УДК 519.21 + 62

Я. М. Чабанюк (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Sufficient conditions of the asymptotic normality of discrete procedure of the stochastic approximation in the semi-Markov medium are obtained by using a compensation operator of the extended Markov renewal process. The asymptotic representation of the compensation operator provides the construction of generator of the Ornshtein – Uhlenbeck-type limit diffusion process.

Одержано достатні умови асимптотичної нормальності стрибкової процедури стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі з використанням компенсуючого оператора розширеного процесу марковського відновлення. Асимптотичне зображення компенсуючого оператора забезпечує побудову генератора граничного дифузійного процесу типу Орнштейна – Уленбека.

Вступ. У роботі автора [1] було розглянуто асимптотичну нормальність неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі. В цій же роботі вперше застосовано новий підхід, що ґрунтується на розгляді процедури стохастичної апроксимації (ПСА) в схемі серій із малим параметром $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$. Це дало змогу використати розв'язок проблеми сингулярного збурення [2] для зведено-оборотного оператора марковського процесу. Крім того, такий підхід значно спрощує дослідження асимптотичної нормальності ПСА порівняно з роботами [3, 4].

1. Постановка задачі. Дискретна процедура стохастичної апроксимації (ДПСА) задається співвідношенням

$$u_{n+1}^{\varepsilon} = u_n^{\varepsilon} + \varepsilon^2 a_n^{\varepsilon} C(u_n^{\varepsilon}, x_n^{\varepsilon}), \quad n \geq 0, \tag{1}$$

де функція регресії $C(u,x)$, $u \in R$, $x \in X$, задовольняє умови існування глобального розв'язку супроводжуючих систем:

У$_1$) $du_x(t)/dt = C(u_x(t), x)$, $x \in X$.

Напівмарковський процес перемикань $x(t)$, $t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається напівмарковським ядром [5]

$$Q(x, B, t) = P(x, B) G_x(t), \qquad x \in X, \quad B \in X, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Тут стохастичне ядро $P(x, B)$ задає перехідні ймовірності *вкладеного ланцюга Маркова* x_n, $n \geq 0$,

$$P(x, B) = \mathcal{P}\{x_{n+1} \in B \mid x_n = x\},$$

а функції розподілу $G_x(t)$, $x \in X$, $t \geq 0$, задають моменти марковського відновлення $\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}$, $n \geq 0$, $\tau_0 = 0$,

$$G_x(t) = \mathcal{P}\{\theta_{n+1} \leq t \mid x_n = x\}, \qquad x \in X, \quad t \geq 0.$$

При відповідних умовах на нормуючу послідовність a_n^{ε}, $n \geq 0$, та при рівномірній ергодичності напівмарковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, з стаціонарним розподілом

$\pi(B)$, $B \in X$, ДПСА, що визначається розв'язком еволюційного рівняння (1), збігається з імовірністю одиниця до точки рівноваги u_0 усередненої системи [6]

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), \quad C(u_0) = 0, \tag{3}$$

з функцією регресії

$$C(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x).$$

Поряд з ДПСА (1) будемо розглядати *стрибкову стохастичну процедуру* (ССП)

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \quad t > 0, \tag{4}$$

де $\nu(t) := \max\{n\colon \tau_n \leq t\}$ — лічильний процес моментів стрибків τ_n, $n \geq 1$.

Вкладеність ДПСА (1) в ССП (4) визначається формулами

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \qquad a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \qquad \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^2 \tau_n. \tag{5}$$

***Зауваження* 1.** Збіжність ПСА

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow 0, \quad t \to \infty, \tag{6}$$

означає, що флуктуації доцільно вивчати з нормуванням (див. [1])

$$v^\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{t} u^\varepsilon(t)}{\varepsilon}. \tag{7}$$

З (5) та (7) для ДПСА (1) маємо нормовану ДПСА

$$v_n^\varepsilon = \frac{\sqrt{\tau_n^\varepsilon} u_n^\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{8}$$

або у вигляді оберненого зв'язку

$$u_n^\varepsilon = \frac{\varepsilon v_n^\varepsilon}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}. \tag{9}$$

Далі, не зменшуючи загальності, вважаємо $u_0 = 0$, тобто має місце умова

У$_2$) $C(0) = 0$.

При цьому будемо розглядати стандартну ПСА з нормуючою функцією

У$_3$) $a(t) = a/t$, $t > 0$.

Додаткові умови на функцію регресії такі самі, як і в роботі [1], а саме:

У$_4$) $C(u, \cdot) \in C^3(R)$,

тобто друга похідна по u $C_u''(u, \cdot)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця

$$\left| C_u''(u, x) - C_u''(u', x) \right| \leq C|u - u'|$$

з константою C, що не залежить від $x \in X$.

Відомо [7], що рівномірна ергодичність напівмарковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, з напівмарковським ядром (2) визначає генератор Q:

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x, dy)\big[\varphi(y) - \varphi(x)\big],$$

де $q(x) := 1/g(x)$, $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \bar{G}_x(t)dt$, $\bar{G}_x(t) := 1 - G_x(t)$, супроводжуючого рівномірно ергодичного марковського процесу $x^0(t)$, $t \geq 0$. При цьому генератор Q є зведено-оборотним [7], для якого існує потенціал R_0, що визначається рівняннями [8]

$$R_0 Q = Q R_0 = \mathrm{I} - \Pi.$$

Тут проектор Π в банаховому просторі $\mathcal{B}(X)$ дійснозначних функцій з супремум-нормою задається співвідношенням

$$\Pi\varphi(x) := \widehat{\varphi}\mathbf{1}\,(x), \qquad \widehat{\varphi} := \int\limits_X \pi(dx)\varphi(x), \quad \mathbf{1}(x) \equiv 1, \quad x \in X.$$

Враховуючи умову $У_4$, будемо використовувати формулу Тейлора для функції регресії

$$C(u, x) = C_0(x) + uC_1(x) + \frac{u^2}{2}C_2(u, x). \tag{10}$$

Тут, за означенням,

$$C_0(x) := C(0, x), \quad C_1(x) := C'_u(u, x)\big|_{u=0}, \quad C_2(u, x) := C''_u(\theta u, x), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{11}$$

Введемо також необхідні позначення

$$c := -\int\limits_X \pi(dx)q(x)C_1(x), \quad b := ac - \frac{1}{2}.$$

Нехай виконуються умови збіжності ПСА (1) в напівмарковському середовищі [6]:

існує функція Ляпунова $V(u)$, $u \in R$, що забезпечує експоненціальну стійкість системи (3):

C_1) $C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u)$, $c_0 > 0$;

а також для функції $\tilde{C}(u, x) := C(u) - C(u, x)$ мають місце додаткові умови (див. [6])

C_2) $\big|\tilde{C}(u, x)V'(u)\big| \leq c_1 V(u),\ c_1 > 0,$
$\big|C(u, x)[\tilde{C}(u, x)V'(u)]'\big| \leq c_2 V(u),\ c_2 > 0,$
$\big|C(u, x)[C(u, x)[\tilde{C}(u, x)V'(u)]']'\big| \leq c_3 V(u),\ c_3 > 0.$

Крім того, функції розподілу $G_x(t)$, $x \in X$, $t \geq 0$, задовольняють умову Крамера рівномірно по $x \in X$:

C_3) $\sup\limits_{x \in X} \displaystyle\int_0^\infty e^{ht}\bar{G}_x(t)dt \leq H < +\infty,\ h > 0.$

2. Теорема (асимптотична нормальність). В умовах $C_1 - C_3$ збіжності (6) ПСА (1) в напівмарковському середовищі та при додаткових умовах

Д$_1$) $\rho := -2\int_X \pi(dx)\left[\tilde{C}_0(x)R_0\tilde{C}_0(x) + \frac{1}{2}q(x)C_0^2(x)\right] > 0$, де $\tilde{C}_0(x) :=$ $:= q(x)C_0(x)$,

Д$_2$) $b := ac - \frac{1}{2} > 0$,

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \to 0, \tag{12}$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 \le t \le T$. Граничний процес $\zeta(t)$, $t \ge 0$, є дифузійним процесом типу Орнштейна – Уленбека [9], що визначається генератором

$$\boldsymbol{L}\varphi(v) = -bv\varphi'(v) + \frac{a^2}{2}\rho\varphi''(v). \tag{13}$$

***Зауваження* 2.** Умова Д$_1$ забезпечує дифузійність граничного процесу $\zeta(t)$, $t \ge 0$, а умова Д$_2$ означає ергодичність процесу $\zeta(t)$, $t \ge 0$, зі стаціонарним нормальним розподілом $N(0, \sigma_0^2)$, $\sigma_0^2 = \rho/2b$ [9].

З слабкої збіжності (12) випливає такий висновок.

***Висновок* 1.** В умовах теореми нормована ПСА $v^\varepsilon(t)$ має асимптотично нормальний розподіл $N(0, \sigma_0^2)$, тобто

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \nu, \qquad \varepsilon \to 0, \quad t \to \infty.$$

Випадкова величина $\nu \in N(0, \sigma_0^2)$.

3. Властивості нормованої ДПСА (8). Розглянемо формулу Тейлора

$$\sqrt{t + \varepsilon^2 s} = \sqrt{t}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 s}{2t} + \varepsilon^2 h^\varepsilon(s)\right), \tag{14}$$

де $h^\varepsilon(s) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, рівномірно в кожному скінченному інтервалі $s \in [0, S_0]$, $S_0 < \infty$.

Отже, приріст функції $\sqrt{t}$ при зміні аргумента на величину $\varepsilon^2 s$ має вигляд

$$\sqrt{t + \varepsilon^2 s} - \sqrt{t} = \frac{\varepsilon^2 s}{2\sqrt{t}} + \varepsilon^2 h^\varepsilon(s)\sqrt{t}. \tag{15}$$

Лема 1. *Нормована ДПСА* (8) *задовольняє співвідношення*

$$v_{n+1}^\varepsilon = v_n^\varepsilon + \varepsilon\frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}C\left(\frac{\varepsilon v_n^\varepsilon}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}, x_n^\varepsilon\right) + \varepsilon^2\frac{\theta_n^\varepsilon}{2\tau_n^\varepsilon}v_n^\varepsilon + \varepsilon^2 H^\varepsilon(\theta_{n+1}), \tag{16}$$

де залишковий член $H^\varepsilon(\theta_{n+1})$ такий, що $EH^\varepsilon(\theta_{n+1}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Для приросту $\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon$ нормованої ДПСА (8) маємо зображення

$$\Delta v_n^\varepsilon = \frac{\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}u_{n+1}^\varepsilon - \sqrt{\tau_n^\varepsilon}u_n^\varepsilon}{\varepsilon},$$

або

$$\Delta v_n^\varepsilon = \frac{\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}\Delta u_n^\varepsilon + \left(\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon} - \sqrt{\tau_n^\varepsilon}\right)u_n^\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{17}$$

Згідно з (1) та (5) приріст Δu_n^ε обчислюється за формулою

$$\Delta u_n^\varepsilon = \varepsilon^2 a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon).$$

Враховуючи (9) та (5), одержуємо зображення

$$\Delta u_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{a}{\tau_n^\varepsilon} C\left(\frac{\varepsilon v_n^\varepsilon}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}, x_n^\varepsilon\right). \tag{18}$$

Підставляючи (18) в (17) та враховуючи (14) та (15), маємо

$$\Delta v_n^\varepsilon = \frac{\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}\varepsilon^2 a C\left(\varepsilon v_n^\varepsilon/\sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon\right)/\tau_n^\varepsilon}{\varepsilon} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2\left(\theta_{n+1}/(2\sqrt{\tau_n^\varepsilon}) + \sqrt{\tau_n^\varepsilon}h^\varepsilon(\theta_{n+1})\right)\varepsilon v_n^\varepsilon/(2\sqrt{\tau_n^\varepsilon})}{\varepsilon} =$$
$$= \varepsilon \frac{a\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}}{\tau_n^\varepsilon} C\left(\frac{\varepsilon v_n^\varepsilon}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}, x_n^\varepsilon\right) + \varepsilon^2 \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon + \varepsilon^2 h_1^\varepsilon(\theta_{n+1}) =$$
$$= \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C\left(\frac{\varepsilon v_n^\varepsilon}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}, x_n^\varepsilon\right) + \varepsilon^2 \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon + \varepsilon^2 H^\varepsilon(\theta_{n+1}),$$

де $h_1^\varepsilon(\theta_{n+1})$ має ті ж властивості, що й $h^\varepsilon(\theta_{n+1})$ з (14).

З останніх міркувань отримуємо твердження леми 1.

***Висновок* 2.** Головний член приросту нормованої ДПСА (8) має вигляд

$$\Delta v_n^\varepsilon = \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C\left(\frac{\varepsilon v_n^\varepsilon}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}}, x_n^\varepsilon\right) + \varepsilon^2 \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon. \tag{19}$$

Використовуючи (10), маємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *В позначеннях* (11) *приріст* (19) *має вигляд*

$$\Delta v_n^\varepsilon = \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C_0(x) + \varepsilon^2 \left[\frac{a v_n^\varepsilon}{\tau_n^\varepsilon} C_1(x) + \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon\right] + \varepsilon^2 h^\varepsilon(v,x), \tag{20}$$

де $h^\varepsilon(v,x)$ *— знехтуючий член, такий, що* $\left|h^\varepsilon(v,x)\right| \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $t \geq t_0 > 0$.

4. Компенсуючий оператор. Як і в роботі [1], будемо використовувати компенсуючий оператор (КО) [11] розширеного *процесу марковського відновлення*

$$v_n^\varepsilon = v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \qquad x_n^\varepsilon := x\left(\frac{\tau_n^\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) = x(\tau_n), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \tau_n, \quad n \geq 0, \tag{21}$$

який задається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v,x,t) =$$
$$= \varepsilon^{-2} q(x) \left[\mathrm{E} \left[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) \middle| v_n^\varepsilon = v, \quad x_n^\varepsilon = x, \quad \tau_n^\varepsilon = t \right] - \varphi(v,x,t) \right]. \quad (22)$$

Розглянемо напівгрупу

$$\Gamma_s \varphi(v) = \varphi\left(v + \frac{v}{2t} s\right), \quad s \geq 0, \quad (23)$$

з породжуючим оператором $\Gamma\varphi(v) = \dfrac{v}{2t}\varphi'(v)$, а також стрибковий оператор

$$\boldsymbol{D}^\varepsilon \varphi(v) = \varphi\left(v + \varepsilon \frac{a}{\sqrt{t}} C \frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0. \quad (24)$$

Лема 2. *Компенсуючий оператор* (22) *має аналітичне зображення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v,x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-2} q(x) \int\limits_0^\infty G_x(ds) \left[\Gamma_{\varepsilon^2 s} \boldsymbol{D}^\varepsilon - \mathrm{I}\right] \boldsymbol{P}\varphi(v,x), \quad (25)$$

де

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) := \int\limits_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Доведення базується на обчисленні умовного математичного сподівання в (22) з урахуванням співвідношення (див. (21))

$$v_{n+1}^\varepsilon = v_n^\varepsilon + v^\varepsilon(\varepsilon^2 \theta_{n+1}).$$

Зображення (22) в операторній формі має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v,x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-2} q(x) \left[\int\limits_0^\infty G_x(ds) \boldsymbol{P}\varphi(v + \Delta v^\varepsilon, x) - \varphi(v,x) \right], \quad (26)$$

де приріст Δv^ε складається з стрибкової складової, що визначається оператором (24), та неперервної складової, що визначається напівгрупою (23). Їх сума дає головний приріст (19) нормованої ДПСА.

Для вивчення асимптотики КО розглянемо асимптотику приросту еволюції $\varphi(v,x)$. Вводячи позначення $s = \theta_{n+1}^\varepsilon$, $x = x_n^\varepsilon$, $t = \tau_n^\varepsilon$, $v = v_n^\varepsilon$ та враховуючи (20), отримуємо

$$\Delta\varphi(v,x) := \varphi(v + \Delta v^\varepsilon, x) - \varphi(v,x) =$$
$$= \varphi\left(v + \varepsilon \frac{a}{\sqrt{t}} C_0(x) + \varepsilon^2 \frac{v}{t}\left[aC_1(x) + \frac{s}{2}\right] + \varepsilon^2 h^\varepsilon(v,s), x\right) - \varphi(v,x).$$

Отже, при відповідній гладкості $\varphi(v,\cdot) \in C^3(R)$ остаточно маємо

$$\Delta\varphi(v,x) =$$
$$= \left[\varepsilon \frac{a}{\sqrt{t}} C_0(x) + \varepsilon^2 \frac{v}{t} b(x,s)\right] \varphi'(v,x) + \varepsilon^2 \frac{a^2}{2t} C_0^2(x) \varphi''(v,x) + \varepsilon^2 h^\varepsilon(v,x),$$

де

$$b(x, s) = aC_1(x) + \frac{s}{2},$$

а $h^\varepsilon(v, x)$ такий, що $|h^\varepsilon(v, x)| \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $t \geq t_0 > 0$.

Враховуючи останнє, з (26) отримуємо (25).

Лема 3. *Компенсуючий оператор* (25) *на тест-функціях* $\varphi(v, x) \in C^3(R)$, $x \in X$, *допускає асимптотичне зображення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} Q\varphi(v, x) + \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(v, x) +$$

$$+ \frac{1}{t} Q_2(x)\boldsymbol{P}\varphi(v, x) + \theta^\varepsilon(x)\varphi(v, x), \tag{27}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v) = aq(x)C_0(x)\varphi'(v),$$

$$Q_2(x)\varphi(v) = vb(x)q(x)\varphi'(v) + \frac{a^2}{2} q(x)C_0^2(x)\varphi''(v),$$

$$b(x) = aC_1(x) + \frac{1}{2},$$

а залишковий член $\theta^\varepsilon(x)\varphi(v, x)$ *такий, що*

$$\left\| \theta^\varepsilon(x)\varphi(v, x) \right\| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(v, \cdot) \in C^3(R).$$

Доведення. Розглянемо другий доданок у (25), позначаючи

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon \varphi(v, x) = \varepsilon^{-2} q(x) \int_0^\infty G_x(ds) \left[\Gamma_{\varepsilon^2 s} \boldsymbol{D}^\varepsilon - \mathrm{I} \right] \boldsymbol{P}\varphi(v, x) =$$

$$= \left[\boldsymbol{L}_\Gamma^\varepsilon + \boldsymbol{L}_D^\varepsilon + \boldsymbol{L}_{\Gamma D}^\varepsilon \right] \varphi(v, x),$$

де

$$\boldsymbol{L}_\Gamma^\varepsilon \varphi(v, x) := \varepsilon^{-2} q(x) \int_0^\infty G_x(ds) \left[\Gamma_{\varepsilon^2 s} - \mathrm{I} \right] \boldsymbol{P}\varphi(v, x),$$

$$\boldsymbol{L}_D^\varepsilon \varphi(v, x) := \varepsilon^{-2} q(x) \int_0^\infty G_x(ds) \left[\boldsymbol{D}^\varepsilon - \mathrm{I} \right] \boldsymbol{P}\varphi(v, x),$$

$$\boldsymbol{L}_{\Gamma D}^\varepsilon \varphi(v, x) := \varepsilon^{-2} q(x) \int_0^\infty G_x(ds) \left[\Gamma_{\varepsilon^2 s} - \mathrm{I} \right] \left[\boldsymbol{D}^\varepsilon - \mathrm{I} \right] \boldsymbol{P}\varphi(v, x).$$

Розглянемо властивості кожного з уведених операторів.

Враховуючи рівняння для напівгрупи

$$\Gamma_{\varepsilon^2 s} - \mathrm{I} = \Gamma \int\limits_0^{\varepsilon^2 s} \Gamma_t dt$$

та інтегруючи частинами, отримуємо

$$\boldsymbol{L}_\Gamma^\varepsilon \varphi(v,x) = \big[\Gamma \boldsymbol{P} + \theta_\Gamma^\varepsilon(x)\big]\varphi(v,x). \tag{28}$$

На підставі розкладу за формулою Тейлора в (24) маємо

$$\boldsymbol{L}_D^\varepsilon \varphi(v,x) = \big[\varepsilon^{-1} D_1(x)\boldsymbol{P} + D_2(x)\boldsymbol{P}\big]\varphi(v,x) + \theta_D^\varepsilon(x)\varphi(v,x), \tag{29}$$

де

$$D_1(x)\varphi(v) = \frac{a}{\sqrt{t}} C_0(x)\varphi'(v),$$

$$D_2(x)\varphi(v) = \frac{a}{t}\left[vC_1(x)\varphi'(v) + \frac{a}{2}C_0^2(x)\varphi''(v)\right].$$

Неважко переконатись, що

$$\boldsymbol{L}_{\Gamma D}^\varepsilon \varphi(v,x) = \theta_{\Gamma D}^\varepsilon(x)\varphi(v,x). \tag{30}$$

Тут скрізь оператори $\theta_\bullet^\varepsilon(x)$ є знехтуючими на класі тест-функцій $\varphi(v,\cdot) \in C^k(R)$, $k \geq 3$.

Підсумовуючи результати асимптотичних розкладів (28) – (30), отримуємо твердження леми 3.

5. Доведення теореми про асимптотичну нормальність нормованої ПСА (8) полягає у застосуванні розв'язку проблеми сингулярного збурення до урізаного компенсуючого оператора

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon \varphi(v,x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}} Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,x) + \frac{1}{t}Q_2(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,x)$$

із зображенням (27).

Використовуючи збурену тест-функцію

$$\varphi^\varepsilon(v,x,t) = \varphi(v) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,x)$$

та застосовуючи формулу (3.24) леми 3.3 з монографії [8], отримуємо

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,x,t) = \left[\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}} Q_1(x)\boldsymbol{P} + \frac{1}{t}Q_2(x)\boldsymbol{P}\right] \times$$

$$\times \left[\varphi(v) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,x)\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\Big[Q\varphi_2(v,x) + \big(Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0Q_1(x) + Q_2(x)\big)\varphi(v)\Big] + \theta_L^\varepsilon(x,t)\varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v) + \theta_L^\varepsilon(x,t)\varphi(x),$$

де оператор $\boldsymbol{L}$ такий, що

$$\boldsymbol{L}\Pi = \Pi Q_1(x)\,\boldsymbol{P}R_0 Q_1(x)\Pi + \Pi Q_2(x)\Pi. \tag{31}$$

Обчислення за формулою (31) дають генератор (13) граничного дифузійного процесу.

Завершення доведення теореми реалізується за схемою доведення теореми 6.6 [12, с. 202], а також із використанням леми 6.6 та зауваження у § 6.5 вказаної праці.

***Висновок* 3.** Аналогічний результат асимптотичної нормальності для стрибкової ПСА в евклідовому просторі R^d, $d > 1$, можна отримати з додатковими технічними ускладненнями.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В. С. Королюку за увагу до статті.

1. *Чабанюк Я. М.* Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі // Допов. НАН України. Сер. А. – 2004. – № 5. – С. 37 – 45.
2. *Королюк В. С.* Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 36 – 47.
3. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
4. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic approximation and optimization of random systems. – Basel etc.: Birkhauser, 1992. – 113 p.
5. *Korolyuk V., Swishcuk A.* Evolution of systems in random media. – New York etc.: CRC Press, Boca Raton, 1995. – 352 p.
6. *Чабанюк Я. М.* Неперервна процедура стохастичної апроксимації у напівмарковському середовищі // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 713 – 720.
7. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
8. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Kluwer Acad. Publ., 1999. – 185 p.
9. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 431 с.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1984.
11. *Вентцель Е. С.* Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. – М.: Наука, 1986. – 176 с.
12. *Korolyuk V., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci. Publ., 2005. – 330 p.

Одержано 14.04.2006