], согласно соотношению между числами n и N

$$F_n(x) - 1 \in T^{\perp}(N,\gamma), \tag{8}$$

где $T^{\perp}(N,\gamma)$ обозначает множество функций вида

$$\sum_{k\,\bar{\in}\,\Gamma(N,\gamma)} a_{k_1,k_2} e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}.$$

Кроме того, для функции $F_n(x)$ выполнены условия

$$\begin{gathered} F_n(x) \geq 0, \\ (2\pi)^{-2} \int_{\pi_2} F_n(x)\,dx = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Далее, пусть $t_N(x)$ — полином наилучшего приближения функции $v(x)$ в метрике L_∞, содержащий гармоники с „номерами” из $\Gamma(N,\gamma)$. Тогда, с одной стороны, принимая во внимание, что все коэффициенты Фурье функции $F_n(x)$ неотрицательны, в силу (8) можем записать

$$\left(v(x) - t_N(x),\, F_n(x)\right) = C_2 n^{-1/\theta}\left(f_n(x), F_n(x)\right) =$$

$$= C_2 n^{-1/\theta} \sum_{n<s_1+\gamma_2 s_2\leq n+1} 3^{-r_1(s_1+\gamma_2 s_2)} >> 3^{-r_1(n+1)} n^{-1/\theta} \sum_{n<s_1+\gamma_2 s_2\leq n+1} 1 \asymp$$

$$\asymp\ 3^{-r_1 n} n^{1-1/\theta} \ \asymp\ N^{-r_1} (\log N)^{1-1/\theta}. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу неравенства Гельдера и второго из условий (9) будем иметь

$$\begin{aligned}\big(v(x) - t_N(x),\ F_n(x)\big) \ &\le\ \| v(x) - t_N(x)\|_\infty \| F_n(x)\|_1 \ = \\ &=\ E_{N,\gamma}(v)_\infty \| F_n(x)\|_1 \ =\ E_{N,\gamma}(v)_\infty .\end{aligned} \tag{11}$$

Сопоставив (10) и (11), получим оценку

$$E_{N,\gamma}(v)_\infty \ >>\ N^{-r_1} (\log N)^{1-1/\theta}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

***Замечание* 2.** Как следует из доказательства теоремы 1, порядок наилучших приближений $E_{N,\gamma}(B^r_{\infty,\theta})_\infty$ в двумерном случае реализуется линейным методом.

2. Наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$, в L_∞. В [1] получена оценка сверху величины $E_{Q_n^r}(B^r_{p,\theta})_\infty$, $1 \le p \le 2$, и показано, что при $1 < p \le 2$ эта оценка не реализуется с помощью приближения линейными методами. Здесь мы установим оценку сверху величины $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_\infty$ в случае $2 < p < \infty$. Из этой оценки и доказанной в [1] теоремы 4.1 также будет следовать, что приближения классов $B^r_{p,\theta}$, $2 < p < \infty$, линейными методами в равномерной метрике не реализуют наилучшие приближения $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_\infty$.

Кроме того, мы получим точную по порядку оценку наилучших приближений классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, в метрике L_∞ в случае $d = 1$, а также установим порядок величины $E_{Q_n^r}(B^r_{p,\theta})_\infty$, $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le 2$, в многомерном случае. Как отмечалось выше, оценка сверху этой величины установлена в [1].

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $2 < p < \infty$, $r_1 > 1/p$, $1 < \theta < \infty$. *Тогда при* $d \ge 2$

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_\infty \ << \ \begin{cases} 2^{-n(r_1 - 1/p)} n^{(\nu-1)(1-2/p)/\theta'}, & 1 < \theta \le 2, \\ 2^{-n(r_1 - 1/p)} n^{(\nu-1)(1/\theta' - 1/p)}, & 2 < \theta < \infty, \end{cases}$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Доказательство. Пусть Φ — некоторое конечномерное линейное подпространство из L_p. Обозначим через $\Phi^\perp$ подпространство, ортогональное Φ, т. е. для каждой функции $\varphi \in \Phi$ выполнено равенство $(\varphi, g) = 0$, $g \in \Phi^\perp$. В принятых обозначениях, как следствие общего утверждения, полученного С. М. Никольским, имеет место соотношение

$$\inf_{\varphi \in \Phi} \| f - \varphi \|_p \ = \ \sup_{\substack{g \in \Phi^\perp \\ \|g\|_{p'} \le 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x) g(x) dx \right|, \tag{12}$$

$$1 \le p \le \infty, \ 1/p' + 1/p = 1.$$

Отметим, что это соотношение устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае (см., например, [6, с. 25, 26]).

Пусть $G_1^\perp(Q_n^{r'})$ обозначает множество функций $g \in L_1$ таких, что $\|g\|_1 \le 1$ и для всех $f \in T(Q_n^{r'})$ $(f, g) = 0$. В таком случае согласно (12) можем записать

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_\infty = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} (f,g) = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s (\delta_s(f),\delta_s(g)) =$$

$$= \sup_{\substack{f,\{a_s\}:\|\delta_s(f)\|_p\le a_s,\\ \left(\sum_s a_s^\theta 2^{(s,r)\theta}\right)^{1/\theta}\le 1}} \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s (\delta_s(f),\delta_s(g)) =$$

$$= \sup_{\substack{\{a_s\}:\\ \left(\sum_s a_s^\theta 2^{(s,r)\theta}\right)^{1/\theta}\le 1}} \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s a_s \|\delta_s(g)\|_{p'} =$$

$$= \sup_{\substack{\{a_s\}:\\ \left(\sum_s a_s^\theta 2^{(s,r)\theta}\right)^{1/\theta}\le 1}} \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s a_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(g)\|_{p'} 2^{-(s,r)} =$$

$$= \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \left(\sum_s 2^{-(s,r)\theta'} \|\delta_s(g)\|_{p'}^{\theta'}\right)^{1/\theta'} \asymp$$

$$\asymp \sup_{g\in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \left(\sum_s 2^{-(s,r)\theta'} \|A_s(g)\|_{p'}^{\theta'}\right)^{1/\theta'}. \tag{13}$$

Для того чтобы из (13) получить искомые оценки величины $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_\infty$, нам понадобится результат, полученный в [1]:

$$E_{Q_n^{r}}(B^r_{p,\theta})_\infty \ll 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}, \tag{14}$$

$$1\le p\le 2,\ 1\le\theta<\infty,\ r_1>1/p, \qquad a_+ = \max\{a,0\}.$$

Заметим, что эту же оценку можно записать и для величины $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_\infty$.

Следовательно, полагая в (14) $p=2$ и используя вместо вектора $r = (r_1,\ldots,r_d)$ вектор $r/2 = (r_1/2,\ldots,r_d/2)$, в силу соотношения (13) имеем

$$\left(\sum_s 2^{-(s,r/2)\theta'} \|A_s(g)\|_2^{\theta'}\right)^{1/\theta'} \ll 2^{-n(r_1/2-1/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{15}$$

Далее, согласно неравенству

$$\|f\|_a \le \|f\|_1^\alpha \|f\|_b^{1-\alpha}, \quad f\in L_b, \quad 1<a<b, \quad \alpha = \left(\frac1a-\frac1b\right)\left(1-\frac1b\right)^{-1},$$

при $1<p'<2$

$$\|A_s(g)\|_{p'} \le \|A_s(g)\|_1^{2/p'-1} \|A_s(g)\|_2^{2-2/p'}. \tag{16}$$

Таким образом, в силу (16) для последней суммы из (13) можем записать соотношение

$$\left(\sum_s 2^{-(s,r)\theta'} \|A_s(g)\|_{p'}^{\theta'}\right)^{1/\theta'} \le$$

$$\le \left(\sum_s \left(\|A_s(g)\|_1^{(2/p'-1)\theta'} 2^{-(s,r)\theta'/p'}\right)\left(\|A_s(g)\|_2^{(2-2/p')\theta'} 2^{-(s,r)(1-1/p')\theta'}\right)\right)^{1/\theta'} = I.$$

Далее, используя неравенство Гельдера с показателем $p'/(2-p')$ и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$I \leq \left(\sum_s \|A_s(g)\|_1^{\theta'} 2^{-(s,r)\theta'/(2-p')}\right)^{(2/p'-1)/\theta'} \left(\sum_s \|A_s(g)\|_2^{\theta'} 2^{-(s,r/2)\theta'}\right)^{(2-2/p')/\theta'}. \quad (17)$$

Оценим каждый из сомножителей (17). Принимая во внимание, что для $g \in G^{\perp}(Q_n^{r'})$ $\|A_s(g)\|_1 << 1$, в силу соотношения (6) имеем

$$\left(\sum_s \|A_s(g)\|_1^{\theta'} 2^{-(s,r)\theta'/(2-p')}\right)^{(2/p'-1)/\theta'} << \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-(s,r)\theta'/(2-p')}\right)^{(2/p'-1)/\theta'} <<$$

$$<< 2^{-nr_1/p'} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'}. \quad (18)$$

Использовав оценку (15) для второго сомножителя (17), можем записать

$$\left(\sum_s \|A_s(g)\|_2^{\theta'} 2^{-(s,r/2)\theta'}\right)^{(2-2/p')/\theta'} << \left(2^{-n(r_1/2-1/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}\right)^{2-2/p'} =$$

$$= 2^{-n(r_1/p-1/p)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+(2/p)}. \quad (19)$$

Таким образом, выполняя элементарные преобразования, согласно (18) и (19) при $1 < \theta \leq 2$ получаем

$$I << 2^{-nr_1/p'} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'} 2^{-n(r_1/p-1/p)} = 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'}. \quad (20)$$

Если же $2 < \theta < \infty$, то также с помощью соответствующих преобразований приходим к оценке

$$I << 2^{-nr_1/p'} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'} 2^{-n(r_1/p-1/p)} n^{(\nu-1)(1/p-2/p\theta)} =$$

$$= 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\theta'-1/p)}. \quad (21)$$

Подставляя оценки (20) и (21) в (13), завершаем доказательство теоремы.

Пусть $F_r(x, \alpha)$ обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме содержатся только те векторы k, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Обозначим через $W^r_{p,\alpha}$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x-y, \alpha) dy,$$

$$\varphi \in L_p(\pi_d), \quad \|\varphi\|_p \leq 1.$$

***Замечание* 3.** Поскольку при $2 < p < \infty$ имеет место вложение $W^r_{p,\alpha} \subset B^r_{p,p}$ согласно второй оценке теоремы 2 при $\theta = p$ можем записать

$$E_{Q_n^{r'}}(W^r_{p,\alpha})_\infty << 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1-2/p)}. \quad (22)$$

Аналогичная оценка для величины $E_{Q_n^r}(W^r_{p,\alpha})_\infty$, $2 < p < \infty$, с множителем $n^{(d-1)(1-2/p)}$ вместо $n^{(\nu-1)(1-2/p)}$ в правой части (22) получена В. Н. Темляковым (см., например, [5, с. 66]]).

Теперь обсудим вопрос о возможности реализации оценок теоремы 2 соответствующими линейными методами приближения. В [1] (теорема 4.1) в случае $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ и $r = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > 1/p$, установлена оценка

$$\sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - \mathfrak{L}_{Q_n^r}(f) \right\|_\infty \gg 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(d-1)(1-1/\theta)}, \tag{23}$$

где

$$\mathfrak{L}_{Q_n^r}(f) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(x-y) L_{Q_n^r}(y)\, dy$$

и

$$L_{Q_n^r}(y) = \sum_{k\in Q_n^r} c_{n,k}\, e^{i(k,y)},$$

$c_{n,k}$ — произвольные числа.

Сопоставляя оценку (23) с результатом теоремы 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть* $r=(r_1,\ldots,r_1)\in\mathbb{R}^d_+$, $d\ge 2$, $2<p<\infty$ *и* $\mathfrak{L}_{Q_n^r}$ *— последовательность линейных ограниченных операторов, определенных на* $L_p^0(\pi_d)$ *и сопоставляющих каждой функции* $f\in L_p^0(\pi_d)$ *тригонометрический полином* $\mathfrak{L}_{Q_n^r}(f)\in T(Q_n^r)$. *Тогда при* $1<\theta<\infty$ *и* $r_1>1/p$ *выполнено соотношение*

$$E_{Q_n^r}(B^r_{p,\theta})_\infty = o\left(\sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - \mathfrak{L}_{Q_n^r}(f) \right\|_\infty\right). \tag{24}$$

Таким образом, соотношение (24) свидетельствует о том, что при $d\ge 2$ приближение классов $B^r_{p,\theta}$, $2<p<\infty$, линейными методами в равномерной метрике не реализует порядковых оценок соответствующих наилучших приближений.

В заключение работы приведем точную по порядку оценку величины $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{\infty,1})_\infty$ при $d\ge 2$, а также установим порядок наилучшего приближения в метрике L_∞ классов $B^r_{p,\theta}$, $1\le p\le\infty$, в одномерном случае.

Теорема 4. *Пусть* $r_1>0$. *Тогда при* $d\ge 2$

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{\infty,1})_\infty \asymp 2^{-nr_1}. \tag{25}$$

Доказательство. Оценку сверху в (25) легко получить с помощью тех рассуждений, которые применялись при установлении оценки сверху величины $E_{Q_n^r}(B^r_{\infty,\theta})_\infty$ в теореме 1. Соответствующая оценка снизу следует из теоремы 2 [7], в которой установлен порядок колмогоровского поперечника класса $B^r_{\infty,1}$ в пространстве L_∞:

$$d_M(B^r_{\infty,1}, L_\infty) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{26}$$

Напомним, что M-мерным колмогоровским поперечником центрально-симметричного множества Φ банахова пространства X называется величина

$$d_M(\Phi, X) = \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in L_M} \|f-u\|_X,$$

где L_M — подпространство размерности M пространства X.

Подбирая по заданному n число M из соотношения $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, в силу (26) приходим к оценке

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{\infty,1})_\infty \gg 2^{-nr_1}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что оценка (25) реализуется соответствующим линейным методом.

Пусть при $d = 1$

$$t_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

и

$$E_N(f)_\infty = \inf_{c_k} \| f(x) - t_N(x) \|_\infty$$

— наилучшее приближение функции $f(x)$ в равномерной метрике полиномами $t_N(x)$.

Соответственно

$$E_N(B^{r_1}_{p,\theta})_\infty = \sup_{f \in B^{r_1}_{p,\theta}} E_N(f)_\infty .$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $r_1 > 1/p$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда при* $d = 1$

$$E_N(B^{r_1}_{p,\theta})_\infty \asymp N^{-(r_1 - 1/p)}. \tag{27}$$

Доказательство. Установим в (27) оценку сверху. Пусть $1 \le p < \infty$. В таком случае искомая оценка следует из теоремы 2.1 [1]. Если же $p = \infty$, то оценка величины $E_N(B^{r_1}_{\infty,\theta})_\infty$ устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 1.

Переходя к доказательству в (27) оценки снизу, подберем по заданному N число s из соотношения $2N < 2^s \le 4N$ и положим

$$f_s(x) = V_{2^{s+1}}(x) - V_{2^s}(x).$$

Поскольку

$$\| f_s \|_p \asymp 2^{s(1-1/p)}, \qquad 1 \le p \le \infty, \tag{28}$$

легко видеть, что функция

$$f(x) = 2^{-(r_1 + 1 - 1/p)s} f_s(x)$$

принадлежит классу $B^{r_1}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$.

Далее, пусть $t^*_N(x)$ — полином наилучшего приближения функции $f(x)$. Тогда, с одной стороны, согласно соотношению между числами N и s можем записать

$$(f - t^*_N, f_s) = (f, f_s) = 2^{-(r_1+1-1/p)s} \| f_s \|_2^2 \gg 2^{-(r_1 - 1/p)s}. \tag{29}$$

С другой стороны, в силу неравенства Гельдера и оценки (28) будем иметь

$$(f - t^*_N, f_s) \le \left\| f - t^*_N \right\|_\infty \| f_s \|_1 \ll \left\| f - t^*_N \right\|_\infty = E_N(f)_\infty . \tag{30}$$

Сопоставляя (29) и (30), приходим к оценке

$$E_N(f)_\infty \gg 2^{-(r_1 - 1/p)s} \asymp N^{-(r_1 - 1/p)}.$$

Теорема доказана.

Теперь приведем два утверждения, которые следуют из теоремы 5 и известных результатов.

В работе [1] получена оценка

$$E_{N,\gamma}(B^r_{p,\theta})_\infty \ll N^{-(r_1-1/p)}(\log^{\nu-1}N)^{(1/2-1/\theta)_+},$$
$$1 \le p \le 2, \quad 1 \le \theta \le \infty, \quad r_1 > \frac{1}{p}. \tag{31}$$

Поскольку при $1 \le \theta \le 2$ оценка (31) не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, в этом случае оценку снизу величины $E_{N,\gamma}(B^r_{p,\theta})_\infty$ достаточно получить при $d = 1$.

Таким образом, используя теорему 5, а также оценку (31), приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le 2$ *и* $r_1 > 1/p$. *Тогда при* $d \ge 1$

$$E_{N,\gamma}(B^r_{p,\theta})_\infty \asymp N^{-(r_1-1/p)}. \tag{32}$$

Отметим, что при $\theta = 1$ оценку (32) можно распространить и на случай $2 < p < \infty$.

Теорема 7. *Пусть* $2 \le p < \infty$ *и* $r_1 > 1/p$. *Тогда при* $d \ge 1$

$$E_{N,\gamma}(B^r_{p,1})_\infty \asymp N^{-(r_1-1/p)}. \tag{33}$$

Оценка сверху в (33) следует из теоремы 2.1 [1], а снизу — из одномерного случая, рассмотренного в теореме 5.

1. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91–116.
2. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
5. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
6. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. *Романюк А. С.* Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ в метрике пространства L_∞ // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, № 2. – С. 201 – 218.

Получено 13.09.2005,
после доработки — 13.02.2006