УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ),
Г. П. Івасюк (Чернів. нац. ун-т)

ПАРАБОЛІЧНІ ЗА СОЛОННИКОВИМ СИСТЕМИ КВАЗІОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ

We consider a new class of systems of equations combining structures of Solonnikov-parabolic and Eidelman-parabolic systems. We prove a theorem on reducing a general initial problem to a problem with null initial data and a theorem on the correct solvability of initial problem in the model case.

Розглядається новий клас систем рівнянь, які поєднують у собі структури систем, параболічних за Солонниковим і Ейдельманом. Доведено теореми про зведення загальної початкової задачі до задачі з нульовими початковими даними та про коректну розв'язність початкової задачі в модельному випадку.

У 1938 р. І. Г. Петровський [1] увів досить широкий клас параболічних систем лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, який на даний час є найглибше і найповніше дослідженим. Означення І. Г. Петровського узагальнювалось у різних напрямках. Зокрема, в 1960 р. С. Д. Ейдельман [2] розглянув новий клас систем, який узагальнював клас систем, параболічних за Петровським. У цих системах диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за часовою змінною, тобто системи мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$. Тому такі системи названі $\overrightarrow{2b}$-параболічними. Дослідженням задачі Коші для них присвячено праці [3 – 5]. У 1964 р. В. О. Солонников [6] запропонував ще одне узагальнення параболічних за Петровським систем. У цих системах порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати як від k, так і від j. Теорію крайових задач і задачі Коші для такого класу систем детально розроблено в фундаментальній праці [7] (див. також [8]).

У даній статті розглядаються системи, які природно узагальнюють системи, параболічні за С. Д. Ейдельманом, і системи, параболічні в розумінні В. О. Солонникова (такі системи ми називаємо параболічними за Солонниковим системами квазіоднорідної структури). Вивчення таких систем у модельному випадку розпочато другим співавтором під керівництвом першого. У праці [9] для цього випадку описано структуру та властивості фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) і наведено формули для розв'язків початкової задачі.

З метою побудови для нового класу систем теорії розв'язності початкових задач у просторах Гельдера як обмежених функцій, так і зростаючих на нескінченності, у цій статті ми розглядаємо два важливих питання: зведення загальної початкової задачі до задачі з нульовими початковими даними і встановлення коректної розв'язності початкової задачі в модельному випадку.

1. Означення параболічної системи. Нехай n, N, $b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$, $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\|\overline{\alpha}\| := \sum_{j=0}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\|\alpha\| := \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $M := \sum_{j=0}^{n} m_j$, i — уявна одиниця, $A(t, x, \partial_t, \partial_x) := \left(A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x)\right)_{k,j=1}^{N}$, $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$ і $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$ — невідома та задана вектор-функції, $\Pi_H := \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in H,\ x \in \mathbb{R}^n\right\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$, T — задане додатне число.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує $s_k + t_j$

(якщо $s_k + t_j < 0$, то $A_{kj} := 0$) і $\sum_{k=1}^{N}(s_k + t_k) = 2br$, де r — степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 := (A^0_{kj})^N_{k,j=1}$ — головна частина A, тобто

$$A^0_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j} A^0_{kj}(t, x, p, i\sigma).$$

Означення 1. *Систему рівнянь*

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{1}$$

будемо називати рівномірно параболічною за Солонниковим з квазіоднорідною структурою на множині $\Pi_{[0,T]}$, *якщо існує така стала* $\delta > 0$, *що для будь-яких* $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ *і* $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p*-корені рівняння* $\det A^0(t, x, p, i\sigma) = 0$ *задовольняють нерівність*

$$\operatorname{Re} p(t, x, \sigma) \le -\delta\left(\sigma_1^{2b_1} + \ldots + \sigma_n^{2b_n}\right).$$

Частинними випадками означених вище систем є системи, параболічні за Петровським ($m_k = 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$), $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k > 1$ для принаймні одного $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $j \in \{1, \ldots, N\}$) і параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k = 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$).

Далі вважатимемо, що виконується умова

А) *система* (1) *є рівномірно параболічною в* $\Pi_{[0,T]}$ *зі сталою* $\delta > 0$ *згідно з означенням* 1.

2. Початкові умови. Для систем (1) задавати початкові умови так, як для систем Петровського, взагалі кажучи, не можна. Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [7].

Нехай $B(x, \partial_t, \partial_x) := (B_{kj}(x, \partial_t, \partial_x))^{r,\ N}_{k=1,\ j=1}$ — матричний диференціальний вираз, $\varphi := \operatorname{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ — задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$ не перевищує $p_k + t_j$, а якщо $p_k + t_j < 0$, то $B_{kj} := 0$. Тут t_j — ті самі, що й у системі (1). Головною частиною виразу B назвемо вираз $B^0 := (B^0_{kj})^{r,\ N}_{k=1,\ j=1}$, де $B^0_{kj}(x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j} B^0_{kj}(x, p, i\sigma)$.

Початкові умови для системи (1) задамо у вигляді

$$B(x, \partial_t, \partial_x)u(t, x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Для забезпечення коректності задачі з умовою (2) матричний вираз B повинен задовольняти таку умову доповняльності типу відомої **умови Лопатинського:** *рядки матриці*

$$C(x, p) := B^0(x, p, 0)\widehat{A^0}(0, x, p, 0),$$

де $\widehat{A^0} := \det A^0 (A^0)^{-1}$ — *матриця, взаємна для* A^0, *лінійно незалежні за модулем одночлена* p^r *у кожній точці* $x \in \mathbb{R}^n$.

Як і в [7], ця умова дозволяє для кожної системи (1) визначити числа p_k і з точністю до деяких алгебраїчних перетворень побудувати матрицю $B^0(x, p, 0)$. Матриця

$$B'(x, p, i\sigma) := B^0(x, p, i\sigma) - B^0(x, p, 0)$$

відіграє роль молодшого члена, для її елементів повинна виконуватися лише одна умова: степінь відносно λ многочлена $B'_{kj}(x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$ дорівнює $p_k + t_j$.

Так само, як у праці [7], доводяться такі твердження:

1) умова доповняльності рівносильна умові

$$\det H^{(p')}(x) \neq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

для будь-якої матриці $H^{(p')}$, визначеної в [7, с. 15, 24];

2) якщо компоненти u_j вектор-функції u, коефіцієнти диференціальних виразів A і B, а також компоненти f_k і φ_s вектор-функцій f і φ є досить гладкими функціями своїх аргументів, то при виконанні умови (3) система (1) і початкова умова (2) дають можливість за допомогою операції диференціювання та розв'язування лінійних алгебраїчних систем визначити при $t = 0$ значення будь-якої похідної від кожної із своїх функцій u_j через f_k і φ_s та їх похідні.

Припускатимемо, що виконується рівномірний варіант умови (3), тобто умова

B) *існує така стала* $\delta_1 > 0$, *що для всіх матриць* $H^{(p')}$ *і точок* $x \in \mathbb{R}^n$ *справджується нерівність*

$$\left|\det H^{(p')}(x)\right| \geq \delta_1 .$$

3. Фундаментальна матриця розв'язків модельної системи. Розглянемо у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ систему рівнянь, параболічну за Солонниковим квазіоднорідної структури зі сталими коефіцієнтами, яка містить лише групу старших членів,

$$A^0(\partial_t, \partial_x)u = f. \tag{4}$$

Згідно з результатами [9] ФМР $Z := (Z_{kj})_{k,j=1}^N$ системи (4) виражається через фундаментальний розв'язок (ФР) Γ рівняння

$$\det A^0(\partial_t, \partial_x)u = 0 \tag{5}$$

такими формулами:

$$\begin{gathered} Z_{kj}(t,x) = \widehat{A^0}_{kj}(\partial_t, \partial_x)\Gamma(t,x), \\ t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \{k, j\} \subset \{1, \ldots, N\}, \end{gathered} \tag{6}$$

де $\widehat{A^0}_{kj}$ — елемент взаємної матриці $\widehat{A^0}$, тобто алгебраїчне доповнення елемента A^0_{jk} матриці A^0.

Рівняння (5) є $\overrightarrow{2b}$-параболічним рівнянням узагальненого порядку $2br$ за просторовими змінними x і порядку r за часовою змінною t. Властивості його ФР вивчено в [2 – 4]. Зокрема, для Γ справджуються оцінки

$$\begin{gathered} \left|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t,x)\right| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} E_c(t,x), \\ t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, \end{gathered} \tag{7}$$

де $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0}\partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $C_{\overline{\alpha}}$ і c — додатні сталі,

$$E_c(t,x) := \exp\left\{-c\sum_{j=1}^n t^{1-q_j}\left|x_j\right|^{q_j}\right\}, \qquad q_j := 2b_j/(2b_j - 1).$$

З (6), (7) випливають такі оцінки для елементів матриці Z:

$$\left|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} Z_{kj}(t,x)\right| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{-(M+\|\overline{\alpha}\|-s_j-t_k)/(2b)} E_c(t,x),$$
$$t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{n+1}, \quad \{k,j\}\subset\{1,\ldots,N\}. \tag{8}$$

Розглянемо породжений ФР Γ об'ємний потенціал

$$V_h(t,x) := \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t-\tau, x-\xi) h(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}, \tag{9}$$

вважаючи, для простоти, що h — досить гладка і фінітна функція. Використовуючи властивості ФР Γ, одержуємо, що функція V_h є розв'язком рівняння

$$\det A^0(\partial_t, \partial_x) V_h = h. \tag{10}$$

Звідси випливає, що функції

$$u_j(t,x) := \sum_{k=1}^{N} \widehat{A^0}_{kj}(\partial_t,\partial_x) V_{f_k}(t,x), \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}, \quad j\in\{1,\ldots,N\},$$

для довільних досить гладких і фінітних функцій f_k, $k\in\{1,\ldots,N\}$, є компонентами розв'язку системи (4) з $f := \mathrm{col}(f_1,\ldots,f_N)$.

Наведені вище результати є правильними також для модельних систем вигляду

$$A^0(\beta, y, \partial_t, \partial_x) u = f, \tag{11}$$

які одержуються із системи (1), якщо відкинути молодші члени, а коефіцієнти головної частини зафіксувати в точці $(\beta, y)\in\Pi_{[0,T]}$. Зокрема, для ФР $\Gamma(\cdot,\cdot,\beta,y)$ рівняння

$$\det A^0(\beta, y, \partial_t, \partial_x) u = 0$$

та елементів $Z_{kj}(\cdot,\cdot,\beta,y)$ ФМР системи (11) справджуються оцінки (7) і (8), в яких сталі $C_{\overline{\alpha}}$ і c, взагалі кажучи, залежать від точки (β, y). Але на підставі умови A) та умови C), яка буде наведена в п. 5, ці сталі можна вибрати так, щоб вони не залежали від точки $(\beta, y)\in\Pi_{[0,T]}$. Отже, можна вважати правильними такі оцінки:

$$\left|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t,x;\beta,y)\right| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} E_c(t,x),$$
$$t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad (\beta,y)\in\Pi_{[0,T]}, \quad \overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{n+1}. \tag{12}$$

4. Простори функцій. Наведемо означення потрібних просторів Гельдера обмежених і зростаючих функцій. Крім уведених у пп. 1 і 3 позначень будемо використовувати ще й такі: $c_0, a_1, \ldots, a_n$ — задані числа такі, що $0 < c_0 < c$, де c — стала з оцінок (12), $a_j \geq 0$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $T < \min\limits_j (c_0/a_j)^{2b_j-1}$;

$$\vec{a} := (a_1,\ldots,a_n), \qquad \vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1),\ldots,k_n(t,a_n)),$$

де $k_j(t,a_j) := c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{1-q_j}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$;

$$\Psi(t,x) := \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} k_j(t,a_j)\left|x_j\right|^{q_j}\right\}, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]};$$

$$p(x;y) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - y_j \right|^{2/m_j} \right)^{1/2}$$

— $\overrightarrow{2b}$-параболічна відстань між точками x і y із $\mathbb{R}^n$;

$$\Delta_t^{\beta} f(t,\cdot) := f(t,\cdot) - f(\beta,\cdot), \qquad \Delta_x^{y} f(\cdot,x) := f(\cdot,x) - f(\cdot,y)$$

— прирости функції f; l і λ — задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$; $l_j := \left[(l+t_j)/(2b)\right]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Зазначимо [5, с. 97], що $\vec{k}(0,\vec{a}) := \vec{a}$ і

$$E_{c_0}(t-\tau, x-\xi)\Psi(\tau,\xi) \le \Psi(t,x), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Будемо використовувати такі простори:

$H_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ — простір функцій $u\colon \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u$, $\|\overline{\alpha}\| \le l$, і скінченну норму

$$\| u \|_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \langle\langle u \rangle\rangle_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} + \sum_{j=0}^{l} \langle u \rangle_j^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}.$$

Тут

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \langle u \rangle_{l+\lambda,x}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} + \langle u \rangle_{(l+\lambda)/(2b),t}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

$$\langle u \rangle_{(l+\lambda)/(2b),t}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{0 \le l - \|\overline{\alpha}\| < 2b} \langle \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u \rangle_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

$$\langle u \rangle_{l+\lambda,x}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|=l} \langle \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u \rangle_{\lambda,x}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

$$\langle u \rangle_{\lambda,t}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sup_{\substack{\{(t,x),(\beta,x)\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ t \ne \beta}} \left(\left| \Delta_t^{\beta} u(t,x) \right| |t-\beta|^{-\lambda} (\Psi(t,x) + \Psi(\beta,x))^{-1} \right),$$

$$\langle u \rangle_{\lambda,x}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,y)\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ x \ne y}} \left(\left| \Delta_x^{y} u(t,x) \right| (p(x;y))^{-\lambda} (\Psi(t,x) + \Psi(t,y))^{-1} \right),$$

$$\langle u \rangle_j^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x) \in \Pi_{[0,T]}} \left(\left| \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x) \right| (\Psi(t,x))^{-1} \right);$$

$C_{l+\lambda}^{\vec{a}}$ — простір функцій $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких існують неперервні похідні $\partial_x^{\alpha} v$, $\|\alpha\| \le l$, і є скінченною норма

$$| v |_{l+\lambda}^{\vec{a}} := [v]_{l+\lambda}^{\vec{a}} + \sum_{j=0}^{l} \langle v \rangle_j^{\vec{a}},$$

де

$$[v]_{l+\lambda}^{\vec{a}} := \sum_{\|\alpha\|=l} \langle \partial_x^{\alpha} v \rangle_{\lambda,x}^{\vec{a}},$$

$$\langle v \rangle_{\lambda,x}^{\vec{a}} := \sup_{\substack{\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n \\ x \ne y}} \left(\left| \Delta_x^{y} v(x) \right| (p(x;y))^{-\lambda} (\Psi(0,x) + \Psi(0,y))^{-1} \right),$$

$$\langle v\rangle_j^{\vec a} := \sum_{\|\alpha\|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\left|\partial_x^\alpha v(x)\right|(\Psi(0,x))^{-1}\right),$$

$$H_{l+\lambda} := H_{l+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec 0)}, \qquad C_{l+\lambda} := C_{l+\lambda}^{\vec 0}, \qquad \vec 0 := (0,\ldots,0);$$

$\overset{0}{H}{}_{l+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)}$ — підпростір простору $H_{l+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)}$, елементи якого разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулю при $t = 0$;

$\prod_{j=1}^N H_{r_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)}$, $\prod_{j=1}^N \overset{0}{H}{}_{r_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)}$ і $\prod_{j=1}^r C_{r_j}^{\vec a}$ — декартові добутки відповідних просторів з індексами $r_j \in \mathbb{Z}_+$.

5. Зведення загальної початкової задачі до задачі з нульовими початковими даними. Розглянемо загальну початкову задачу (1), (2), припускаючи виконання умов A) і B), а також умов

C) *коефіцієнти диференціальних виразів* A_{kj} *і* B_{sj} *належать відповідно до просторів* $H_{l-s_k+\lambda}$ *і* $C_{l-p_s+\lambda}$, $\{k,j\}\subset\{1,\ldots,N\}$, $s\in\{1,\ldots,r\}$;

D) $f\in\prod_{j=1}^N H_{l-s_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)}$, $\varphi\in\prod_{s=1}^r C_{l-p_s+\lambda}^{\vec a}$.

На підставі твердження 2 з п. 2 та властивостей просторів Гельдера доводиться наступна лема, аналогічна лемі 4.5 із [7].

Лема 1. *Якщо виконуються умови* A) – D), *то функції*

$$\varphi_j^{(\alpha_0)} := \partial_t^{\alpha_0} u_j\Big|_{t=0}, \qquad \alpha_0\in\{0,\ldots,l_j\}, \quad j\in\{1,\ldots,N\}, \tag{14}$$

які знаходяться із системи (1) *та початкової умови* (2), *належать до просторів* $C_{l+t_j-2b\alpha_0+\lambda}^{\vec a}$ *і*

$$\left|\varphi_j^{(\alpha_0)}\right|_{l+t_j-2b\alpha_0+\lambda}^{\vec a} \le C\left(\sum_{j=1}^N \|f_j\|_{l-s_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)} + \sum_{s=1}^r |\varphi_s|_{l-p_s+\lambda}^{\vec a}\right). \tag{15}$$

Зауважимо, що функції (14) однозначно визначаються коефіцієнтами і правими частинами задачі (1), (2).

Лема 2. *Нехай* $\varphi_j^{(\alpha_0)}$ — *функції із леми* 1. *Тоді існують функції* $v_j \in H_{l+t_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)}$, $j\in\{1,\ldots,N\}$, *для яких виконуються початкові умови*

$$\partial_t^{\alpha_0} v_j(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi_j^{(\alpha_0)}(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \quad \alpha_0\in\{0,\ldots,l_j\}, \tag{16}$$

та нерівності

$$\|v_j\|_{l+t_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)} \le C\left(\sum_{j=1}^N \|f_j\|_{l-s_j+\lambda}^{\vec k(\cdot,\vec a)} + \sum_{s=1}^r |\varphi_s|_{l-p_s+\lambda}^{\vec a}\right). \tag{17}$$

Доведення. Функцію v_j можна побудувати як розв'язок задачі Коші з початковими умовами (16) для $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння

$$\left(\partial_t + \sum_{k=1}^n (-1)^{b_k}\partial_{x_k}^{2b_k}\right)^{l_j+1} v_j = 0. \tag{18}$$

Відомо [4, 9, 10], що розв'язок задачі (16), (18) визначається формулою

$$v_j(t,x) = \sum_{\alpha_0=0}^{l_j} \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{(\alpha_0)}(t,x-\xi)\varphi_j^{(\alpha_0)}(\xi)\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

де

$$G_j^{(\alpha_0)}(t,x) := P_j^{(\alpha_0)}(\partial_t,\partial_x)\Gamma_j(t,x), \qquad P_j^{(\alpha_0)}(p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{2b(l_j-\alpha_0)}P_j^{(\alpha_0)}(p,i\sigma),$$

Γ_j — ФР рівняння (18).

З цієї формули та оцінок інтеграла Пуассона, одержаних в [11], випливає оцінка

$$\langle\langle v_j\rangle\rangle_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \le C\sum_{\alpha_0=0}^{l_j}[\varphi_j^{(\alpha_0)}]_{l+t_j-2b\alpha_0+\lambda}^{\vec{a}}, \tag{19}$$

а з неї та початкових умов (16) — оцінка

$$\|v_j\|_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \le C\sum_{\alpha_0=0}^{l_j}\left|\varphi_j^{(\alpha_0)}\right|_{l+t_j-2b\alpha_0+\lambda}^{\vec{a}}. \tag{20}$$

Справді, згідно з означеннями відповідних норм для одержання оцінки (20) досить встановити нерівності

$$\langle v_j\rangle_s^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \le C\sum_{\alpha_0=0}^{l_j}\left|\varphi_j^{(\alpha_0)}\right|_{l+t_j-2b\alpha_0+\lambda}^{\vec{a}}, \qquad s\in\{0,\ldots,l+t_j\}. \tag{21}$$

За допомогою формули Тейлора та умов (16) для $\overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\|\overline{\alpha}\|\le l+t_j$, отримуємо

$$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}v_j(t,x) = \sum_{k=0}^{\beta_0-1}\frac{t^k}{k!}\partial_\tau^k\partial_{\tau,x}^{\overline{\alpha}}v_j(\tau,x)\Big|_{\tau=0} + \frac{1}{(\beta_0-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{\beta_0-1}\partial_\tau^{\beta_0}\partial_{\tau,x}^{\overline{\alpha}}v_j(\tau,x)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\beta_0}\frac{t^k}{k!}\partial_x^{\alpha}\varphi_j^{(k+\alpha_0)}(x) + \frac{1}{(\beta_0-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{\beta_0-1}\Delta_\tau^0\partial_\tau^{\beta_0+\alpha_0}\partial_x^{\alpha}v_j(\tau,x)\,d\tau,$$

де $\beta_0 := \left[(l+t_j-\|\alpha\|)/(2b)\right]-\alpha_0$. Застосувавши для оцінювання приросту $\Delta_\tau^0\partial_\tau^{\beta_0+\alpha_0}\partial_x^{\alpha}v_j$ оцінку (19), з останньої формули одержимо нерівності (21).

З (15) і (20) випливає оцінка (17) і, зокрема, те, що $v_j\in H_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$.

Наступна теорема, яка легко доводиться за допомогою лем 1 і 2, містить один з основних результатів статті.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A) – D) *і* $\varphi_j^{(\alpha_0)}$, v_j *— функції із лем* 1 *та* 2. *Для існування єдиного розв'язку* $u\in\prod_{j=1}^N H_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ *задачі* (1) *і* (2) *необхідно і досить, щоб вектор-функція*

$$w := u - v, \qquad v := (v_1,\ldots,v_N),$$

була єдиним розв'язком із простору $\prod_{j=1}^N \overset{0}{H}{}_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ *системи*

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)w(t,x) = g(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \tag{22}$$

де вектор-функція

$$g(t,x) := f(t,x) - A(t,x,\partial_t,\partial_x)v(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

належить до простору $\prod_{j=1}^N \overset{0}{H}{}_{l-s_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$.

Якщо для w *справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \| w_j \|_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq C \sum_{j=1}^{N} \| g_j \|_{l-s_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}, \tag{23}$$

то для u *є правильною оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \| u_j \|_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq C \left(\sum_{j=1}^{N} \| f_j \|_{l-s_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} + \sum_{s=1}^{r} | \varphi_s |_{l-p_s+\lambda}^{\vec{a}} \right). \tag{24}$$

Означення 2. *Задачу про знаходження розв'язку* $w \in \prod_{j=1}^{N} \overset{0}{H}{}_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ *системи* (22), *в якій* $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{0}{H}{}_{l-s_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, *називатимемо задачею з нульовими початковими даними для параболічної за Солонниковим системи квазіоднорідної структури у просторах Гельдера зростаючих функцій.*

6. Коректна розв'язність початкової задачі в модельному випадку. Розглянемо модельний випадок задачі (1), (2), тобто задачу

$$\begin{gathered} A^0(\partial_t, \partial_x) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \\ B^0(\partial_t, \partial_x) u(t, x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{25}$$

у припущенні, що виконуються умови параболічності та доповняльності.

Теорема 2. *Якщо вектор-функції* f *і* φ *задовольняють умову* D), *то існує єдиний розв'язок* $u \in \prod_{j=1}^{N} H_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ *задачі* (25), *для якого справджується оцінка* (24).

Доведення. Згідно з теоремою 1 досить довести існування єдиного розв'язку $w \in \prod_{j=1}^{N} \overset{0}{H}{}_{l+t_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ системи

$$A^0(\partial_t, \partial_x) w(t, x) = g(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{26}$$

який задовольняє нерівність (23), у припущенні, що $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{0}{H}{}_{l-s_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$.

Згідно з викладеним у п. 3 компоненти розв'язку системи (26) з досить гладкою і фінітною вектор-функцією g визначаються формулами

$$w_j(t, x) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{A^0}_{jk}(\partial_t, \partial_x) V_{g_k}(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{27}$$

де V_h — об'ємний потенціал (9). Для функції h, яка визначена в $\Pi_{[0,T]}$ і дорівнює нулю при $t = 0$, він набуває вигляду

$$V_h(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t - \tau, x - \xi) h(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{28}$$

Формули (27) визначають потрібний розв'язок системи (26), причому єдиний, і у випадку, коли $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{0}{H}{}_{l-s_j+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$. Щоб у цьому переконатися, досить довести, що функція (28) є єдиним розв'язком $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння (10) з $h \in H_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, який належить до простору $\overset{0}{H}{}_{s+2br+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ і для якого є правильною оцінка

$$\| V_h \|_{s+2br+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq C \| h \|_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}. \tag{29}$$

Доведення того, що для $h \in H_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ функція V_h є розв'язком рівняння (10), аналогічне доведенню відповідного твердження для $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння першого порядку відносно змінної t у [5].

Доведемо правильність оцінки (29). У праці [11] встановлено оцінку

$$\langle\langle V_h\rangle\rangle_{s+2br+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \le C\langle\langle h\rangle\rangle_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}.$$

Ще слід довести, що

$$\langle V_h\rangle_j^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \le C\| h\|_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}, \quad j\in\{0,\ldots,s+2br\},$$

а для цього досить встановити нерівності

$$\left|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} V_h(t,x)\right| \le C\| h\|_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x), \qquad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \quad \|\overline{\alpha}\| \le s+2br. \tag{30}$$

Оскільки $\partial_{t,x}^{\overline{\beta}} V_h = V_{\partial_{t,x}^{\overline{\beta}} h}$, $\|\overline{\beta}\| \le s$, то доведення нерівностей (30) зводиться до доведення таких же нерівностей при $s = 0$.

Якщо $\|\overline{\alpha}\| < 2br$, то

$$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} V_h(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t-\tau,x-\xi)h(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}.$$

Звідси за допомогою нерівностей (7) і (13) одержуємо

$$\left|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} V_h(t,x)\right| \le C\langle h\rangle_0^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}\big(E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)\big)\times$$

$$\times\, E_{c-c_0}(t-\tau,x-\xi)\,d\xi \le C\langle h\rangle_0^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x)\int_0^t (t-\tau)^{r-1-\|\overline{\alpha}\|/(2b)}d\tau\,\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{1-M/(2b)}E_{c-c_0}(t-\tau,x-\xi)\,d\xi =$$

$$= C\langle h\rangle_0^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x)t^{r-\|\overline{\alpha}\|/(2b)} \le C\| h\|_\lambda^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}.$$

При $\|\overline{\alpha}\| = 2br$ правильним є зображення

$$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} V_h(t,x) = \delta_{\alpha_0 r}h(t,x) + \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t-\tau,x-\xi)\Delta_\xi^x h(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

де $\delta_{\alpha_0 r}$ — символ Кронекера. Використовуючи цю формулу, нерівності (7) і (13), а також нерівність

$$\big(p(x;\xi)\big)^\lambda E_c(t,x-\xi) \le Ct^{\lambda/(2b)}E_{c'}(t,x-\xi), \qquad t>0, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де $c_0 < c' < c$, маємо

$$\left|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} V_h(t,x)\right| \le \langle h\rangle_0^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x) + C\langle h\rangle_{\lambda,x}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M/(2b)}\big(p(x;\xi)\big)^\lambda\times$$

$$\times\,\big(\Psi(\tau,\xi)+\Psi(\tau,x)\big)E_c(t-\tau,x-\xi)\,d\xi \le \langle h\rangle_0^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x) + C\langle h\rangle_{\lambda,x}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\times$$

$$\times \int_0^t (t-\tau)^{-1+\lambda/(2b)}d\tau\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{1-M/(2b)}\big(E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)+\Psi(t,x)\big)\times$$

$$\times\ E_{c'-c_0}(t-\tau, x-\xi)d\xi \ \le\ C\|h\|_{\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\left(1+\int_0^t (t-\tau)^{-1+\lambda/(2b)}d\tau\right)\Psi(t,x) \ \le$$

$$\le\ C\|h\|_{\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\Psi(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}.$$

З одержаних оцінок випливає виконання нерівностей (30) $s = 0$ і, отже, для довільного s.

Для доведення єдиності розв'язку рівняння (10) у просторі $\overset{0}{H}{}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{s+2br+\lambda}$ можна скористатися формулою (20) із [4] для розв'язків задачі Коші для загального $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння. Ця формула одержана в [4] для досить гладких і фінітних розв'язків. Але якщо детально прослідкувати її вивід, то можна переконатися, що вона є правильною і для розв'язків із відповідних просторів типу $H^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+\lambda}$. Застосування вказаної формули до розв'язку рівняння (10) із простору $\overset{0}{H}{}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{s+2br+\lambda}$ приводить до його зображення у вигляді (28), а звідси випливає, що розв'язок V_h із (28) єдиний.

Зауваження. Теорема, аналогічна теоремі 2, є правильною і для загальної початкової задачі (1), (2), якщо виконано умови A) – D). Доведення такої теореми, додатково до наведених вище результатів, потребує ще побудови та детального дослідження властивостей регуляризатора відповідної задачі з нульовими початковими даними. Цим питанням будуть присвячені наступні публікації.

1. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1 – 72.
2. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
3. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. сем. по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
4. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – **14**, № 1. – С. 73 – 84.
5. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
6. *Солонников В. А.* О краевых задачах для общих параболических систем // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 56 – 59.
7. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. *Івасюк Г. П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 269. – С. 49 – 52.
10. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
11. *Івасюк Г. П.* Про властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 288. – С. 51 – 56.

Одержано 16.06.2006