УДК 517.9

С. П. Дегтярев, А. Ф. Тедеев*
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

We establish exact-order bilateral estimates for the size of a support of solution of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation with anisotropic degeneration in the case where initial data are finite and have finite masses.

Встановлено точні за порядком двосторонні оцінки розмірів носія розв’язку задачі Коші для параболічного рівняння з подвійною нелінійністю та анізотропним виродженням у випадку, коли початкові дані є фінітними та мають скінченну масу.

1. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения с анизотропным вырождением и двойной нелинейностью относительно неизвестной функции $u(x, t)$:

$$\frac{\partial(|u|^{\beta-1}u)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad x \in R^N, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$|u|^{\beta-1}u(x, 0) = u_0^{\beta}(x), \quad x \in R^N. \tag{2}$$

Здесь $0 < \beta < 1$, p_i, $i = \overline{1, N}$, — заданные положительные числа, причем без ограничения общности считаем, что $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_N$, $u_0(x)$ — заданная неотрицательная функция с компактным носителем, при этом носитель функции $u_0(x)$ содержится в множестве P_{D_0}:

$$\operatorname{supp}(u_0) \subset P_{D_0} = \{x \in R^N : |x_i| < D_{0i},\ i = \overline{1, N}\}, \tag{3}$$

где D_{0i} — заданные положительные числа. Будем предполагать, что функция $u_0(x)$ имеет конечную массу, т. е.

$$\mu = \int_{R^N} u_0^{\beta}(x)\,dx < \infty. \tag{4}$$

Под слабым решением задачи (1), (2) мы понимаем неотрицательную измеримую функцию $u(x, t)$, определенную в области $R^N \times (0, \infty)$ и имеющую следующие свойства:

1) для любого ограниченного открытого множества Ω в R^N, для любого $t > 0$ и почти всех $t_1, t_2 > 0$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_\Omega |u_{x_i}|^{p_i-1}\,dx\,d\tau < \infty, \qquad \sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_{x_i}|^{p_i}\,dx\,d\tau < \infty;$$

2) функция $|u|^{\beta-1}u$ характеризуется свойством

$$|u|^{\beta-1}u \in C([0, \infty), L^1(\Omega));$$

3) при всех $t > 0$

* Частично поддержан INTAS (проект 03-51-5007).

$$\int_\Omega |u|^{\beta-1} u\varphi(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_\Omega \left|u_{x_i}\right|^{p_i-2} u_{x_i}\varphi_{x_i}\,dx\,d\tau =$$

$$= \int_\Omega |u_0|^{\beta-1} u_0\varphi(x,0)\,dx + \int_0^t \int_\Omega |u|^{\beta-1} u\varphi_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau \tag{5}$$

для любой функции $\varphi(x,t)$ с носителем в $\Omega\times[0,T]$, $0<t<T$, такой, что $\varphi(x,t)\in W^{1,\infty}([0,T],L^\infty(\Omega))\bigcap L^\infty([0,T],W_0^{1,\infty}(\Omega))$.

Будем рассматривать случай, когда уравнение (1) описывает медленную диффузию во всех направлениях, что выражается в предположении о параметрах задачи:

$$0<\beta<1, \quad 1+\beta<p_i, \quad i=\overline{1,N}. \tag{6}$$

Отметим, что в случае изотропного уравнения (1), когда все $p_i=p$, $i=\overline{1,N}$, явление компактности носителя решения задачи (1), (2) и поведение носителя решения изучались одним из автором (см. работы [1, 2] и имеющуюся там библиографию). В анизотропном случае естественно ожидать, что поведение носителя решения будет различным в направлении различных координатных осей. Целью данной статьи является получение двусторонних оценок размеров носителя решения задачи (1), (2) в различных направлениях в зависимости от показателей β, p_i и начальной массы μ. При этом мы используем метод, предложенный в [1 – 3], а также метод оценок работы [3].

Введем некоторые обозначения и приведем вспомогательные сведения. Пусть p — среднее гармоническое показателей p_i, т. е.

$$p = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Будем пользоваться вложением анизотропных пространств Соболева, следующим, в частности, из работы [4]. Пусть функция $u(x,t)$ определена в области Ω пространства R^N, имеет обобщенные производные первого порядка в смысле Соболева и выполнены условия $u\big|_{\partial\Omega}=0$, $\int_\Omega \left|u_{x_i}\right|^{p_i} dx<\infty$. Тогда при $p<N$

$$\|u\|_{L_{p_*}(\Omega)} \le \frac{N-1}{N}\prod_{i=1}^N \left\|u_{x_i}\right\|_{L_{p_i}(\Omega)}^{1/N}, \tag{8}$$

где $p_*=Np/(N-p)$. Если же $p>N$, то

$$\sup_\Omega |u| \le C\sum_{i=1}^N \left\|u_{x_i}\right\|_{L_{p_i}(\Omega)}. \tag{9}$$

Здесь и далее через C обозначены все абсолютные константы.

Из оценки (8) выводится неравенство Ниренберга – Гальярдо, которое будет использовано ниже:

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le C\left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|u_{x_i}\right|^{p_i} dx\right)^{\alpha/p} \|u\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha}, \tag{10}$$

где $\alpha\in(0,1)$ и определяется из условия

$$\frac{1}{q} = \alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{N}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{\varepsilon}, \tag{11}$$

а константа C не зависит от области Ω. Показатели q и ε должны удовлетворять соотношению $0 < \varepsilon < q$, причем при $p < N$ должно выполняться $q < p_*$.

Относительно показателей p_i предполагаем, что их значения имеют не слишком большой разброс, а именно

$$p\,\frac{N + \beta(\beta + 1)}{N + \beta p} \;<\; p_i \;<\; p\left(1 + \frac{\beta}{N}\right), \quad i = \overline{1, N}. \tag{12}$$

Определим параметры

$$d = p - 1 - \beta, \quad d_i = p_i - 1 - \beta, \quad k = Nd + \beta p, \tag{13}$$

$$\theta_i = \left(\frac{Nd}{k\beta} + \frac{N(d - d_i) + pp_i}{k - Nd_i} - \frac{\beta + 1}{\beta}\right)\frac{k - Nd_i}{p_i(k + N)}, \tag{14}$$

$$\omega_i = \frac{k - Nd_i}{p_i k}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Отметим, что, в силу определений (13) – (15), при выполнении условия (12) величины ω_i и θ_i положительны и справедливы соотношения

$$\omega = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i = \frac{\beta}{k}, \quad \theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i = \frac{d}{k}.$$

Для простоты изложения мы ограничиваемся, как отмечено выше, неотрицательными начальными данными и, следовательно, рассматриваем неотрицательные решения задачи (1), (2). Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1), (2) *выполнены условия* (3), (4), (6) *и* (12). *Тогда слабое решение задачи* (1), (2) *имеет компактный носитель при всех* $t > 0$, *причем если* $d_i(t)$ — *точные размеры носителя в направлении оси* Ox_i, *т. е.* $d_i(t)$ — *наименьшие положительные числа, для которых*

$$\operatorname{supp}\left(u(\cdot, t)\right) \subset \left\{x \in R^N : |x_i| \le d_i(t)\right\},$$

то справедлива оценка

$$d_i(t) \le D_i(t) = 4D_{0i} + C\mu^{\theta_i} t^{\omega_i}. \tag{16}$$

Эта оценка является точной по порядкам t *и* μ, *т. е. при больших* t *и* μ

$$d_i(t) \ge C\mu^{\theta_i} t^{\omega_i}.$$

Доказательство этой теоремы приведено в пп. 2 и 3. Здесь же отметим, что в случае $p_i = p$, $i = \overline{1, N}$, оценка (16) совпадает с известными оценками размеров носителя для изотропного случая (см. [2] и имеющуюся там библиографию).

2. Доказательство оценки (16). Мы не будем подробно рассматривать существование слабого решения задачи (1), (2), так как оно следует из работы [5]. При этом решение задачи Коши получается как предел решений задач Дирихле с нулевыми граничными данными в расширяющихся областях. Слабое решение задачи (1), (2) с начальными данными, удовлетворяющими условию (4), можно рассматривать как предел решений со сглаженными финитными неотрицательными начальными данными, удовлетворяющими, в частности, условию

$$M = \int_{R^N} u_0^{1+\beta}(x)\,dx < \infty. \tag{17}$$

Отметим, что для таких начальных данных справедлива энергетическая оценка

$$E(t) = \sup_{0<\tau<t} \int_{R^N} u^{1+\beta}(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \int_{R^N} \left|u_{x_i}\right|^{p_i} dx\,d\tau \le M. \tag{18}$$

Оценку (16) размеров носителя решения через начальную массу μ также можно получить на приближениях с последующим предельным переходом. Поэтому, не вводя дополнительных обозначений для приближений начальной функции $u_0(x)$ и решения $u(x,t)$, мы без ограничения общности будем считать соотношения (17) и (18) выполненными.

Заметим также следующее. Для получения нужных нам ниже интегральных оценок будем умножать уравнение (1) на пробные функции с последующим интегрированием (используя, по существу, определение слабого решения). Все эти операции оправданы на упомянутых выше приближениях, так как выполнено, в частности, (18).

Докажем сначала финитность носителя решения. Приводимая ниже лемма следует рассуждениям доказательства теоремы 1.1 из [1].

Лемма 1. *При условии* (17) *решение задачи* (1), (2) *имеет финитный носитель при всех* $t > 0$.

Доказательство. Пусть $R_i > 0$ — заданные числа, причем $R_i > 4D_{0i}$, где D_{0i} взято из условия (3). Пусть

$$R_{ni} = R_i + 2^{-n-1}R_i, \qquad r_{ni} = \frac{1}{2}(R_i - 2^{-n-1}R_i), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{19}$$

Определим последовательность сужающихся кольцеобразных областей:

$$S_n = \{x \in R^N : r_{ni} < |x_i| < R_{ni}\}. \tag{20}$$

Заметим, что $S_{n+1} \subset S_n$, причем

$$S_0 = \left\{x \in R^N : \frac{R_i}{4} < |x_i| < \frac{3R_i}{2}\right\} \tag{21}$$

и при $n \to \infty$

$$S_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = \left\{x \in R^N : \frac{R_i}{2} \le |x_i| \le R_i\right\}. \tag{22}$$

Пусть, далее $\zeta_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, — гладкие срезающие функции, имеющие свойства

$$\zeta_n(x) = 1, \quad x \in S_{n+1}, \qquad \zeta_n(x) = 0, \quad x \in R^N \backslash S_n, \qquad \left|\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i}\right| \le C2^n R_i^{-1}.$$

$\Big($Такие функции можно легко построить в виде произведения $\zeta_n(x) = \prod_{i=1}^N \zeta_n^{(i)}(x_i)$.$\Big)$ Пусть, наконец, $r > 0$ фиксировано, $r > p_i$, $i = \overline{1, N}$.

Умножим уравнение (1) на $u(x,t)\zeta_n^r(x)$ и проинтегрируем по частям по S_n:

$$\frac{1}{1+\beta}\int_{S_n} u^{1+\beta}(x,t)\zeta_n^r(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{S_n}\left|u_{x_i}\right|^{p_i}\zeta_n^r\,dx\,d\tau =$$

$$= -r\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{S_n}\left|u_{x_i}\right|^{p_i-2}u_{x_i}u\zeta_n^{r-1}\zeta_{nx_i}\,dx\,d\tau = r\sum_{i=1}^{N}F_i. \tag{23}$$

Оценим слагаемые в правой части последнего соотношения по неравенству Юнга с ε:

$$|F_i| \le \varepsilon \int_0^t \int_{S_n} \left|u_{x_i}\right|^{p_i} \zeta_n^r \, dx\, d\tau + C_\varepsilon \int_0^t \int_{S_n} u^{p_i} \zeta_n^{r-p_i} \left|\zeta_{nx_i}\right|^{p_i} dx\, d\tau,$$

где ε выбрано достаточно малым. Следовательно, перенося слагаемые с ε в левую часть (19), с учетом свойств функции $\zeta_n(x)$ получаем

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{S_n} u^{1+\beta}(x,\tau)\zeta_n^r(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{S_n} \left|u_{x_i}\right|^{p_i} \zeta_n^r \, dx\, d\tau \le C \sum_{i=1}^N \frac{2^{np_i}}{R_i^{p_i}} \int_0^t \int_{S_n} u^{p_i} \zeta_n^{r-p_i} \, dx\, d\tau. \tag{24}$$

Определим функции $v_n(x,t) = u(x,t)\zeta_n^s(x)$, где показатель s выбран достаточно большим: $s(1+\beta) > r$, $sp_i > r$. Отметим, что

$$\left|v_{nx_i}\right|^{p_i} \le C\left(\left|u_{x_i}\right|^{p_i} \zeta_n^{sp_i} + u^{p_i}\zeta_n^{(s-1)p_i}\left|\zeta_{nx_i}\right|^{p_i}\right).$$

Из последнего неравенства и (24), в силу свойств функций $\zeta_n(x)$ и областей S_n, следует, что

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{S_{n+1}} v_{n+1}^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{S_{n+1}} \left|v_{n+1x_i}\right|^{p_i} dx\, d\tau \le C \sum_{i=1}^N \frac{2^{np_i}}{R_i^{p_i}} \int_0^t \int_{S_n} v_n^{p_i} \, dx\, d\tau. \tag{25}$$

Применим к каждому интегралу по dx по области S_n в правой части неравенства (25) неравенство (10) с $q = p_i$ и $\varepsilon = 1+\beta$, проинтегрируем результат по τ от 0 до t, вынесем $\sup_{0<\tau<t}\int_{S_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx$ и применим неравенство Гельдера. В результате получим

$$\int_0^t \int_{S_n} v_n^{p_i} \, dx\, d\tau \le C\left(\sum_{k=1}^N \int_0^t \int_{S_n} \left|v_{nx_k}\right|^{p_k} dx\, d\tau\right)^{b_i} t^{1-b_i} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{S_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{c_i}, \tag{26}$$

где $b_i = a_i p_i / p$, $c_i = (1-a_i)p_i/(1+\beta)$, причем a_i определяются из соответствующего условия (11). Непосредственные вычисления показывают, что при выполнении (12) $b_i \in (0,1)$ и $b_i = d_i N/(k+p)$, $b_i + c_i - 1 = d_i p/(k+p)$. Вводя теперь в рассмотрение величины

$$Y_n = \sup_{0<\tau<t} \int_{S_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{S_n} \left|v_{nx_i}\right|^{p_i} dx\, d\tau,$$

из соотношений (25) и (26) получаем

$$Y_{n+1} \le C \sum_{i=1}^N \frac{2^{np_i} t^{1-b_i}}{R_i^{p_i}} Y_n^{1+d_i p/(k+p)}.$$

Согласно итеративной лемме 5.6 из [6], $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если величины

$$\frac{t^{1-b_i}}{R_i^{p_i}} Y_0^{d_i p/(k+p)} \le \gamma_0, \qquad \gamma_0 > 0$$

достаточно малы. Поскольку в силу (18) $Y_0 \le M$, то $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если R_i выбраны так, что

$$R_i \ge \gamma_0^{-p_i} M^{d_i p/(k+p)p_i} t^{(1-b_i)/p_i} + 4D_{0i}.$$

Последнее доказывает лемму 1.

Отметим, что из леммы 1 умножением уравнения (1) на срезающую функцию $\zeta(x)$, равную 1 в окрестности носителя $u(x,t)$, $t \in [0, T]$, и последующим интегрированием получаем

$$\int_{R^N} u^\beta(x,t)\,dx = \int_{R^N} u_0^\beta(x)\,dx = \mu, \quad t > 0. \tag{27}$$

Оценим теперь размеры носителя решения $u(x,t)$ в терминах времени t и начальной массы μ. Предварительно докажем еще одно вспомогательное утверждение, которое аналогично лемме 3.2 из [3].

Пусть $R_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, $\theta_k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, $\theta > 0$, причем $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$, $\theta_2 - \theta_1 = A_1\theta$, $\theta_4 - \theta_3 = A_2\theta$, $A_1 + A_1^{-1} + A_2 + A_2^{-1} \le C$. Обозначим $R_i^{(k)} = R_i\theta_k$, $k = \overline{1, 4}$, и рассмотрим области в R^N:

$$S_1 = \{x \in R^N : R_i^{(1)} < |x_i| < R_i^{(4)}\}, \qquad S_2 = \{x \in R^N : R_i^{(2)} < |x_i| < R_i^{(3)}\},$$

для которых $S_2 \subset S_1$. Пусть $R_i^{(1)} > 4D_{0i}$.

Лемма 2. *Для слабого решения* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{S_2} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx \le C \sum_{i=1}^N F_i \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{S_1} u^\beta(x,\tau)\,dx \right)^{M_i}, \tag{28}$$

где

$$F_i = \frac{t}{(\theta R_i)^{p_i/(1-s_i)}}, \quad M_i = \frac{f_i}{1-s_i}, \quad s_i = \alpha_i \frac{p_i}{p}, \quad f_i = \frac{(1-\alpha_i)p_i}{\beta},$$

а числа α_i *определяются из условий*

$$\frac{1}{p_i} = \alpha_i \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + (1-\alpha_i)\frac{1}{\beta}. \tag{29}$$

(Заметим, что при выполнении (12) $0 < s_i < 1$, $1 < M_i$.)

Доказательство. Определим последовательность величин $R_{ni} = R_i^{(4)} - (R_i^{(4)} - R_i^{(3)})2^{-n}$, $r_{ni} = R_i^{(1)} + (R_i^{(2)} - R_i^{(1)})2^{-n}$, и последовательность расширяющихся областей $C_n = \{x \in R^N : r_{ni} < |x_i| < R_{ni}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Отметим, что $C_0 = S_2$ и области C_n стремятся к области S_1. Определим, далее, последовательность срезающих функций $\zeta_n(x)$ таких, что

$$\zeta_n(x) = 1, \quad x \in C_n, \qquad \zeta_n(x) = 0, \quad x \in R^N \setminus C_{n+1}, \qquad \left| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} \right| \le C2^n(\theta R_i)^{-1}.$$

Пусть, как и в лемме 1, $v_n(x,t) = u(x,t)\zeta_n^s(x)$, где s достаточно велико. Полностью аналогично оценке (25) из леммы 1 и уравнения (1) получаем

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{C_{n+1}} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{C_{n+1}} |v_{nx_i}|^{p_i}\,dx\,d\tau \le C \sum_{i=1}^N \frac{2^{np_i}}{(\theta R_i)^{p_i}} \int_0^t \int_{C_{n+2}} v_{n+1}^{p_i}\,dx\,d\tau. \tag{30}$$

Оценим интегралы по C_{n+2} в правой части (30) по неравенству (10) следующим образом:

$$\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{p_i}\,dx\,d\tau \;\le\; C\left(\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{C_{n+2}}\left|v_{n+1x_k}\right|^{p_k}dx\right)^{\alpha_i p_i/p}\left(\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}\right)^{(1-\alpha_i)p_i/\beta},$$

где α_i определяются из условия (29). Интегрируя последнее неравенство по времени и применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{p_i}\,dx\,d\tau \;\le\; Ct^{1-s_i}\left(\sum_{k=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+2}}\left|v_{n+1x_k}\right|^{p_k}dx\,d\tau\right)^{s_i}\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{f_i}. \tag{31}$$

Применяя теперь к каждому слагаемому в правой части (30) оценку (31) и используя неравенство Юнга с δ/N, находим

$$\frac{2^{np_i}}{(\theta R_i)^{p_i}}\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{p_i}\,dx\,d\tau \;\le\; \frac{\delta}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+2}}\left|v_{n+1x_k}\right|^{p_k}dx\,d\tau\right)+$$

$$+\;C_\delta\,\frac{t}{(\theta R_i)^{p_i/(1-s_i)}}\,b_i^n\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{M_i},$$

где $b_i = 2^{p_i/(1-s_i)}$.

Следовательно, в силу последнего неравенства, из неравенства (30) имеем

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{C_{n+1}} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx \;+\; \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+1}}\left|v_{nx_i}\right|^{p_i}dx\,d\tau \;\le$$

$$\le\;\delta\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+2}}\left|v_{n+1x_i}\right|^{p_i}dx\,d\tau \;+\; C_\delta\sum_{i=1}^{N}F_i b_i^n\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{M_i}. \tag{32}$$

Обозначая

$$y_n \;=\; \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{C_{n+1}}\left|v_{nx_i}\right|^{p_i}dx\,d\tau$$

и замечая, что

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{C_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}(x,\tau)\,dx \;\le\; \sup_{0<\tau<t}\int\limits_{S_1} u^{\beta}(x,\tau)\,dx \;\equiv\; A,$$

из соотношения (32) выводим

$$y_n \le \delta y_{n+1} + C_\delta\sum_{i=1}^{N}F_i b_i^n A^{M_i}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Применяя последнее неравенство, последовательно по индукции получаем

$$y_1 \;\le\; \delta^n y_{n+1} + C_\delta\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}(\delta b_i)^k\right) b_i F_i A^{M_i}. \tag{33}$$

Заметим, что в силу определения v_n и ζ_n

$$y_n \le D_1 \sum_{i=1}^{N} 2^{np_i} \int_0^t \int_{S_1} \left| u_{x_i} \right|^{p_i} dx\, d\tau \le D_2 \sum_{i=1}^{N} 2^{np_i},$$

где константы D_1 и D_2 не зависят от n. Выбирая теперь число δ достаточно малым так, чтобы $\delta < 2^{-p_i}/2$, $\delta < 1/2b_i$, $i = \overline{1, N}$, видим, что $\delta^n y_{n+1} \to 0$, $n \to \to \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\delta b_i)^k \le C$. Таким образом, переходя в (33) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$y_1 \le C \sum_{i=1}^{N} F_i \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{S_1} u^{\beta}(x, \tau)\, dx \right)^{M_i}.$$

Отсюда и из оценки (32) с $n = 0$ следует утверждение леммы 2.

Перейдем непосредственно к доказательству оценки (16). Пусть величины R_i, R_{ni}, r_{ni} и области S_n, S_∞ определены, как в лемме 1, соотношениями (19) – (22), $R_i > 4D_{0i}$, $i = \overline{1, N}$. Применим лемму 2 к соседним областям S_n и S_{n+1}. При этом $R_i^{(1)} = r_{ni}$, $R_i^{(2)} = r_{n+1 i}$, $R_i^{(3)} = R_{n+1 i}$, $R_i^{(4)} = R_{ni}$, и поэтому параметр θ можно принять равным $\theta = 2^{-n}$. В силу леммы 2 получаем оценку

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{S_{n+1}} u^{1+\beta}(x, \tau)\, dx \le C \sum_{i=1}^{N} \frac{t}{R_i^{p_i/(1-s_i)}}\, b_i^n \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{S_n} u^{\beta}(x, \tau)\, dx \right)^{M_i}, \tag{34}$$

где $b_i = 2^{p_i/(1-s_i)}$. С другой стороны, из неравенства Гельдера имеем

$$\int_{S_{n+1}} u^{\beta}(x, \tau)\, dx \le C \left(\int_{S_{n+1}} u^{1+\beta}(x, \tau)\, dx \right)^{\beta/(\beta+1)} \left(\prod_{i=1}^{N} R_i \right)^{1/(\beta+1)}.$$

Используя в последнем неравенстве оценку (34) и обозначая

$$z_n = \sup_{0<\tau<t} \int_{S_n} u^{\beta}(x, \tau)\, dx,$$

получаем

$$z_{n+1} \le C \sum_{i=1}^{N} \frac{t^{\beta/(1+\beta)}}{R_i^{\beta p_i/(1-s_i)(1+\beta)}} \left(\prod_{k=1}^{N} R_k \right)^{1/(\beta+1)} b_i^{R^{\beta n/(1+\beta)}} z_n^{M_i \beta/(1+\beta)}. \tag{35}$$

Легко проверить, что при выполнении (12) числа $M_i \beta/(1+\beta) > 1$, и поэтому, согласно лемме 5.6 из [6], $z_n \to 0$ при $n \to \infty$, если величины

$$\frac{t^{\beta/(1+\beta)}}{R_i^{\beta p_i/(1-s_i)(1+\beta)}} \left(\prod_{k=1}^{N} R_k \right)^{1/(\beta+1)} z_0^{M_i \beta/(1+\beta)-1}$$

достаточно малы. Поскольку

$$z_0 = \sup_{0<\tau<t} \int_{S_0} u^{\beta}(x, \tau)\, dx \le \sup_{0<\tau<t} \int_{R^N} u^{\beta}(x, \tau)\, dx = \int_{R^N} u_0^{\beta}(x, \tau)\, dx = \mu,$$

то для того чтобы $z_n \to 0$, достаточно, чтобы

$$\frac{t^{\beta/(1+\beta)}}{R_i^{\beta p_i/(1-s_i)(1+\beta)}} \left(\prod_{k=1}^{N} R_k \right)^{1/(\beta+1)} \mu^{M_i\beta/(1+\beta)-1} \leq \gamma_0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{36}$$

где γ_0 достаточно мало.

Положим теперь

$$R_i = R_i(t) = C\mu^{\theta_i} t^{\omega_i}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{37}$$

и подчиним $R_i(t)$ условию, достаточному для выполнения неравенства (36) (после возведения последнего в степень $(1+\beta)/\beta$):

$$R_i(t)^{a_i} \left(\prod_{k=1}^{N} R_k(t) \right)^{-1/\beta} = C\mu^{D_i} t, \quad i = \overline{1, N}, \tag{38}$$

где $a_i = p_i/(1-s_i) = p_i(k+N)/(k-Nd_i)$, $D_i = M_i - (1+\beta)/\beta$. Путем уравнивания степеней μ и t в левой и правой частях (38) и определяются положительные показатели ω_i и θ_i, определенные в (14), (15) и удовлетворяющие соотношениям $\omega = \beta/k$, $\theta = d/k$.

Таким образом, при выборе в (36) величин $R_i \geq 4D_{0i} + R_i(Lt)$ с $L \geq 1$ неравенства (36) выполнены и в соотношениях (35) $z_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, решение $u(x,t) \equiv 0$ в области $S_\infty \times [0, T]$, что и доказывает оценку (16).

3. Оценка снизу порядков размера носителя. Для того чтобы подтвердить точный характер оценки (16), нам потребуется следующая теорема, которую, из-за ограниченного объема статьи, приводим без доказательства. Эта теорема дает оценки времени жизни решения задачи (1), (2) и локальные оценки $\|u\|_\infty$-нормы решения при растущих, вообще говоря, начальных данных.

Пусть $B_\rho = \{x \in R^N : |x_i| < \rho^{\alpha_i}/2,\ i = \overline{1, N}\}$, $\rho > 0$, где $\alpha_i = pd_i/dp_i$, причем $\sum_{i=1}^N \alpha_i = N$. Пусть, далее,

$$|||v|||_r = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-k/d} \int_{B_\rho} |v(x)|\,dx, \qquad M_\infty = \lim_{r\to\infty} \left|\left|\left| u_0^\beta \right|\right|\right|_r.$$

Обозначим $\kappa_i = (k - Nd_i)/pd_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, и определим функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} t^{\kappa_N}, & t \leq 1, \\ t^{\kappa_1}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть для задачи* (1), (2) *выполнено условие* (6) *и правое из условий* (12) *и для некоторого* $r > 0$ *выполнено* $\left|\left|\left| u_0^\beta \right|\right|\right|_r < \infty$. *Тогда для существующего на интервале* $[0, T]$,

$$T = \begin{cases} \omega^{-1}(C/M_\infty), & M_\infty \neq 0, \\ \infty, & M_\infty \neq 0, \end{cases}$$

слабого решения задачи (1), (2) *при почти всех* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\left|\left|\left| u^\beta(\cdot, t) \right|\right|\right|_r \leq C \left|\left|\left| u_0^\beta \right|\right|\right|_r, \qquad |||u(\cdot,t)|||_{\infty, B_r} \leq C r^{p/d} t^{-N/k} \left|\left|\left| u_0^\beta \right|\right|\right|_r^{p/k},$$

причем если начальные данные $u_0(x)$ *имеют конечную массу, т. е. удовлетворяют условию* (4), *то*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \le Ct^{-N/k}\mu^{p/k}, \quad t > 0. \tag{39}$$

Из оценки (39) легко следует оценка снизу размеров носителя решения $u(x,t)$. Пусть t и μ достаточно велики. Тогда, обозначая $S(t) = \operatorname{supp}(u(\cdot,t))$, имеем

$$\mu = \int_{R^N} u_0^\beta\,dx = \int_{R^N} u^\beta(x,t)\,dx \le \left(\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\right)^\beta \operatorname{mes} S(t).$$

Следовательно, в обозначениях теоремы 1 в силу оценки (39)

$$\prod_{i=1}^N d_i(t) \ge \operatorname{mes} S(t) \ge Ct^{N\beta/k}\mu^{Nd/k} \ge C\prod_{i=1}^N D_i(t).$$

Таким образом, ни одна из функций $d_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, не может расти медленнее, чем $D_i(t)$, так как суммарно порядок роста $d_i(t)$ и $D_i(t)$ одинаков (в силу (16) и последнего неравенства), и ни одна из $d_j(t)$ не может расти быстрее, чем $D_j(t)$ в силу (16).

Теорема 1 доказана.

1. *Тедеев А. Ф.* Условия существования и несуществования в целом по времени компактного носителя решений задачи Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 1. – С. 189 – 200.
2. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**. – P. 233 – 264.
3. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, № 1. – P. 89 – 120.
4. *Королев А. Г.* Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева – Орлича // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1983. – № 1. – С. 32 – 37.
5. *Bernis F.* Existence results for double nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – **279**. – P. 373 – 394.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 21.06.2006