УДК 517.95

М. І. Іванчов, Н. В. Салдіна (Львів. нац. ун-т)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З СИЛЬНИМ СТЕПЕНЕВИМ ВИРОДЖЕННЯМ

An inverse problem of determining a time-dependent coefficient of the higher derivative in the complete parabolic equation is considered. At initial time, this coefficient is equal to zero. Conditions for the existence and uniqueness of the classical solution of the considered problem are established.

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при старшій похідній у повному параболічному рівнянні, який дорівнює нулю у початковий момент часу. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку вказаної задачі.

Ця стаття є продовженням роботи авторів по вивченню обернених параболічних рівнянь з виродженням [1]. Такі задачі мають велике практичне застосування в нафтодобувній промисловості, біології, медицині, фінансах та інших, тобто в тих галузях, де з деяких очевидних причин неможливо точно виміряти параметри досліджуваного процесу і де математичний апарат обернених задач діє особливо ефективно. Одним із перших, хто дослідив обернену задачу визначення коефіцієнта при старшій похідній в параболічному рівнянні, був Ф. Джонс [2]. Обернені задачі з виродженням по просторових змінних розглядались у роботах [3 – 5] для рівнянь гіперболічного та еліптичного типів з невідомим вільним членом та молодшим коефіцієнтом. Проте питання знаходження невідомого коефіцієнта, який вироджується по часовій змінній, залишається відкритим. Задачі зі слабким та сильним виродженнями є суттєво різними, оскільки відтворення невідомого коефіцієнта та його поведінка залежать від різних вихідних даних. І якщо в слабкому виродженні, яке мало відрізняється від невиродженого випадку, вплив молодших членів не змінює результатів, отриманих для рівняння теплопровідності [6], то у випадку повного параболічного рівняння з сильним виродженням ситуація істотно змінюється.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $Q_T = \{(x,t)\colon 0<x<h,\ 0<t<T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)>0,\ t\in(0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in[0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Позначимо через $G_k(x,t,\xi,\tau)$ функції Гріна першої $(k=1)$ та другої $(k = 2)$ крайових задач для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t). \tag{5}$$

Вони мають вигляд

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad k = 1,2, \tag{6}$$

де $\theta(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$.

Припускаючи, що функція $a(t)$ є відомою, та вводячи позначення $v(x,t) \equiv$ $\equiv u_x(x,t)$, пряму задачу (1) – (3) замінимо еквівалентною системою рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\big(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\big(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

де $u_0(x,t)$ — розв'язок рівняння (5) з умовами (2), (3), який має вигляд

$$u_0(x,t) = \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau. \tag{9}$$

Вираз $v_0(x,t)$ отримується з (9) диференціюванням та інтегруванням частинами з застосуванням властивостей функції Гріна:

$$v_0(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi + \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\big(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)\big)d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\big(\mu_2'(\tau) - f(h,\tau)\big)d\tau + \int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi\, d\tau. \tag{10}$$

Підставивши (8) в (4), отримаємо

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Обернену задачу (1) – (4) зведено до еквівалентної системи рівнянь (7), (8), (11). Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема існування та єдиності. *Припустимо, що виконуються умови*:

1) $\varphi \in C^1[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1, 2$; $\mu_3 \in C[0,T]$; $b, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

2) $f(0,t) - \mu_1'(t) > 0$, $t \in [0,T]$; $\mu_3(t) > 0$, $t \in (0,T]$, *існує границя* $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{\mu_3(t)}{t^{(\beta+1)/2}} \equiv M$, $|b(x,t)| \le Bt^{(\beta-1)/2+\gamma_0}$, $|c(x,t)| \le Ct^{\gamma_1}$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $\gamma_i > 0$, $i = 0, 1$, $\beta > 1$, $M, C, B > 0$ — *деякі сталі*;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число t_0, $0 < t_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними задачі, що існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (4) $\big(a(t), u(x,t)\big)$ *з класу* $C[0,t_0] \times C^{2,1}(Q_{t_0}) \cap C(\overline{Q}_{t_0})$, $u_x(0,t) \in C(0,t_0]$, $a(t) > 0$, $t \in (0,t_0]$, *причому існує скінченна додатна границя* $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{a(t)}{t^\beta}$.

2. Встановлення апріорних оцінок. Існування розв'язку доведемо за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього визначимо апріорні оцінки розв'язку системи.

За принципом максимуму [7, с. 25]

$$|u(x,t)| \le U < \infty \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T. \tag{12}$$

Встановимо поведінку $|v(x,t)|$. На підставі рівності $\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi = 1$ робимо висновок про обмеженість першого та четвертого доданків рівності (10) сталими, що залежать від вихідних даних:

$$\left|\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi\right| \le C_1, \qquad \left|\int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \le C_2. \tag{13}$$

Для оцінки двох наступних виразів з (10) використаємо явний вигляд функції Гріна та відому оцінку [8, с. 12]

$$G_2(x,t,\xi,\tau) \le \frac{C_3}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_4.$$

Тоді

$$\begin{gathered}\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\big(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)\big)d\tau \le C_5 + C_6\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},\\ \left|\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\big(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)\big)d\tau\right| \le C_7 + C_8\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.\end{gathered} \tag{14}$$

Остаточно отримуємо

$$|v_0(x,t)| \le C_9 + C_{10}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{15}$$

Враховуючи нерівність

$$\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \le \frac{C_{11}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$$

та вводячи позначення $V(t) \equiv \max_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$, з рівняння (8) знаходимо

$$V(t) \le C_{12} + C_{13}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{14}\int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{15}\int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{16}$$

Позначимо

$$a_0(t) \equiv \frac{a(t)}{t^\beta}, \qquad a_{\max}(t) \equiv \max_{0\le\tau\le t} a_0(\tau), \qquad a_{\min}(t) \equiv \min_{0\le\tau\le t} a_0(\tau). \tag{17}$$

Враховуючи означення функції $\theta(t)$ та (17), зведемо (16) до вигляду

$$V(t) \le C_{12} + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} + \frac{C_{17}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)+\tau^{\gamma_1}}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau. \tag{18}$$

Використавши заміну $z = \dfrac{\tau}{t}$, оцінимо інтеграл

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} = \frac{1}{t^{(\beta-1)/2}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \le \frac{1}{t^{(\beta-1)/2}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{C_{18}}{t^{(\beta-1)/2}}. \tag{19}$$

З огляду на (19) легко бачити, що другий інтеграл у (18) має порядок особливості менший, ніж $\dfrac{1}{t^{(\beta-1)/2}}$. Отже, функція $v(x,t)$ поводить себе як $\dfrac{C_{19}}{t^{(\beta-1)/2}}$ при $t \to +0$.

Оцінимо $v(0,t)$ знизу. В рівнянні (8) покладемо $x = 0$. З вигляду функції $G_2(0,t,h,\tau)$ маємо

$$\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)\left|\mu_2'(\tau) - f(h,\tau)\right| d\tau \le C_{20}. \tag{20}$$

З умов теореми та оцінок (13) та (20) випливає

$$v(0,t) \ge \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)\big(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)\big) d\tau -$$

$$- C_{21} - C_{22} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau) + \tau^{\gamma_1}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{21}$$

Для оцінки першого інтеграла у (21) підставимо функцію Гріна (6) та виділимо з ряду доданок, що відповідає $n = 0$:

$$\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)\big(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)\big) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\right) d\tau \ge$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau.$$

Тоді з (21) знаходимо

$$v(0,t) \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau - C_{21} - C_{22} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau) + \tau^{\gamma_1}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{22}$$

З того, що при $t \to +0$ особливість другого інтеграла в (22) менша за особливість першого, випливає, що існують такі значення t_1, $0 < t_1 \le T$, та q, $0 < q < 1$, що

$$C_{22} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau) + \tau^{\gamma_1}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + C_{21} \le q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Тоді з (22) одержуємо

$$v(0,t) \ge (1-q) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{23}$$

Підставляючи (23) в рівняння (11), отримуємо

$$a(t) \le \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{(1-q) \displaystyle\int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau}.$$

Використовуючи (17), маємо

$$a_0(t) \le \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{a_{\max}(t)}}{(1-q)\sqrt{\beta+1}t^{\beta}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau}.$$

Введемо позначення

$$H(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{\beta+1}t^{\beta}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau}. \tag{24}$$

З умов теореми випливає, що функція $H(t)$ є додатною на $(0, T]$ та належить класу $C(0, T]$.

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t\to+0} H(t)$. Для цього використаємо теорему про середнє та заміну змінних $z = \dfrac{\tau}{t}$:

$$\lim_{t\to+0} H(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{\beta+1}t^{\beta}\left(f(0,\bar{t})-\mu_1'(\bar{t})\right)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\beta+1}} \lim_{t\to+0} \frac{\mu_3(t)}{t^{(\beta+1)/2}\left(f(0,\bar{t})-\mu_1'(\bar{t})\right)\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}M}{\sqrt{\beta+1}\left(f(0,0)-\mu_1'(0)\right)I_1} > 0.$$

Тут

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}, \qquad M = \lim_{t\to+0} \frac{\mu_3(t)}{t^{(\beta+1)/2}},$$

$\bar{t}$ — деяке число з $[0, T]$. Продовжуючи оцінку функції $a(t)$ з використанням означення функції $H(t)$, отримуємо

$$a_0(t) \le \frac{1}{1-q} H(t)\sqrt{a_{\max}(t)} \quad \text{або} \quad a_{\max}(t) \le \frac{1}{1-q} H_{\max}(t)\sqrt{a_{\max}(t)},$$

де $H_{\max}(t) = \max\limits_{0\le\tau\le t} H(\tau)$. Звідси маємо

$$a_{\max}(t) \le \frac{1}{(1-q)^2} H^2_{\max}(t), \quad t \in [0, t_1]. \tag{25}$$

Остаточно для $a(t)$ одержуємо

$$a(t) \le A_1 t^{\beta}, \quad \text{де} \quad A_1 = \frac{1}{(1-q)^2} H^2_{\max}(T) > 0, \quad t \in [0, t_1]. \tag{26}$$

Для оцінки $a(t)$ знизу використаємо означення функції $V(t)$ та наступну оцінку $v(0, t)$:

$$v(0,t) \le C_{23} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau + C_{24}\int\limits_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau +$$

$$+ C_{25}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння (11), використавши означення функції $a_{\min}(t)$:

$$a(t) \geq \mu_3(t)\left(C_{23} + \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{24}\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + \frac{C_{25}\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \right)^{-1}.$$

Поділимо обидві частини нерівності на t^β і зведемо її до вигляду

$$a_0(t) \geq \sqrt{a_{\min}(t)}\left(\frac{C_{23}\sqrt{a_{\min}(t)}\,t^\beta}{\mu_3(t)} + \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{t^\beta}{\mu_3(t)} \int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + C_{26}\frac{t^\beta}{\mu_3(t)} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + C_{27}\frac{t^\beta}{\mu_3(t)} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \right)^{-1}.$$

Продовжимо оцінку $a_0(t)$, використавши існування додатної границі $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\mu_3(t)}{t^{(\beta+1)/2}}$ та означення функції $H(t)$:

$$a_0(t) \geq \sqrt{a_{\min}(t)}\left(C_{28}\sqrt{a_{\min}(t)}\,t^{(\beta-1)/2} + \frac{1}{H(t)} + C_{29}t^{(\beta-1)/2} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + C_{30}t^{(\beta-1)/2} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \right)^{-1} \geq \sqrt{a_{\min}(t)}\,H(t)\left(C_{31}t^{(\beta-1)/2} + 1 + \right.$$

$$\left. + C_{32}t^{(\beta-1)/2} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + C_{33}t^{(\beta-1)/2} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \right)^{-1}. \tag{27}$$

З огляду на поведінку функції $V(t)$ робимо висновок про те, що існує таке значення t_2, $0 < t_2 \leq T$, що

$$C_{31}t^{(\beta-1)/2} + C_{32}t^{(\beta-1)/2} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\,d\tau + C_{33}t^{(\beta-1)/2} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leq$$

$$\leq C_{31}t^{(\beta-1)/2} + C_{34}t^{\gamma_0} + C_{35}t^{\gamma_1} \leq q, \qquad t \in [0, t_2].$$

Тоді з (27) маємо

$$a_{\min}(t) \geq \frac{\sqrt{a_{\min}(t)}\,H(t)}{1+q} \quad \text{або} \quad a_{\min}(t) \geq \frac{H_{\min}^2(t)}{(1+q)^2}, \qquad t \in [0, t_2], \tag{28}$$

де

$$H_{\min}(t) = \min_{0\leq\tau\leq t} H(\tau).$$

Остаточно для $a(t)$ отримуємо

$$a(t) \geq A_0 t^\beta, \qquad t \in [0, t_2], \qquad A_0 = \frac{1}{(1+q)^2}H_{\min}^2(T) > 0. \tag{29}$$

Маючи оцінки зверху та знизу для функції $a(t)$, продовжуємо оцінку функції $V(t)$. Для цього підставимо у (18) оцінку $a_{\min}(t)$ з (28) та врахуємо (19):

$$V(t) \leq C_{12} + \frac{C_{36}}{t^{(\beta-1)/2}} + \frac{C_{37}}{t^{\beta/2}} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0}V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \frac{C_{38}}{t^{\beta/2}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{30}$$

Помножимо обидві частини на $t^{(\beta-1)/2}$ та введемо нову функцію $w(t) \equiv \equiv V(t)t^{(\beta-1)/2}$. Тоді отримаємо

$$w(t) \le C_{39} + \frac{C_{37}}{\sqrt{t}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_0} w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau + \frac{C_{38}}{\sqrt{t}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{31}$$

Покладемо $t = \sigma$, домножимо обидві частини нерівності на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ і зінтегруємо від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{w(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \le C_{40}\sqrt{t} + C_{37} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(t-\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{\tau^{\gamma_0} w(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}}\, d\tau + C_{38} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(t-\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{\tau^{\gamma_1}\, d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}.$$

Перетворимо другий та третій доданки нерівності. Змінюючи порядок інтегрування та враховуючи заміну змінних $z = \dfrac{\sigma-\tau}{t-\sigma}$, маємо

$$\int_0^t \frac{w(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \le C_{40}\sqrt{t} + C_{37}\pi \int_0^t \tau^{\gamma_0 - 1/2} w(\tau)\, d\tau + C_{41} t^{\gamma_1 + 1/2}. \tag{32}$$

Подамо (31) у вигляді

$$w(t) \le C_{39} + C_{37} t^{\gamma_0 - 1/2} \int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau + C_{42} t^{\gamma_1}.$$

Використовуючи оцінку (32), отримуємо

$$w(t) \le C_{43} + C_{44} t^{\gamma_0 - 1/2} \int_0^t \tau^{\gamma_0 - 1/2} w(\tau)\, d\tau$$

або

$$w(t) t^{1/2 - \gamma_0} \le C_{43} t^{1/2 - \gamma_0} + C_{44} \int_0^t \tau^{\gamma_0 - 1/2} w(\tau)\, d\tau. \tag{33}$$

У випадку, коли $\gamma_0 \ge \dfrac{1}{2}$, дана нерівність розв'язується за допомогою леми Гронуолла [9, с. 188], і, як наслідок, функція $w(t)$ обмежена деякою сталою, яка залежить від вихідних даних. Нехай $\gamma_0 < \dfrac{1}{2}$. Позначимо праву частину нерівності (33) через $\chi(t)$. Тоді

$$\chi'(t) - C_{44} t^{2\gamma_0 - 1} \chi(t) \le C_{43} \left(\frac{1}{2} - \gamma_0 \right) t^{-1/2 - \gamma_0}.$$

Домножимо обидві частини нерівності на $\exp\left(-C_{44} \int_0^t \tau^{2\gamma_0 - 1}\, d\tau \right)$ та зінтегруємо від 0 до t. В результаті отримаємо

$$\chi(t) \le C_{43} t^{1/2 - \gamma_0} \exp\left(\frac{C_{44}}{2\gamma_0} t^{2\gamma_0} \right).$$

Підставляючи отриману оцінку в (33), одержуємо

$$w(t) \le C_{43} \exp\left(\frac{C_{44}}{2\gamma_0} t^{2\gamma_0} \right) \le C_{45}.$$

Тоді маємо

$$V(t) \le \frac{C_{45}}{t^{(\beta-1)/2}}, \quad t \in [0, t_2], \quad \text{або} \quad \left| v(x,t) \right| \le \frac{C_{45}}{t^{(\beta-1)/2}}, \quad (x,t) \in [0,h] \times (0, t_2], \tag{34}$$

де C_{45} — стала, що визначається вихідними даними.

3. Доведення існування розв'язку. Введемо нову функцію $\tilde{v}(x,t) \equiv \equiv v(x,t)t^{(\beta-1)/2}$ і запишемо систему рівнянь (7), (8), (11) у вигляді

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \\ + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(b(\xi,\tau)\frac{\tilde{v}(\xi,\tau)}{\tau^{(\beta-1)/2}} + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi\, d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{35}$$

$$\tilde{v}(x,t) = v_0(x,t)t^{(\beta-1)/2} + \\ + t^{(\beta-1)/2}\int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(b(\xi,\tau)\frac{\tilde{v}(\xi,\tau)}{\tau^{(\beta-1)/2}} + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi\, d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{36}$$

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)t^{(\beta-1)/2}}{\tilde{v}(0,t)}, \quad t \in [0, t_0], \quad t_0 = \min\{t_1, t_2\}. \tag{37}$$

Подамо систему рівнянь (35) – (37) в операторній формі

$$\omega = P\omega, \tag{38}$$

де $\omega = (u, \tilde{v}, a)$, $P = (P_1, P_2, P_3)$, оператори P_1, P_2, P_3 визначаються правими частинами рівнянь (35) – (37). Визначимо множину $\mathcal{N} = \{ (u(x,t), \tilde{v}(x,t), a(t)) \in \in C(\overline{Q}_{t_0}) \times C(\overline{Q}_{t_0}) \times C[0, t_0] : |u(x,t)| \le U, \ |\tilde{v}(x,t)| \le C_{45}, \ A_0 \le \frac{a(t)}{t^\beta} \le A_1 \}$. Згідно з оцінками (12), (34), (26), (29) оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Покажемо, що оператор P є цілком неперервним на $\mathcal{N}$. Згідно з теоремою Арцела – Асколі для цього слід встановити, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$\left| P_i(x_2, t_2) - P_i(x_1, t_1) \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2,$$

$$\left| P_3(t_2) - P_3(t_1) \right| < \varepsilon, \quad \forall (u(x,t), \tilde{v}(x,t), a(t)) \in \mathcal{N},$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta$, $|x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$. Доведення компактності покажемо на прикладі одного з доданків, що входить до інтегрального оператора P:

$$K = \left| t_2^{(\beta-1)/2}\int_0^{t_2}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0, t_2, 0, \tau)\,d\tau - \right. \\ \left. - t_1^{(\beta-1)/2}\int_0^{t_1}(f(0,\tau) - \mu_1'(t))G_2(0, t_1, 0, \tau)\,d\tau \right|.$$

Припустимо, що t_i, $i = 1, 2$, є досить малими. Розглянемо інтеграл

$$\hat{K} = t^{(\beta-1)/2}\int_0^t (f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t,0,\tau)\,d\tau = \frac{t^{(\beta-1)/2}}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)d\tau\right) = \hat{K}_1 + \hat{K}_2.$$

Використаємо позначення (17) та означення функції $\theta(t)$. Тоді для другого доданка отримаємо оцінку

$$\hat{K}_2 \le \frac{2\sqrt{\beta+1}\,t^{(\beta-1)/2}}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}}\max_{t\in[0,T]}(f(0,t)-\mu_1'(t))\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2(\beta+1)}{a_{\max}(t)(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})}\right)d\tau.$$

З означення множини $\mathcal{N}$ робимо висновок про обмеженість підінтегрального виразу $\hat{K}_2$. Отже, $\hat{K}_2$ прямує до нуля при $t\to+0$. Розглянемо перший доданок $\hat{K}_1$, використовуючи теорему про середнє та заміну змінних $z = \frac{\tau}{t}$:

$$\hat{K}_1 = \frac{t^{(\beta-1)/2}\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi a_0(\bar{t})}}(f(0,\bar{t})-\mu_1'(\bar{t}))\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} =$$

$$= \frac{(f(0,\bar{t})-\mu_1'(\bar{t}))\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi a_0(\bar{t})}}\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}},$$

де $\bar{t}\in[0,T]$. Позначимо $\lim\limits_{t\to+0}\hat{K}_1 = \kappa_0$. Тоді, повертаючись до K, отримуємо

$$K \le \left| t_2^{(\beta-1)/2}\int_0^{t_2}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_2,0,\tau)\,d\tau - \kappa_0\right| +$$

$$+ \left| t_1^{(\beta-1)/2}\int_0^{t_1}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_1,0,\tau)\,d\tau - \kappa_0\right|.$$

Можна вказати таке значення t_*, що при $0<t_i<t_*$, $i=1,2$, будуть виконуватись нерівності

$$\left| t_i^{(\beta-1)/2}\int_0^{t_i}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_i,0,\tau)\,d\tau - \kappa_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $K<\varepsilon$ при $0<t_i<t_*$, $i=1,2$. Випадок $t_i>t_*$, $i=1,2$, та інші інтегральні оператори, що входять в P_1, P_2, досліджуються аналогічно до випадку сильного виродження для рівняння теплопровідності [10]. Оператор P є цілком неперервним на $\mathcal{N}$.

За теоремою Шаудера існує розв'язок системи (35) – (37), який має потрібну гладкість. Існування розв'язку задачі (1) – (4) доведено.

3. Доведення єдиності розв'язку. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i(t), u_i(x,t), v_i(x,t))$, $i=1,2$, системи (7), (8), (11). Позначимо різницю цих розв'язків через $a(t)\equiv a_1(t)-a_2(t)$, $u(x,t)\equiv u_1(x,t)-u_2(x,t)$, $v(x,t)\equiv v_1(x,t)-v_2(x,t)$. Для цих функцій отримаємо систему рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_1^1(x,t,\xi,\tau)\big(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^h \big(G_1^1(x,t,\xi,\tau) - G_1^2(x,t,\xi,\tau)\big)\big(b(\xi,\tau)v_2(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{39}$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau)\big(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^h \big(G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau) - G_{1x}^2(x,t,\xi,\tau)\big)\big(b(\xi,\tau)v_2(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{40}$$

$$a(t) = -a_1(t)a_2(t)\,\frac{v(0,t)}{\mu_3(t)}, \quad t\in[0,T], \tag{41}$$

де $G_1^i(x,t,\xi,\tau)$, $i = 1, 2$, — функції Гріна перших крайових задач для рівнянь $u_{it} = a_i(t)u_{ixx}$, $u_0(x,t) = u_{01}(x,t) - u_{02}(x,t)$, $v_0(x,t) = v_{01}(x,t) - v_{02}(x,t)$.

Для доведення єдиності розв'язку оцінимо $a(t)$, виходячи з рівняння (41). Спочатку оцінимо величини $|u(x,t)|$, $|v(x,t)|$, $|u_0(x,t)|$, $|v_0(x,t)|$, від яких залежить оцінка $|v(0,t)|$. Для прикладу розглянемо один із доданків, що входить до $v_0(x,t)$. Позначимо

$$R_2 = \int_0^t \left| \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau.$$

Перетворимо R_2, виділяючи з рядів доданки, що відповідають $n = 0$:

$$R_2 \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} \big(f(0,t) - \mu_1'(t)\big)\left(\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right)\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}\right| d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}\left|\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau + \int_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right|\right) = C_{46} \sum_{i=1}^{3} R_{2i}.$$

Подамо R_{23} у вигляді

$$R_{23} = \int_0^t \left| \int_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4z}\right)\right) dz \right| d\tau.$$

Враховуючи обмеженість підінтегрального виразу, отримуємо оцінку

$$R_{23} \le C_{47}\int_0^t |\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|d\tau \le C_{47}\int_0^t d\tau\int_\tau^t |a_1(\sigma)-a_2(\sigma)|d\sigma \le$$

$$\le C_{48}\tilde{a}_{\max}(t)t^{\beta+2}, \quad \text{де} \quad \tilde{a}_{\max}(t) \equiv \max_{0\le\tau\le t}|a_0(\tau)|, \quad a_0(\tau) \equiv \frac{a(t)}{t^\beta}.$$

Для оцінки R_{22} використаємо нерівності $\left|e^x - e^y\right| \le \left|x - y\right| \max\{e^x, e^y\}$ та (26):

$$R_{22} \le \frac{x^2}{4}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\left|\frac{1}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} - \frac{1}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{C_{49}(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})}\right)d\tau =$$

$$= \frac{x^2}{4}\int_0^t \frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\exp\left(-\frac{x^2}{C_{49}(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})}\right)d\tau.$$

Враховуючи оцінки (28), маємо

$$\begin{gathered}|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)| \le \int_\tau^t |a_0(\sigma)|\sigma^\beta\, d\sigma \le \frac{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}{\beta+1}\tilde{a}_{\max}(t), \\ \theta_i(t)-\theta_i(\tau) = \int_\tau^t a_{i0}(\sigma)\sigma^\beta\, d\sigma \ge \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}\,\frac{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}{\beta+1}, \quad i = 1, 2.\end{gathered} \tag{42}$$

Беручи до уваги нерівність $x^p e^{-qx^2} \le C_{p,q}$, $x \ge 0$, $p \ge 0$, $q > 0$, та оцінки (42), отримуємо

$$R_{22} \le C_{50}\tilde{a}_{\max}(t)\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \le \frac{C_{51}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}}.$$

Вираз R_{21} подамо у вигляді

$$R_{21} = \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\frac{\left|\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}-\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\left(\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}+\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right)}d\tau.$$

Беручи до уваги (42), для R_{21} одержуємо

$$R_{21} \le C_{52}\tilde{a}_{\max}(t)\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \le \frac{C_{53}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}}.$$

Остаточно отримуємо оцінку $R_2 \le \dfrac{C_{54}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}}$. Наступний доданок, що входить до $v_0(x, t)$, оцінюється аналогічно до попереднього:

$$R_3 = \int_0^t \left| \frac{\mu_2'(\tau) - f(h,\tau)}{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + h(2n-1))^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2'(\tau) - f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + h(2n-1))^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))} \right) \right| d\tau \le \frac{C_{55}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}}. \quad (43)$$

Для двох інших доданків у виразі $v_0(x,t)$ мають місце оцінки

$$R_1 = \int_0^h \left| (G_2^1(x,t,\xi,0) - G_2^2(x,t,\xi,0))\varphi'(\xi) \right| d\xi \le C_{56}\tilde{a}_{\max}(t),$$

$$R_4 = \int_0^t \int_0^h \left| (G_2^1(x,t,\xi,\tau) - G_2^2(x,t,\xi,\tau)) f_\xi(\xi,\tau) \right| d\xi\, d\tau \le C_{57} t \tilde{a}_{\max}(t). \quad (44)$$

Отже, остаточно маємо $|v_0(x,t)| \le \dfrac{C_{58}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}}$.

Вираз $|u_0(x,t)|$ оцінюється аналогічно, і для нього справджується оцінка $|u_0(x,t)| \le C_{59}\tilde{a}_{\max}(t)$.

Позначимо $U(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |u(x,t)|$, $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$. Тоді з (39), (40), використовуючи оцінки $v_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ та умови теореми, маємо

$$V(t) \le \frac{C_{60}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}} + \frac{C_{61}}{t^{\beta/2}} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau) + \tau^{\gamma_1} U(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau, \quad (45)$$

$$U(t) \le C_{62}\tilde{a}_{\max}(t) + C_{63} \int_0^t (\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau) + \tau^{\gamma_1} U(\tau))\, d\tau. \quad (46)$$

Розв'язуючи нерівність (46) щодо $U(t)$, отримуємо

$$U(t) \le C_{64}\tilde{a}_{\max}(t) + C_{65} \int_0^t \tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau)\, d\tau. \quad (47)$$

Підставляючи (47) у (45), приходимо до нерівності

$$V(t) \le \frac{C_{66}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}} + \frac{C_{61}}{t^{\beta/2}} \int_0^t \frac{\tau^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau +$$

$$+ \frac{C_{67}}{t^{\beta/2}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma_1}\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\tau \sigma^{(\beta-1)/2+\gamma_0} V(\sigma)\, d\sigma. \quad (48)$$

Розв'язуючи (48) аналогічно до (30) і враховуючи (47), отримуємо

$$V(t) \le \frac{C_{68}\tilde{a}_{\max}(t)}{t^{(\beta-1)/2}} \quad \text{та} \quad U(t) \le C_{69}\tilde{a}_{\max}(t), \quad t \in [0, t_0]. \quad (49)$$

Таким чином, ми отримали оцінки $|u(x,t)|$, $|v(x,t)|$. Вираз $|v(0,t)|$ оцінимо окремо. Розглядаючи (43) при $x = 0$, робимо висновок, що підінтегральний вираз R_3 є обмеженим, тому $R_3 \le C_{70}\tilde{a}_{\max}(t)$. Поведінка доданків R_1, R_4 не змінюється, отже, залишаються правильними оцінки (44). Вираз R_2 оцінимо точніше. Підставляючи $x = 0$ в R_2 та виділяючи з рядів доданки, що відповідають $n = 0$, маємо

$$R_2' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \left| \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \right| \big(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)\big)d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \left| \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right) - \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right)\right| d\tau = R_{21}' + R_{22}'.$$

Підінтегральний вираз R_{22}' не має особливості, тому $R_{22}' \le C_{71}\tilde{a}_{\max}(t)$. Для R_{21}' використаємо оцінки (42) та означення функції $H(t)$:

$$R_{21}' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|\big(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)\big)}{\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\big(\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}+\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\big)}\, d\tau \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\beta+1}(1+q)^3\tilde{a}_{\max}(t)}{2\sqrt{\pi}H_{\min}^3(t)}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\, d\tau \le \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\tilde{a}_{\max}(t)}{2H_{\min}^4(t)t^{\beta}}.$$

Остаточно

$$\big|v_0(0,t)\big| \le \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\tilde{a}_{\max}(t)}{2H_{\min}^4(t)t^{\beta}} + C_{72}\tilde{a}_{\max}(t). \tag{50}$$

Підставляючи (50) у (40) та враховуючи (49), отримуємо

$$\big|v(0,t)\big| \le \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\tilde{a}_{\max}(t)}{2H_{\min}^4(t)t^{\beta}} + C_{73}\tilde{a}_{\max}(t) + C_{74}\tilde{a}_{\max}(t)\frac{t^{\gamma_0}+t^{\gamma_1}}{t^{(\beta-1)/2}}. \tag{51}$$

Беручи до уваги (25), з (41) знаходимо

$$\big|a_0(t)\big| \le \frac{H_{\max}^4(t)}{(1-q)^4}\frac{t^{\beta}}{\mu_3(t)}|v(0,t)|.$$

Продовжимо оцінку $a_0(t)$, підставивши (51):

$$\big|a_0(t)\big| \le \left(\frac{(1+q)^3H_{\max}^4(t)}{2(1-q)^4H_{\min}^4(t)} + C_{75}t^{(\beta-1)/2} + C_{76}(t^{\gamma_0}+t^{\gamma_1})\right)\tilde{a}_{\max}(t)$$

або

$$\tilde{a}_{\max}(t) \le \left(\frac{(1+q)^4H_{\max}^4(t)}{2(1-q)^4H_{\min}^4(t)} + C_{75}t^{(\beta-1)/2} + C_{76}(t^{\gamma_0}+t^{\gamma_1})\right)\tilde{a}_{\max}(t).$$

З того, що $\lim\limits_{t\to+0} H_{\max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} H_{\min}(t)$, випливає, що для заданого q, $0<q<1$, існує таке число t^*, $0<t^*\le T$, що $\dfrac{H_{\max}^4(t)}{H_{\min}^4(t)} \le 1+q$, $C_{75}t^{(\beta-1)/2} + C_{76}(t^{\gamma_0}+t^{\gamma_1}) \le q$, $t\in[0,t^*]$. Зафіксуємо число q так, щоб $0<q<\dfrac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}+1}$. Отримаємо

$$\frac{(1+q)^4H_{\max}^4(t)}{2(1-q)^4H_{\min}^4(t)} + C_{75}t^{(\beta-1)/2} + C_{76}(t^{\gamma_0}+t^{\gamma_1}) \le \frac{(1+q)^4}{2(1-q)^4}(1+q) + q < 1.$$

Тоді $\tilde{a}_{\max}(t)\le 0$ на проміжку $[0,t^*]$, що неможливо. Отже, $\tilde{a}_{\max}(t)\equiv 0$ при

$t \in [0, t_0]$, де $t_0 = \min\{t_1, t_2, t^*\}$. Звідси $a(t) \equiv 0$, $t \in [0, t_0]$ і $u(x, t) \equiv 0$, $v(x, t) \equiv 0$, $x \in [0, h]$, $t \in [0, t_0]$.

Теорему доведено.

Зауваження. Доведену теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1) – (4) можна використати для дослідження аналогічної задачі з іншими крайовими умовами та умовами перевизначення. Дійсно, розглянемо задачу (1) з початковою умовою (2), крайовими умовами $u_x(0, t) = \mu_1(t)$, $u_x(h, t) = \mu_2(t)$ та додатковою умовою $u(0, t) = \mu_3(t)$. Тоді замінами $u_x(x, t) = v(x, t)$ та $u(x, t) = \mu_3(t) + {}$ $+ \int_0^x v(\eta, t)\,d\eta$ дана задача зводиться до такої:

$$v_t = a(t)v_{xx} + b(x,t)v_x + \big(b_x(x,t) + c(x,t)\big)v + c_x(x,t)\left(\mu_3(t) + \int_0^x v(\eta, t)\,d\eta\right) +$$

$$+ f_x(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T,$$

$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad x \in [0, h],$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \qquad v(h, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T],$$

$$a(t)v_x(0, t) = \mu_4(t), \quad t \in [0, T],$$

де $\mu_4(t) \equiv \mu_3'(t) - b(0,t)\mu_1(t) - c(0,t)\mu_3(t) - f(0,t)$.

Легко бачити, що наявність інтегрального доданка в рівнянні не впливає на дослідження даної задачі аналогічно до задачі (1) – (4).

1. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1563 – 1570.
2. *Jones B. F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I // J. Math. and Mech. – 1962. – **11**, № 6. – P. 907 – 918.
3. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функцион. анализа в уравнениях мат. физики. – Новосибирск, 1987. – С. 66 – 71.
4. *Елдесбаев Т.* О некоторых обратных задачах для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **11**, № 3. – С. 502 – 510.
5. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1987. – № 3. – С. 27 – 29.
6. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 245 – 257.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p.
9. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
10. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate neat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – **14**, № 5. – P. 465 – 480.

Одержано 06.03.2006