УДК 517.9

В. М. Горбачук (Нац. тех. ун-т України „КПІ”, Київ),
М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО КОРЕКТНУ РОЗВ’ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ*

For the equation of the form $y''(t) = By(t)$, where B is a weakly positive operator in a Banach space $\mathfrak{B}$, we investigate the structure of solutions inside the interval $(0, \infty)$ and establish the existence of their boundary values for $t \to 0$ in a wider locally convex space containing $\mathfrak{B}$ as a dense set. We prove the analyticity of such solutions on $(0, \infty)$ and study their behavior at infinity. We also give the conditions under which the Dirichlet problem for considered equation is correctly solvable and justify the possibility to use power series for finding approximate solutions of this problem.

Досліджено структуру розв’язків всередині інтервалу $(0, \infty)$ рівняння вигляду $y''(t) = By(t)$, де B — слабко позитивний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, встановлено існування їхніх граничних значень при $t \to 0$ у більш широкому локально-опуклому просторі, що містить $\mathfrak{B}$ як щільну множину, доведено аналітичність таких розв’язків на $(0, \infty)$, вивчено їх поведінку на нескінченності, наведено умови коректної розв’язності задачі Діріхле для цього рівняння і обгрунтовано можливість застосування степеневих рядів до знаходження її наближених розв’язків.

Нехай $\mathfrak{B}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, $E(\mathfrak{B})$ — множина всіх щільно визначених у $\mathfrak{B}$ замкнених лінійних операторів, $L(\mathfrak{B})$ — алгебра обмежених лінійних операторів у $\mathfrak{B}, I$ — одиничний оператор, $\mathcal{D}(\cdot)$ і $\mathcal{R}(\cdot)$ — області визначення та значень оператора, $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$ і $\sigma_p(\cdot)$ — його резольвентна множина, спектр, неперервний та точковий спектри відповідно.

1. Простори гладких векторів замкненого оператора. Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Для числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \exists \alpha > 0 \quad \exists c = c(x) > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \quad \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists c = c(x, \alpha) > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \\ \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\},$$

де

$$C^{\infty}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n)$$

— простір нескінченно диференційовних векторів оператора A.

Очевидно, що $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ — лінійні простори, для довільних $\lambda \neq 0$, $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I),$$

і якщо $\beta_1 < \beta_2$, то

$$\mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (Програма спільних українських і білоруських проектів, проект 10.01//004).

У просторах $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ введемо топологію індуктивної і, відповідно, проективної границі (див. [1]) банахових просторів

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \left\{x \in C^{\infty}(A) \middle| \exists c = c(x) > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \quad \|A^k x\| \le c\alpha^k k^{k\beta}\right\}, \quad \alpha > 0,$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

Отже,

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A),$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A).$$

Нагадаємо, що збіжність у $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A))$ означає збіжність у $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ при деякому $\alpha > 0$ (при всіх $\alpha \in (0, \delta)$ з достатньо малим δ). Якщо оператор A обмежений, то для довільного $\beta > 0$

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{B}.$$

У конкретному випадку, коли

$$\mathfrak{B} = C([a,b]), \quad -\infty < a < b < \infty,$$

$$Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \mathcal{D}(A) = C^1([a,b]),$$

$C^{\infty}(A)$ є не що інше, як множина нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій, $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ — множини всіх аналітичних на $[a,b]$, цілих і цілих експоненціального типу функцій відповідно. Простори $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta > 1$ відомі як класи Жеврє типу Рум'є і Бьорлінга. За аналогією і в абстрактній ситуації $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються просторами аналітичних [2], цілих [3] і цілих експоненціального типу [4] векторів оператора A відповідно.

У наведеному вище прикладі всі розглянуті простори є щільними в $C([a,b])$. Це, взагалі кажучи, не так у загальному випадку. Тому постає питання: за яких умов на оператор A і число β $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ або, принаймні, $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$? Ця задача у різних конкретних ситуаціях цікавила багатьох математиків (див. огляд [5]).

Відмітимо також, що в нерівності в означенні просторів $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ $k^{k\beta}$ можна замінити на $k!^{\beta}$.

2. Декілька тверджень з теорії півгруп. Наведемо необхідні для подальшого факти з теорії однопараметричних півгруп операторів (див. [6, 7]).

Сім'я $(T(t))_{t\ge 0}$ лінійних неперервних операторів в $\mathfrak{B}$ утворює C_0-півгрупу, якщо: a) $T(0) = I$; b) $\forall t_1, t_2 \ge 0$: $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$; c) $\|T(t)x - x\| \to 0$ при $t \to 0$. Генератор C_0-півгрупи $(T(t))_{t\ge 0}$ визначається як

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

де $\mathcal{D}(A)$ — сукупність векторів $x \in \mathfrak{B}$, для яких ця границя існує. Генератор A завжди належить до $E(\mathfrak{B})$. C_0-півгрупу $(T(t))_{t\geq 0}$ з генератором A позначатимемо через $(e^{tA})_{t\geq 0}$.

Півгрупа $(e^{tA})_{t\geq 0}$ називається рівномірно обмеженою, якщо існує стала $M \geq 1$ така, що

$$\forall t \geq 0: \quad \|e^{tA}\| \leq M.$$

Під типом C_0-півгрупи $(e^{tA})_{t\geq 0}$ розуміємо число

$$\omega = \omega(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\|e^{tA}\|}{t}.$$

Спектр $\sigma(A)$ генератора A лежить у півплощині $\Re\lambda \leq \omega$.

C_0-півгрупа $(e^{tA})_{t\geq 0}$ називається обмеженою аналітичною з кутом $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, якщо e^{tA} допускає продовження до оператор-функції e^{zA}, аналітичної в секторі $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| < \theta\}$ і сильно неперервної в нулі на будь-якому промені цього сектора, і для довільного $\theta' < \theta$ існує стала $c_{\theta'} > 0$ така, що

$$\|e^{zA}\| \leq c_{\theta'} \quad \text{при} \quad z \in \overline{\Sigma_{\theta'}} = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| \leq \theta'\}.$$

Оператор $A \in E(\mathfrak{B})$ є генератором обмеженої аналітичної півгрупи $(e^{tA})_{t\geq 0}$ з кутом θ тоді і тільки тоді, коли $\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A)$ і для довільного $\theta' \in (0, \theta)$

$$\exists M_{\theta'} > 0 \quad \forall z \in \Sigma_{\theta'+\pi/2}: \quad \big\|R_A(z)\big\| \leq \frac{M_{\theta'}}{|z|},$$

де $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$ — резольвента оператора A.

Твердження 1 (див. [7, с. 233]). *C_0-півгрупа $(e^{tA})_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною тоді і тільки тоді, коли вона диференційовна на $(0, \infty)$ і існує стала $c > 0$ така, що*

$$\forall t > 0: \quad \|A^n e^{tA}\| \leq c^n n^n t^{-n}.$$

Зауважимо, що якщо C_0-півгрупа $(e^{tA})_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то $\overline{\mathcal{R}(e^{tA})} = \mathfrak{B}$ для кожного $t \geq 0$ і оператор e^{tA} має обернений, який позначатимемо через e^{-tA}. На множині $\mathfrak{B}_t(A) = \mathcal{R}(e^{tA})$ введемо норму

$$\|x\|_t = \|e^{-tA}x\|, \quad x \in \mathfrak{B}_t(A).$$

Оскільки e^{-tA} належить $E(\mathfrak{B})$, то лінійна множина $\mathfrak{B}_t(A)$ утворює банахів простір відносно норми $\|x\|_t$, причому при $t > t' \geq 0$ має місце щільне і неперервне вкладення $\mathfrak{B}_t(A) \subseteq \mathfrak{B}_{t'}(A)$. Покладемо

$$\mathfrak{B}_{\{+\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{t\to 0} \mathfrak{B}_t(A), \qquad \mathfrak{B}_{(+)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t\to\infty} \mathfrak{B}_t(A).$$

Як показано у [8, с. 280 – 283], справджується таке твердження.

Твердження 2. *Якщо оператор $A \in E(\mathfrak{B})$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу, то*

$$\mathfrak{B}_{\{+\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{1\}}(A), \qquad \mathfrak{B}_{(+)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

тобто простір аналітичних (цілих) векторів оператора A збігається з $\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$ $(\mathfrak{B}_{(+)}(A))$, причому цей збіг є не лише теоретико-множинним, але й топологічним.

Що ж до щільності $\mathfrak{B}_{(+)}(A)$ або, принаймні, $\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$ в $\mathfrak{B}$, то для довільної C_0-півгрупи вона, взагалі кажучи, не має місця. Але для обмежених аналітичних C_0-півгруп, як показано в [9], має місце наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай $(e^{tA})_{t\geq 0}$ — обмежена аналітична C_0-півгрупа з кутом θ. Тоді*

$$\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}, \quad \textit{якщо} \quad \beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi}.$$

При $\beta = 1 - \dfrac{2\theta}{\pi}$ можливі випадки, коли $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{0\}$.

3. Експонента від оператора. Припустимо, що множина цілих векторів оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ є щільною в $\mathfrak{B}$: $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)} = \mathfrak{B}$. Простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є зліченно-нормованим [10] і, внаслідок замкненості A, повним. Збіжність $x_m \to x$, $m \to \infty$, в цьому просторі означає, що

$$\forall \alpha > 0\colon \quad \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \lim_{m\to\infty} \frac{\|A^n(x_m - x)\|}{\alpha^n n^n} = 0.$$

Теорема 1. *Оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k$$

є цілою в просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Сім'я $(\exp(zA))_{z\in\mathbb{C}}$ утворює групу лінійних неперервних операторів у $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Якщо $(e^{tA})_{t\geq 0}$ — C_0-півгрупа з генератором A, то

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)\colon \quad \exp(tA)x = e^{tA}x, \quad t \geq 0.$$

У випадку, коли ця півгрупа є обмеженою аналітичною, остання рівність виконується для всіх $t \in \mathbb{R}^1$.

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists c = c(x, \alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\colon \quad \|A^n x\| \leq c\alpha^n n^n.$$

Тому

$$\left\| A^n \left(\exp(zA)x - \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} A^k x \right) \right\| = \left\| A^n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \|A^{n+k}x\| \leq c \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \alpha^{n+k}(n+k)^{n+k} =$$

$$= c\alpha^n n^n \sum_{k=m+1}^{\infty} k^k \frac{|\alpha z|^k}{k!} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n}{k}\right)^k.$$

Враховуючи, що

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < e^k,$$

одержуємо

$$\left\|A^n\left(\exp(zA)x-\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}A^kx\right)\right\|\le c(\alpha e)^n n^n\sum_{k=m+1}^{\infty}(\alpha e^2|z|)^k.$$

З цієї нерівності випливає, що, яким би великим не було $\delta>0$, при $|z|\le\delta$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}A^kx$, $x\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, збігається у просторі $\mathfrak{G}_{\alpha}^{1}(A)$ з довільним $\alpha<\dfrac{1}{e^2\delta}$, а отже, і в просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Таким чином, $\exp(zA)$ відображає $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. А оскільки $(\exp(zA)x)'=A\exp(zA)x$, то для будь-яких $n\in\mathbb{N}_0$, $z_0\in\mathbb{C}$

$$\|A^n[(\exp(zA)x)'-(\exp(z_0A)x)']\|=\|A^{n+1}[\exp(zA)x-\exp(z_0A)x]\|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z^k-z_0^k|}{k!}\|A^{n+k+1}x\|\le c|z-z_0|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}\alpha^{n+k+1}\mu^k(n+k+1)^{n+k+1}=$$

$$=c|z-z_0|\alpha^n n^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^{k+1}\alpha^{k+1}\mu^k}{(k-1)!}\left(1+\frac{n}{k+1}\right)^{k+1}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n\le$$

$$\le c|z-z_0|(\alpha en)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k-1)!}e^{k+1}\alpha^{k+1}\mu^k\le$$

$$\le c_1|z-z_0|(\alpha en)^n\sum_{k=1}^{\infty}(e^{1+\varepsilon}\mu\alpha)^{k+1}=c_\alpha|z-z_0|(\alpha en)^n,$$

де $\varepsilon>1$, $0<c_1=\mathrm{const}$,

$$\mu=1+\max\{|z|,|z_0|\},\qquad c_\alpha=c_1\sum_{k=1}^{\infty}(e^{1+\varepsilon}\mu\alpha)^{k+1}.$$

Підбираючи достатньо мале α, можна добитись, що $c_\alpha<\infty$, і тоді нерівність

$$\|A^n[(\exp(zA)x)'-(\exp(z_0A)x)']\|\le c_\alpha|z-z_0|(\alpha en)^n$$

дає змогу зробити висновок, що вектор-функція $\exp(zA)x$ є цілою в просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Припустимо тепер, що A — генератор C_0-півгрупи $(e^{tA})_{t\ge0}$ у просторі $\mathfrak{B}$. Тоді (див. [7, с. 253]) задача Коші

$$\begin{cases}y'(t)=Ay(t), & t\in(0,\infty),\\ y(0)=x, & x\in\mathcal{D}(A),\end{cases}$$

однозначно розв'язна, і її розв'язок має вигляд $e^{tA}x$. Оскільки при $x\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ вектор-функція $\exp(tA)x$ є розв'язком цієї задачі, то $\exp(tA)x=e^{tA}x$ при $t>0$. Для $t\in\mathbb{R}^1$ рівність зумовлюється груповою властивістю $\exp(tA)$ на $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Теорему доведено.

У просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ введемо цілі операторні функції

$$\cosh(zA)=\frac{1}{2}[\exp(zA)+\exp(-zA)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}A^{2k},$$

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \int_0^z \cosh(zA)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k}.$$

Якщо $0 \in \rho(A)$, то

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \frac{1}{2} A^{-1} [\exp(zA) - \exp(-zA)]. \tag{1}$$

При $x_1, x_2 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ задача Коші

$$y''(t) = A^2 y(t), \quad t \in (0, \infty),$$

$$y(0) = x_1, \quad y'(0) = x_2,$$

однозначно розв'язна у класі цілих вектор-функцій у $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, і її розв'язок записується як

$$y(t) = \cosh(tA) x_1 + \frac{\sinh(tA)}{A} x_2.$$

Неважко також переконатися, що

$$\int_0^z \exp((z - 2s)A)\,ds = \frac{\sinh(zA)}{A}. \tag{2}$$

4. Опис розв'язків всередині інтервалу для диференціально-операторного рівняння першого порядку. В цьому пункті вважатимемо A генератором C_0-півгрупи $(e^{tA})_{t \geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ з властивістю $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$.

Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ поповнення $\mathfrak{B}$ по нормі

$$\|x\|_{-t} = \|e^{tA} x\|, \quad t > 0.$$

Ці норми узгоджені і порівняльні (див. [10]). При $t < t'$ маємо щільне і неперервне вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A) \subset \mathfrak{B}_{-t'}(A)$. Покладемо

$$\mathfrak{B}_{-}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t \to 0} \mathfrak{B}_{-t}(A).$$

Лінійна множина $\mathfrak{B}_{-}(A)$ — повний зліченно-нормований простір. Неважко переконатись, що оператор e^{-tA} допускає неперервне розширення $S(t)$ з $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, причому при $t < t'$ $S(t') \restriction_{\mathfrak{B}_{-t}(A)} = S(t)$.

Визначимо на $\mathfrak{B}_{-}(A)$ оператори $\hat{e}^{tA}$, $t \geq 0$, як $\hat{e}^{tA} x = S(t) x$. В [11] доведено, що сім'я $(\hat{e}^{tA})_{t \geq 0}$ утворює C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}_{-}(A)$ з властивостями:

1) $\hat{e}^{tA} \mathfrak{B}_{-}(A) \subseteq \mathfrak{B}$;

2) $\hat{e}^{tA} x = e^{tA} x$ для $x \in \mathfrak{B}$;

3) $\forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A)\ \forall t, s > 0$: $\hat{e}^{(t+s)A} x = e^{tA} \hat{e}^{sA} x = e^{sA} \hat{e}^{tA} x$.

Вектор-функцію $y(t) \colon (0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ називають розв'язком рівняння

$$y'(t) = A y(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{3}$$

на $(0, \infty)$, якщо вона сильно неперервно диференційовна на $(0, \infty)$ і там задовольняє це рівняння. Зауважимо, що жодних умов на поведінку $y(t)$ в нулі не накладається. Взагалі кажучи, в точці нуль $y(t)$ може бути невизначеним. Як показано в [11, с. 294], має місце таке твердження.

Твердження 4. *Якщо оператор A генерує C_0-півгрупу $(e^{tA})_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ таку, що $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$, то вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (3) *тоді і тільки тоді, коли вона може бути зображена у вигляді*

$$y(t) = \hat{e}^{tA} y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{B}_-(A).$$

Твердження 5 (див. [8, с. 294]). *Нехай оператор $-A$ є генератором обмеженої аналітичної C_0-півгрупи. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (3) *тоді і тільки тоді, коли*

$$y(t) = \exp(tA) y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Із тверджень 4, 5 і властивості 1 півгрупи $\widehat{e}^{tA}$ випливає, що якщо оператор A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу, то кожний розв'язок рівняння (3) є аналітичною вектор-функцією на $(0, \infty)$ в $\mathfrak{B}$ і має граничне значення при $t \to 0$ у просторі $\mathfrak{B}_-(A)$. Якщо ж оператор $-A$ є генератором обмеженої аналітичної C_0-півгрупи, то будь-який розв'язок цього рівняння допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

5. Опис розв'язків всередині інтервалу для диференціально-операторного рівняння другого порядку. Розглянемо рівняння вигляду

$$y''(t) = By(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{4}$$

де B — слабко позитивний оператор у просторі $\mathfrak{B}$. Останнє означає (див. [12, 13]), що $B \in E(\mathfrak{B})$, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ та існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda > 0\colon \quad \|R_B(-\lambda)\| \leq \frac{M}{\lambda}. \tag{5}$$

Якщо додатково $0 \in \rho(B)$, то оператор B називається позитивним.

Згідно з [12] оператор $B \in E(\mathfrak{B})$ має тип $(\omega, M(\theta))$, якщо $\rho(-B)$ містить сектор $\Sigma_{\pi-\omega} = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| \leq \pi - \omega\}$ і оцінка (5) виконується на кожному промені $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$, $|\theta| < \pi - \omega$ з константою $M = M(\theta)$. Якщо оператор B має тип $(\omega, M(\theta))$ з $\omega < \dfrac{\pi}{2}$, то $-B$ генерує аналітичну півгрупу в $\mathfrak{B}$ з кутом $\dfrac{\pi}{2} - \omega$, рівномірно обмежену в секторі $\Sigma_{\pi/2-\omega-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2} - \omega$.

Для слабко позитивного оператора B визначено степені B^α, $0 \leq \alpha \leq 1$, і за умови, що $(\omega, M(\theta))$ — тип оператора B, тип оператора B^α дорівнює $(\alpha\omega, M_\alpha(\theta))$. Звідси випливає таке твердження.

Твердження 6 (див. [12, 13]). *Якщо B — слабко позитивний оператор у $\mathfrak{B}$ з типом $(\omega, M(\theta))$, то оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом $\dfrac{\pi - \omega}{2}$.*

Під розв'язком рівняння (4) на $(0, \infty)$ розумітимемо вектор-функцію $y(t)$: $(0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(B)$, двічі неперервно диференційовну в $\mathfrak{B}$, яка задовольняє (4). Ніяких умов на поведінку розв'язку в околі нуля не вимагається.

Теорема 2. *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (4) *на* $(0, \infty)$ *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \hat{e}^{tA} f + \frac{\sinh(tA)}{A} x, \qquad f \in \mathfrak{B}_-(A), \quad x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \tag{6}$$

де $A = -B^{1/2}$.

Доведення. Нехай $y(t)$ — розв'язок рівняння (4) на $(0,\infty)$. З огляду на те, що $A^2 = B$, рівняння (4) можна записати як

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0.$$

Покладемо $z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t)$. Тоді $z(t)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Az(t), \quad t \in (0,\infty),$$

з оператором $A = -(-A)$, котрий генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу. За твердженням 5

$$z(t) = \exp(-tA)x, \quad x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

а тому вектор-функція $y(t)$ на $(0,\infty)$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \exp(-tA)x, \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

На основі твердження 4 і рівності (2) одержуємо

$$y(t) = \hat{e}^{tA} f + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} \exp(-sA)x\, ds =$$

$$= \hat{e}^{tA} f + \int\limits_0^t \exp((t-2s)A)x\, ds = \hat{e}^{tA} f + \frac{\sinh(tA)}{A} x,$$

де $f \in \mathfrak{B}_-(A)$, $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що вектор-функція вигляду (6) є розв'язком рівняння (4) на $(0,\infty)$.

Наслідок 1. *Будь-який розв'язок рівняння* (4) *на* $(0,\infty)$ *має граничне значення при* $t \to 0$ *у просторі* $\mathfrak{B}_-(A)$ *і є аналітичною на* $(0,\infty)$ *вектор-функцією в просторі* $\mathfrak{B}$. *Для того щоб розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції в* $\mathfrak{B}$, *необхідно й достатньо, щоб* $y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

6. Єдиність розв'язку задачі Діріхле. Задача Діріхле для рівняння (4) полягає у відшуканні для заданого $f \in \mathfrak{B}_-(A)$ розв'язку $y(t)$ цього рівняння, котрий задовольняє умову

$$y(t) \to f \quad \text{у просторі} \quad \mathfrak{B}_-(A) \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{7}$$

Теорема 2 показує, що у випадку слабко позитивного B ця задача має безліч розв'язків. Усі вони описуються формулою (6), тобто розглядувана задача розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної задачі

$$y(t) \to 0 \quad \text{у просторі} \quad \mathfrak{B}_-(A) \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

розв'язки якої мають вигляд

$$y(t) = \frac{\sinh(tA)}{A}x, \quad x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A). \tag{8}$$

Природно постає питання: які умови потрібно накласти на поведінку розв'язку задачі (4), (7) на нескінченності, щоб гарантувати його єдиність? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай B — позитивний оператор з типом $(\omega, M(\theta))$. Якщо розв'язок $y(t)$ однорідної задачі Діріхле для рівняння* (4) *задовольняє умову*

$$\exists a > 0 \quad \exists c_a > 0\colon \quad \|y(t)\| \le c_a e^{at^\beta}, \quad t \in (0, \infty), \tag{9}$$

де $\beta < \dfrac{\pi}{\pi + \omega}$, то $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Припустимо, що для розв'язку $y(t)$ однорідної задачі Діріхле виконується умова (9). Оскільки $0 \in \rho(A)$, $A = -B^{1/2}$, і $A^{-1}\mathfrak{G}_{(1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, то, беручи до уваги формулу (1), отримуємо

$$y(t) = \frac{\sinh(tA)}{A}x = \frac{\exp(tA) - \exp(-tA)}{2}A^{-1}x = \frac{\exp(tA)x_0 - \exp(-tA)x_0}{2},$$

де $x_0 = A^{-1}x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Обмежена аналітичність півгрупи $(e^{tA})_{t\ge 0}$ зумовлює оцінку (9) (можливо, з іншою константою c_a) і для вектор-функції $z(t) = \exp(-tA)x_0$. Зафіксуємо довільне $t_0 > 0$. Тоді з групової властивості $\exp(tA)$ випливає

$$z(t) = e^{(t_0 - t)A}z(t_0), \quad t \in [0, t_0],$$

звідки

$$z^{(n)}(t) = A^n e^{(t_0 - t)A}z(t_0).$$

За твердженням 1 маємо

$$\|z^{(n)}(t)\| = \|A^n e^{(t_0 - t)A}z(t_0)\| \le c^n n^n (t_0 - t)^{-n}\|z(t_0)\|. \tag{10}$$

Покладаючи $t = 0$, $t_0 = n^{1/\beta}$, приходимо до висновку, що

$$\|z^{(n)}(0)\| = \|A^n x_0\| \le c^n n^n c_a e^{an} n^{-n/\beta} \le c_a c^n e^{an} n^{(1-1/\beta)n}.$$

Ця оцінка показує, що вектор-функція

$$h(z) = (I - zA)^{-1}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k x_0$$

є цілою. Порядок її росту $\rho := \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$ $(M(r) = \max_{|z|=r}\|h(z)\|)$ обчислюється за формулою (див. [14])

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln(\sqrt[n]{\|A^n x_0\|})^{-1}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln((ce)^{-1}n^{\frac{1}{\beta}-1})} =$$

$$= \frac{\beta}{1-\beta} < \frac{\dfrac{\pi}{\pi+\omega}}{1 - \dfrac{\pi}{\pi+\omega}} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Оскільки A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи з кутом $\dfrac{\pi-\omega}{2}$, то його резольвента $R_A(z)$ є аналітичною в секторі $\Sigma_{\pi-\frac{\omega}{2}}$, і якщо $0<\varepsilon<2\pi-\omega$, то

$$\|h(z)\| = \|z^{-1}(A-zI)^{-1}x_0\| \le M_\varepsilon, \quad z \in \Sigma_{\pi-\frac{\omega+\varepsilon}{2}}. \tag{11}$$

Але порядок росту ρ вектор-функції $h(z)$ менший за $\dfrac{\pi}{\omega}$. Тому в (11) ε можна вибрати так, щоб $\rho < \dfrac{\pi}{\omega+\varepsilon}$.

З нерівності (11) випливає, що ціла вектор-функція $h(z)$ з $\rho<\dfrac{\pi}{\omega+\varepsilon}$ є обмеженою на сторонах кута $|\arg(-z)| < \dfrac{\omega+\varepsilon}{2}$. За теоремою Фрагмена – Ліндельофа (див. [14, с. 67]) $\|h(z)\|<M_\varepsilon$ всередині цього кута. Тоді нерівність (11) обумовлює обмеженість $h(z)$ у всій комплексній площині, і за теоремою Ліувілля

$$h(z) = (I-zA)^{-1}x_0 \equiv x_1 \in \mathcal{D}(A),$$

тобто $x_0 = x_1 - zAx_1$, що можливо лише при $Ax_1=0$. Враховуючи включення $0\in\rho(A)$, приходимо до висновку, що $x_1=0$, звідки $x_0=0$, а отже, $y(t)\equiv 0$.

Теорему доведено.

У випадку, коли B — нормальний оператор у гільбертовому просторі, теорема 3 допускає уточнення.

Теорема 4. *Нехай B — позитивний нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ з типом $(\omega, M(\theta))$. Якщо для розв'язку $y(t)$ однорідної задачі Діріхле для рівняння* (4) *виконується умова*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists c=c(\varepsilon)>0\colon \|y(t)\| \le ce^{\varepsilon t}, \quad t\in(0,\infty), \tag{12}$$

то $y(t)\equiv 0$.

Доведення. Як і в теоремі 3, умова (12) для розв'язку $y(t)$ еквівалентна умові

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists c=c(\varepsilon)>0\colon \quad \|z(t)\| \le ce^{\varepsilon t}, \quad t\in(0,\infty),$$

на доданок $z(t)=e^{-tA}x_0$ із зображення

$$y(t) = \frac{e^{tA}x_0 - e^{-tA}x_0}{2}, \quad x_0\in\mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Використавши спектральний розклад функцій від нормального оператора, дістанемо

$$e^{-2\varepsilon t}\|z(t)\|^2 \le \int\limits_{|\arg\lambda|\le\frac{\omega}{2}} e^{2(\Re\lambda-\varepsilon)t}\, d(E_\lambda x_0, x_0) \le c$$

(E_λ — розклад одиниці оператора $-A$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathfrak{H}$). При всіх $\lambda\colon \Re\lambda>\varepsilon$ підінтегральна функція прямує до нескінченності при $t\to\infty$. За теоремою Фату про граничний перехід під знаком інтеграла в нерівностях $(E_\Delta x_0, x_0) = 0$ для довільної борельової множини $\Delta\in\{\lambda\colon \Re\lambda>\varepsilon\}$. Беручи до уваги, що $\ker A=\{0\}$ і ε можна вибрати як завгодно малим, отримуємо $(E_\Delta x_0,x_0)\equiv 0$ для будь-якої борельової множини $\Delta\in\mathbb{R}^2$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що теореми 3, 4 можна узагальнити на випадок слабко позитивного B, тільки тепер із відповідних оцінок випливатиме, що $y(t) = tx$, де $x \in \ker B$.

Наступна теорема вказує на точність у певному сенсі оцінок (9) та (12).

Теорема 5. *Нехай B — позитивний оператор у $\mathfrak{B}$, а $y(t)$ — розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння* (4). *Тоді при $\alpha \geq 1$ справджуються співвідношення еквівалентності*

$$y'(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \Leftrightarrow \exists a > 0 \quad \exists c = c(a) > 0\colon \quad \|y(t)\| \leq ce^{at^\alpha}, \quad t \in [0, \infty),$$

та

$$y'(0) \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \Leftrightarrow \forall a > 0 \quad \exists c = c(a) > 0\colon \quad \|y(t)\| \leq ce^{at^\alpha}, \quad t \in [0, \infty),$$

де α і β пов'язані між собою рівністю $\beta = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$.

Доведення. Припустимо, що

$$\forall a > 0 \quad \exists c = c(a) > 0\colon \quad \|y(t)\| \leq ce^{at^\alpha}, \quad t \in [0, \infty).$$

Як і в доведенні теореми 3, можна зробити висновок, що для довільного $a > 0$ існує стала $\widetilde{c}_a > 0$ така, що вектор-функція

$$z(t) = \exp(-tA)x_0, \qquad x_0 = A^{-1}y'(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

задовольняє нерівність

$$\|z(t)\| \leq \widetilde{c}_a e^{at^\alpha}, \quad t > 0. \tag{13}$$

Звідси приходимо до оцінки

$$\|A^n x_0\| \leq c^n n^n t_0^{-n} \|z(t_0)\|$$

з деякою сталою $c > 0$. Покладаючи в (10) $t_0 = \left(\dfrac{n}{a}\right)^{1/\alpha}$, отримуємо

$$\|A^n x_0\| \leq \widetilde{c}_a c^n (a^{1/\alpha} e)^n n^{n\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Оскільки a довільне, то $ca^{1/\alpha}e$ також можна вибрати яким завгодно, а тому $x_0 \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$ і, отже, $y'(0) = Ax_0 \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$.

Навпаки, нехай $y'(0) \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, $0 \leq \beta < 1$. Тоді

$$\forall a > 0 \quad \exists c_a > 0\colon \quad \|A^n y'(0)\| \leq c_a a^n n^{n\beta},$$

звідки

$$\|\exp(-tA)y'(0)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A^k y'(0)\| \leq c_a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a^k k^{k\beta} \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{14}$$

Розглянемо цілу функцію

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} a^n n^{n\beta}$$

порядку

$$\rho = \rho(\varphi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln(n!^{1/n}/an^{\beta})} = \frac{1}{1-\beta} = \alpha.$$

Її тип

$$\sigma = \sigma(\varphi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[n]{a^n n^{n\beta}} \right) = a.$$

З нерівності (14) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0\colon \quad \|\exp(-tA)y'(0)\| \le c_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)t^\alpha}.$$

Оскільки

$$y(t) = \frac{\exp(tA) - \exp(-tA)}{2} A^{-1} y'(0)$$

і $\|\exp(tA)A^{-1}y'(0)\| \le c$ при $t > 0$, то

$$\|y(t)\| \le \widetilde{c_\varepsilon} e^{(a+\varepsilon)t^\alpha}.$$

Аналогічно доводиться перше твердження теореми. Доведення завершено.

З теореми 5 випливає, що в теоремі 4 не можна відмовитись від того, що ε є довільним.

7. Поведінка на нескінченності обмежених розв'язків неоднорідної задачі Діріхле. У цьому пункті розглядаються розв'язки $y(t)$ рівняння (4) на $(0, \infty)$, для яких $y(t) \to f$ у просторі $\mathfrak{B}_-(A)$ і виконується умова (9). За теоремами 2, 3 вони зображуються у вигляді

$$y(t) = \hat{e}^{tA} f,$$

де $\hat{e}^{tA}$ — розширення оператора e^{tA} на $\mathfrak{B}_-(A)$. Ставиться питання про більш точну оцінку поведінки таких розв'язків при $t \to \infty$.

Лема 1. *Нехай $(e^{tA})_{t\ge 0}$ — обмежена аналітична C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$, $(\hat{e}^{tA})_{t\ge 0}$ — її розширення на $\mathfrak{B}_-(A)$. Тоді*:

1) $\forall f \in \mathfrak{B}_-(A)\ \exists c_f > 0$: $\|\hat{e}^{tA} f\| \le c_f$ *при достатньо великих* $t > 0$;

2) *для того щоб*

$$\forall f \in \mathfrak{B}_-(A)\colon \quad \|\hat{e}^{tA} f\| \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty,$$

достатньо, щоб таке прямування відбувалось для будь-якого $f \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$;

3) *для того щоб існувало число* $\delta > 0$ *таке, що*

$$\forall f \in \mathfrak{B}_-(A) \quad \exists c_f > 0\colon \quad \|\hat{e}^{tA} f\| \le c_f e^{-\delta t},$$

достатньо, щоб ця нерівність виконувалась лише для $f \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Доведення. Доведення випливає з того, що при $f \in \mathfrak{B}_-(A)$, $t_0 > 0$, на основі властивостей 1–3 з п. 4 і твердження 2, $\hat{e}^{t_0 A} f \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ і

$$\hat{e}^{tA} f = e^{(t-t_0)A} \hat{e}^{t_0 A} f \quad \text{при} \quad t \ge t_0.$$

Наступна теорема дає більш детальну характеристику поведінки $y(t)$ на нескінченності.

Теорема 6. *Будь-який розв'язок неоднорідної задачі Діріхле для рівняння* (4), *який при великих* $t > 0$ *задовольняє* (9), *є обмеженим на нескінченності. Кожен такий розв'язок прямує до нуля на нескінченності тоді і тільки тоді, коли* $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. *Для того щоб це спадання було експоненціальним, необхідно і достатньо, щоб* $0 \in \rho(A)$.

Доведення. Перше твердження випливає безпосередньо з леми 1.

Припустимо, що розв'язок $y(t) = \hat{e}^{tA} f$, $f \in \mathfrak{B}_-(A)$, прямує до нуля при $t \to \infty$. Очевидно тоді, що $0 \notin \sigma_p(A)$. Тотожність

$$\forall f \in \mathcal{D}(A)\colon \quad e^{tA} f - f = A \int\limits_0^t e^{t\xi A} f \, d\xi$$

вказує на те, що $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathfrak{B}$, а отже, $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$.

Нехай, навпаки, $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. Тоді з твердження 1 випливає, що

$$\forall f \in \mathcal{D}(A)\colon \quad e^{tA} A f \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Беручи до уваги обмеженість $\|e^{tA}\|$ на $[0, \infty)$ і щільність $\mathcal{R}(A)$ в $\mathfrak{B}$, робимо висновок, що для довільного $f \in \mathfrak{B}$ $e^{tA} f \to 0$ при $t \to \infty$. За лемою 1 $\hat{e}^{tA} f \to 0$, $t \to \infty$, і для будь-якого $f \in \mathfrak{B}_-(A)$.

За умови, що $0 \in \rho(A)$, внаслідок обмеженої аналітичності $(e^{tA})_{t \geq 0}$, множина $\{z\colon \Re z > -\delta\}$ з деяким $\delta > 0$ належить до $\rho(A)$ і, отже, існує $\omega > 0$ таке, що $e^{\omega t} e^{tA} f \to 0$ при $t \to \infty$ для довільного $f \in \mathfrak{B}$, а за лемою 1 і для будь-якого $f \in \mathfrak{B}_-(A)$.

Якщо розв'язок $y(t)$ розглядуваної задачі спадає на нескінченності експоненціально, тобто

$$\exists \omega > 0 \quad \forall f \in \mathfrak{B}\colon \quad \|e^{tA} f\| \leq c_f e^{-\omega t},$$

то $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re z > -\omega\} \subset \rho(A)$.

Теорему доведено.

8. Метод степеневих рядів у наближеному розв'язанні задачі Діріхле. Покажемо, що у випадку, коли неоднорідна задача Діріхле для рівняння (4) однозначно розв'язна, для знаходження наближених розв'язків можна застосувати метод степеневих рядів. Дійсно, за теоремою 2 розв'язок $y(t)$ цієї задачі зображується у вигляді

$$y(t) = e^{tA} f, \quad f = y(0) \in \mathfrak{B}_-(A),$$

де оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну півгрупу з кутом $\dfrac{\pi - \omega}{2}$ ((ω, M_θ) — тип слабко позитивного оператора B).

Припустимо, що $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\dfrac{\omega}{\pi} < \beta < 1$. Тоді $y(t)$ можна подати як

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k f, \quad t \in [0, \infty).$$

За наближений розв'язок розглядуваної задачі візьмемо

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k f, \quad t \in [0, \infty).$$

Оскільки $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, то

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists c = c(\alpha)\colon \quad \|A^k f\| \leq c\alpha^k k!^{k\beta}.$$

Тому для $0 \leq t \leq b < \infty$ маємо

$$\|y(t) - y_n(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A^k f\| \leq c \sum_{n+1}^{\infty} t^k \alpha^k k!^{\beta-1} =$$

$$= ct^{n+1}\alpha^{n+1}(n+1)!^{\beta-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} t^{k-n-1}\alpha^{k-n-1} \left(\frac{k!}{(n+1)!}\right)^{\beta-1} =$$

$$= ct^{n+1}\alpha^{n+1}(n+1)!^{\beta-1} \sum_{i=0}^{\infty} t^i \alpha^i i!^{\beta-1} \left(\frac{(i+n+1)!}{i!(n+1)!}\right)^{\beta-1} \leq$$

$$\leq ct^{n+1}\alpha^{n+1}(n+1)!^{\beta-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i \alpha^i}{i!^{1-\beta}} = c(b, \alpha)(n+1)!^{\beta-1}.$$

Враховуючи, що $\alpha > 0$ довільне, виберемо його настільки малим, щоб $c(b, \alpha)$ було достатньо малим. Таким чином, для довільного фіксованого $b > 0$

$$\sup_{t \in [0,b]} \|y_n(t) - y(t)\| \leq c(b, \alpha)(n+1)!^{\beta-1} \tag{15}$$

з як завгодно малою константою $c(b, \alpha)$. Крім того, $y_n(0) = f$. Отже, якщо $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, $0 \leq \beta < 1$, то $y_n(t)$ — конструктивна апроксимація розв'язку задачі (4), (7) і чим менше β, тим менша похибка наближення.

Для нев'язки $\|y_n''(t) - By_n(t)\|$ на проміжку $[0, b]$ одержуємо оцінку

$$\|y_n''(t) - By_n(t)\| = \left\| \sum_{k=2}^{n} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} A^k f - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^{k+2} f \right\| =$$

$$= \left\| \frac{t^{n-1}A^{n+1}f}{(n-1)!} + \frac{t^n A^{n+2} f}{n!} \right\| \leq \widetilde{c}(b, \alpha)(n-1)!^{\beta-1},$$

де сталу $\widetilde{c}(b, \alpha)$ при фіксованому b можна зробити як завгодно малою.

Нехай тепер f — довільний елемент з $\mathfrak{B}$. За твердженням 3 при $\beta > \frac{\omega}{\pi}$ $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$. Тому існує послідовність $f_m \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ така, що $f_m \to f$ в $\mathfrak{B}$ при $m \to \infty$. Внаслідок обмеженості півгрупи $(e^{tA})_{t \geq 0}$, послідовність $y_m(t) = e^{tA} f_m$ збігається рівномірно на $[0, \infty)$ до $e^{tA} f$. У свою чергу, $y_m(t)$ можна наблизити поліномами вигляду

$$\sum_{k=0}^{n_m} \frac{t^k}{k!} A^k f_m. \tag{16}$$

Як показує оцінка (15), порядок цієї апроксимації дорівнює $n_m^{\beta-1}$. Тоді поліноми (16) наближають розв'язок $y(t)$ у метриці простору $\mathfrak{B}$ на $[0, b]$. Якщо ж

$f \in \mathfrak{B}_-(A)$, то поліноми (16) здійснюють наближення $y(t)$ в топології простору $\mathfrak{B}_-(A)$ на довільному компакті з $[0, \infty)$ і по нормі простору $\mathfrak{B}$ на будь-якому компакті з $(0, \infty)$.

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
2. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **70**, № 3. – P. 572 – 615.
3. *Goodman R. W.* Analytic and entire vectors for representations of the Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55 – 76.
4. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791 – 793.
5. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55 – 91.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
7. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
8. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 347 p.
9. *Gorbachuk M. L., Mokrousov Yu. G.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 23 – 29.
10. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций: В 2 т. – М.: Физматгиз, 1958. – Т. 2. – 307 с.
11. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про одне узагальнення еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 608 – 615.
12. *Komatsu H.* Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. – 1966. – **19**, № 2. – P. 285 – 346.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
14. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 632 с.

Одержано 10.07.2006