УДК 517.98

В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СПЕКТРАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ СІМЕЙ ЛІНІЙНО ПОВ'ЯЗАНИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ІЗ ЗАДАНИМИ СПЕКТРАМИ, ЩО АСОЦІЙОВАНІ З РОЗШИРЕНИМИ ГРАФАМИ ДИНКІНА

We prove spectral theorems for families of linearly connected self-adjoint operators with prescribed special spectra associated with extended Dynkin graphs. We establish the finite dimensionality of all irreducible families of linearly connected operators with arbitrary spectra associated with extended Dynkin graphs.

Доведено спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спеціальними спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна. Встановлено скінченновимірність усіх незвідних сімей лінійно пов'язаних операторів із довільними спектрами, асоційованих із розширеними графами Динкіна.

Вступ. 1. Спектральні теореми для сімей операторів, пов'язаних тими чи іншими співвідношеннями, надзвичайно корисні в математиці та її застосуваннях. Цю думку неодноразово висловлював Я. Б. Лопатинський (див., наприклад, [1]). Протягом багатьох років він читав студентам і співробітникам курси з теорії зображень груп, алгебр Лі та ін.

2. Схема застосування таких теорем добре відпрацьована на симетрійних методах природознавства: пов'язати з операторним формулюванням задачі відповідну алгебру, дослідити й описати її незвідні інволютивні зображення і застосувати відповідні спектральні теореми про розклад довільного зображення на незвідні (див., наприклад, роботу [2] та наведену в ній бібліографію). Ряд робіт, зокрема, українських математиків присвячено вивченню різноманітних задач теорії операторів за допомогою дослідження структури відповідної алгебри та її інволютивних зображень.

3. У цій статті доведено спектральні теореми для сімей обмежених самоспряжених операторів $A_1, \ldots, A_n$ у гільбертовому просторі H із заданими спектрами $\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)$, що пов'язані лінійним співвідношенням $\sum A_k = \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, I — одиничний оператор в H). Такі сім'ї операторів природно виникають у зв'язку з різними задачами математики: проблемою Хорна та її варіаціями [3, 4], деформованими препроективними алгебрами [5], локально скалярними зображеннями графів [6], сингулярними інтегральними операторами [7] та ін.

Виявилось, що складність опису таких незвідних сімей операторів (тобто таких сімей, що слабке замикання лінійної оболонки операторів $A_1, \ldots, A_n$ містить всі обмежені оператори в H) істотно залежить від кількості операторів $A_1, \ldots, A_n$ та кількості точок у спектрі $\sigma(A_k)$ оператора A_k, $k = 1, \ldots, n$.

4. При вивченні сім'ї самоспряжених операторів із заданими спектрами, для яких $A_1 + \ldots + A_n = \lambda I$, можна вважати, що $\lambda > 0$ та

$$\sigma(A_l) \subset M_l = \left\{0 = \alpha_0^{(l)} < \alpha_1^{(l)} < \ldots < \alpha_{k_l}^{(l)}\right\}, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Розглянемо зірчастий граф Γ, тобто зв'язний неорієнтований граф без петель та кратних ребер, який має n гілок, причому l-та гілка має $k_l + 1$, $l = 1, \ldots, n$, вершину і всі гілки з'єднані в єдиній кореневій вершині. Ставлячи у відповідність вершинам l-ї гілки, починаючи з крайньої (не рахуючи кореневу вершину), додатні числа $(\alpha_j^{(l)})_{j=1}^{k_l}$, в кореневій вершині покладаючи її рівною λ, одержуємо функцію

$$\chi = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{k_1}^{(1)}; \ldots; \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_{k_n}^{(n)}; \lambda) \tag{2}$$

на множині вершин графа Γ (далі такі функції будемо називати *вагами* на графі Γ).

За графом Γ та вагою χ на Γ введемо $*$-алгебру

$$\mathcal{A}_{\Gamma,\chi} = \mathbb{C}\left\langle a_l = a_l^*,\ l = 1,\ldots,n \;\middle|\; p_l(a_l) = 0,\ l = 1,\ldots,n;\ \sum_{l=1}^{n} a_l = \lambda e \right\rangle,$$

де $p_l(x) = x(x-\alpha_1^{(l)})\ldots(x-\alpha_{k_l}^{(l)})$, $k = 1,\ldots,n$. Тоді сім'я $A_1,\ldots,A_n$ є $*$-зображенням алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$.

Зауважимо, що алгебри, які відповідають пропорційним вагам χ_1, χ_2, тобто $\chi_1 = \alpha\chi_2$ для деякого $\alpha > 0$, є $*$-ізоморфними. Таким чином, з точки зору зображень $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$ такі ваги еквівалентні.

5. У роботі [8] доведено, що алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$, асоційовані з графами Динкіна, скінченновимірні незалежно від вибору ваги χ. Отже, кожне незвідне $*$-зображення алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$ скінченновимірне, і вона має скінченну кількість незвідних нееквівалентних $*$-зображень незалежно від вибору ваги χ. Результати про опис незвідних $*$-зображень для лінійно пов'язаних операторів із заданими спектрами у випадку, коли Γ є простим графом Динкіна A_n, $n \geq 1$, D_n, $n \geq 4$, E_6, E_7, E_8, наведено в [6, 4, 9].

6. У цій роботі розглядається випадок, коли Γ — простий розширений граф Динкіна $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$.

У пп. 3, 4 для спеціального вибору множин M_l, $l = 1,\ldots,n$ (див. п. 2), асоційованих із простим розширеним графом Динкіна Γ, наведено: а) опис множини Σ_Γ тих λ, для яких існують такі сім'ї операторів; б) опис незвідних сімей для $\lambda \in \Sigma_\Gamma$.

У п. 6 доведено, що незалежно від вибору ваги χ існують лише скінченновимірні незвідні набори операторів зображення $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$, проте нееквівалентних зображень може бути нескінченно багато і їх розмірності, взагалі кажучи, не є обмеженими (див. також [10]).

7. Для всіх інших зірчастих графів можна вказати таки ваги χ, для яких існують набори операторів, що задають нескінченновимірні незвідні зображення алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$ [11].

Таким чином, такі об'єкти, пов'язані з графами Динкіна, є аналогами скінченних груп, пов'язані із розширеними графами Динкіна — аналогами компактних груп, а пов'язані з іншими графами мають властивості, характерні для некомпактних груп.

1. Функтори Кокстера. Нагадаємо конструкцію функторів Кокстера [12, 13, 4], які істотно використовуються в подальшому.

1. Розглянемо невід'ємний самоспряжений оператор $A = 0\cdot P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_m P_m$ зі скінченним спектром $\sigma(A) \subset \{0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m\}$ (деякі з спектральних проекторів можуть бути нульовими). Відображення $A \mapsto \tilde{A} =$ $= \alpha_m I - A$ переводить A в невід'ємний оператор $\tilde{A}$ зі спектром $\sigma(\tilde{A}) \subset$ $\subset \{0 = \tilde{\alpha}_0 < \tilde{\alpha}_1 < \ldots < \tilde{\alpha}_m\}$, де $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_m - \alpha_m = 0$, $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_m - \alpha_{m-1}$, … …, $\tilde{\alpha}_{m-1} = \alpha_m - \alpha_1$, $\tilde{\alpha}_m = \alpha_m$.

Нехай

$$A_i = \sum_{k=0}^{m_i} \alpha_k^{(i)} P_k^{(i)}, \qquad 0 = \alpha_0^{(i)} < \ldots < \alpha_{m_i}^{(i)}, \quad i = 1,\ldots,d,$$

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = \lambda I, \quad \lambda \geq 0.$$

Очевидно, для операторів $\tilde{A}_i$

$$\sum_{i=1}^{d} \tilde{A}_i = \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_{m_i}^{(i)} - \lambda \right) I.$$

Таким чином, маємо відображення з множини зображень алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$ у множину зображень алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\tilde{\chi}}$, де χ визначається набором чисел $\alpha_k^{(i)}$, λ, а $\tilde{\chi}$ — числами $\tilde{\alpha}_k^{(i)}$, $k = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, d$, та $\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{m_i}^{(i)} - \lambda$. Це відображення будемо позначати S та називатимемо лінійним відображенням. Застосувавши лінійне відображення двічі, одержимо початкові оператори.

2. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ — проектори в гільбертовому просторі H, для яких $\sum \alpha_k P_k = \lambda I$ для деяких додатних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, λ. Побудуємо інший гільбертів простір $\hat{H}$ та набір проекторів $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n$, $\hat{P}$ в $\hat{H}$, для яких $\sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k = I$ та $\hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k = \dfrac{\alpha_k}{\lambda} \hat{P}_k$, таким чином.

Нехай $\sum \alpha_k P_k = \lambda I$, $\lambda > 0$. Покладемо $H_k = \operatorname{Im} P_k$ та нехай $O_k \colon H_k \to \hat{H}$ — відповідне вкладення, тобто $O_k O_k^* = P_k$ та $O_k^* O_k = I_{H_k}$; задамо $\hat{H} = \bigoplus_{k=1}^{n} H_k$. Розглянемо оператор

$$O = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\, O_1^* \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_n}\, O_n^* \end{pmatrix} : H \to \hat{H},$$

тоді

$$O^* : \hat{H} \to H, \quad O^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\sqrt{\alpha_1}\, O_1 \ \ldots \ \sqrt{\alpha_n}\, O_n \right)$$

і

$$O^* O = \lambda^{-1} \sum \alpha_k O_k O_k^* = \lambda^{-1} \sum \alpha_k P_k = I,$$

тобто $O : H \to \hat{H}$ є ізометричним вкладенням.

Нехай $\hat{P} = OO^*$, тоді $\operatorname{Im} \hat{P} = H$, і, крім того, нехай $\hat{P}_j$ — проектори на ортогональні підпростори H_j в $\hat{H}$, тоді $\sum \hat{P}_j = I$ і $\hat{P}_j \hat{P} \hat{P}_j = \dfrac{\alpha_j}{\lambda} \hat{P}_j$. Зауважимо, що з останньої рівності випливає, що $\hat{P}_k = 0$ і, отже, $P_k = 0$ для тих k, для яких $\alpha_k > \lambda$.

3. Наведена процедура може бути оберненою. Справді, нехай $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n$, $\hat{P}$ — проектори в деякому гільбертовому просторі $\hat{H}$, для яких $\sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k = I$ і для деяких $\alpha_k > 0$, $\lambda > 0$ маємо $\hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k = \dfrac{\alpha_j}{\lambda} P_k$ для всіх $k = 1, \ldots, n$. Опишемо відповідну процедуру.

Задамо $H = \operatorname{Im} \hat{P}$ і нехай $O \colon H \to \hat{H}$ — відповідний оператор вкладення. Тоді $O^* O = I_H$, $OO^* = \hat{P}$. Задамо $P_k = \dfrac{\lambda}{\alpha_k} O^* \hat{P}_k O$, $k = 1, \ldots, n$. Тоді

$$P_k^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2} O^* \hat{P}_k O O^* \hat{P}_k O = \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2} O^* \hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k O = \frac{\lambda}{\alpha_k} O^* \hat{P}_k O = P_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k = \lambda O^* \sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k O = \lambda I.$$

Застосувавши послідовно вказані процедури, одержимо набір проекторів, унітарно еквівалентний початковому набору.

4. Нехай проектори $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n, \hat{P}$ в $\hat{H}$ задовольняють умову $\sum_{k=1}^{n} \hat{P}_k = I$, $\hat{P}_k \hat{P} \hat{P}_k = \frac{\alpha_k}{\lambda} \hat{P}_k$. Переходячи від $\hat{P}$ до проектора $\hat{P}' = I - \hat{P}$, маємо $\hat{P}_k \hat{P}' \hat{P}_k = \frac{\lambda - \alpha_k}{\lambda} \hat{P}_k$ для всіх $k = 1, \ldots, n$.

Таким чином, якщо взяти набір проекторів $P_1, \ldots, P_n$, для яких $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k = \lambda I$, побудувати відповідну сім'ю операторів $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n, \hat{P}$, потім перейти до $\hat{P}' = I - \hat{P}$, і, насамкінець, виконати обернену процедуру, одержимо набір проекторів $P_1', \ldots, P'$, у деякому гільбертовому просторі H', для яких

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda - \alpha_k) P_k' = \lambda I.$$

5. Безпосередньо з наведеної конструкції випливає, що $P_j \perp P_k$ тоді і тільки тоді, коли для відповідних проекторів $\hat{P}_j \hat{P} \hat{P}_k = 0$. Отже, $P_k' \perp P_j'$ для деяких j, k тоді і лише тоді, коли $P_k \perp P_j$.

6. Як підсумок, маємо відображення з множини зображень алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$ у множину зображень $\mathcal{A}_{\Gamma,\hat{\chi}}$, де χ визначається набором чисел $\alpha_k^{(i)}$, λ, а $\hat{\chi}$ — набором чисел $\hat{\alpha}_k^{(i)}$, λ, де $\hat{\alpha}_1^{(i)} = \lambda - \alpha_{m_i}^{(i)}, \ldots, \hat{\alpha}_{m_i}^{(i)} = \lambda - \alpha_1^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$. Це відображення будемо позначати T та називати гіперболічним відбиттям.

У роботі [13] доведено, що *відображення S та T є функторами з категорії* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}_{\Gamma,\chi})$ *відповідно в категорії* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}_{\Gamma,\tilde{\chi}})$ *та* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}_{\Gamma,\hat{\chi}})$, *де* $\tilde{\chi}$ *та* $\hat{\chi}$ *визначено вище. Квадрат кожного з цих функторів є тотожним функтором в* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}_{\Gamma,\chi})$.

7. Для заданого графа Γ функтори S та T задають дію на множині ваг: $S: \chi \mapsto \tilde{\chi}$, $T: \chi \mapsto \hat{\chi}$, яку будемо позначати тими ж літерами.

2. Спеціальні ваги на розширених графах Динкіна. Застосуємо техніку функторів Кокстера до вивчення зображень $*$-алгебр, пов'язаних із розширеними графами Динкіна. Методика дослідження полягає в тому, що вивчаються зображення для тих ваг, для яких це зробити нескладно, а потім функтори T, S застосовуються для одержання зображення у випадку більш складних ваг. Таким чином, виникає задача вивчення еволюції ваг під дією відображень T, S. Нерухомі точки таких відображень описуються наступним відомим твердженням.

Твердження 1. *Нехай Γ — розширений граф Динкіна, χ — вага на Γ, інваріантна відносно відображень T, S. Тоді $\chi = \alpha\chi_\Gamma$, $\alpha > 0$, де χ_Γ має вигляд*

$$\chi_{\tilde{D}_4} = (1;1;1;1;2), \qquad \chi_{\tilde{E}_6} = (1,2;1,2;1,2;3),$$

$$\chi_{\tilde{E}_7} = (1,2,3;1,2,3;2;3), \qquad \chi_{\tilde{E}_8} = (1,2,3,4,5;2,4;3;6).$$

Зауважимо, що для інваріантних ваг техніка функторів Кокстера не дає відповіді на питання про структуру всіх зображень алгебри.

З точки зору задачі про структуру операторів із фіксованими спектрами, сума яких є скаляром, найбільш цікавими є ваги, у яких при дії певної комбінації відображень T, S змінюється лише останній коефіцієнт. Це означає, що спектри операторів залишаються незмінними, а сума операторів є (іншим) скаляром.

Позначимо через $\chi_{\Gamma,\lambda}$ вагу, коефіцієнти якої у зображенні (2) збігаються з коефіцієнтами χ_Γ, крім останнього, який покладемо рівним λ.

Твердження 2. *Нехай* Γ *— розширений граф Динкіна. Тоді* $(TS)^m\chi_{\Gamma,\lambda} = \alpha\chi_{\Gamma,\lambda'}$, *де* $m = 1$ *для* $\Gamma = \tilde{D}_4$, $m = 2$ *для* $\Gamma = \tilde{E}_6$, $m = 3$ *для* $\Gamma = \tilde{E}_7$, $m = 5$ *для* $\Gamma = \tilde{E}_8$, α, λ' *— деякі числа, що залежать від графа* Γ *та* λ.

Якщо для ваги у вигляді (2) *всі, крім останнього, коефіцієнти ваги* $(TS)^m\chi$ *пропорційні коефіцієнтам* χ *для всіх* λ, *то* $\chi = \alpha\chi_{\Gamma,\lambda}$ *для деяких* α, λ.

Твердження випливає з наступної леми.

Лема 1. *Нехай* Γ *— розширений граф Динкіна. Тоді для довільного* $k \in \mathbb{N}$ *та для довільної ваги* χ *маємо*

$$(TS)^{\omega_\Gamma(\omega_\Gamma - 1)k}\chi = \chi - \omega_\Gamma k(\omega_\Gamma - \lambda)\chi_\Gamma,$$

де ω_Γ *дорівнює* 2, 3, 4 *та* 6 *для* Γ, *рівного* $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ *та* $\tilde{E}_8$ *відповідно.*

Доведення. Для ваги χ на розширеному графі Динкіна Γ визначимо $\omega_\Gamma(\chi)$ таким чином:

$$\omega_{\tilde{D}_4}(a; b; c; d; \lambda) = \frac{1}{2}(a + b + c + d),$$

$$\omega_{\tilde{E}_6}(a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; \lambda) = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2),$$

$$\omega_{\tilde{E}_7}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c; \lambda) = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + 2c),$$

$$\omega_{\tilde{E}_8}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b_1, b_2; c; \lambda) = \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 2b_1 + 2b_2 + 3c).$$

Дотримуючись [10], пронормуємо вагу χ так, щоб $\omega_\Gamma(\chi) = \omega_\Gamma$. Тоді χ можна подати у вигляді $\chi = \chi_\Gamma + \tilde{\chi}$, де $\tilde{\chi}$ — (не обов'язково додатна) вага на Γ, для якої $\omega_\Gamma(\tilde{\chi}) = 0$. Також запишемо λ у вигляді $\lambda = \omega_\Gamma - \gamma$. Тоді твердження леми перевіряється безпосередніми обчисленнями.

3. Структура множин Σ_Γ, де Γ — розширений граф Динкіна. Нехай Γ — простий розширений граф Динкіна. Введемо множину $\Sigma_\Gamma \subset \mathbb{R}$, що складається з тих λ, для яких існує зображення алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi_{\Gamma,\lambda}}$; ваги $\chi_{\Gamma,\lambda}$ визначено в попередньому пункті.

Результати щодо структури множин Σ_Γ анонсовано в роботі [14]. Наведемо детальні доведення цих фактів.

3.1. Набори операторів, пов'язані з графом $\tilde{D}_4$.

Теорема 1. *Множина* $\Sigma_{\tilde{D}_4}$ *тих* λ, *для яких існують ортопроектори* P_i, $i = 1, \ldots, 4$, *такі, що* $\sum_{i=1}^4 P_i = \lambda I$, *має вигляд*

$$\Sigma_{\tilde{D}_4} = \left\{ 2 \pm \frac{1}{k+s} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots;\; s \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \right\} \cup \{2\}.$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що $\Sigma_{\tilde{D}_4} \subset [0,4]$. Відображення S переводить набір проекторів, що відповідає λ, в набір, що відповідає $4-\lambda$. Отже, множина $\Sigma_{\tilde{D}_4} \subset [0,4]$ симетрична відносно точки 2. Таким чином, залишається вивчити $\Sigma_{\tilde{D}_4} \cap [0,2]$.

Розглянемо спочатку одновимірні зображення, тобто набори чисел p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \{0,1\}$, для яких $p_1+p_2+p_3+p_4 = \lambda \in [0,2]$. Очевидно, такі розв'язки існують при $\lambda \in \{0,1,2\}$.

Оскільки відображення TS, згідно з твердженням 2, переводить зображення, що відповідає вазі $\chi_{\tilde{D}_4,\lambda}$, в зображення, що відповідає вазі $\chi_{\tilde{D}_4,\lambda'}$, множина $\Sigma_{\tilde{D}_4}$ містить також точки, що є образами під дією TS на $\chi_{\tilde{D}_4,0}$, $\chi_{\tilde{D}_4,1}$, $\chi_{\tilde{D}_4,2}$. Для ваги $\chi_{\tilde{D}_4,0}$ одержимо послідовність $\left\{1+\frac{2k-1}{2k+1},\ k=0,1,\dots\right\}$, для ваги $\chi_{\tilde{D}_4,1}$ — послідовність $\left\{1+\frac{2k}{2k+2},\ k=0,1,\dots\right\}$, а вага $\chi_{\tilde{D}_4,2}$ інваріантна відносно дії TS. Таким чином, всі точки, вказані в теоремі, належать $\Sigma_{\tilde{D}_4}$.

Залишилось довести, що $\Sigma_{\tilde{D}_4}$ не містить інших точок.

Лема 2. *Нехай $P_1,\dots,P_n$ — ортопроектори, для яких $\sum_{k=1}^n \alpha_k P_k = \lambda I$ при деяких додатних $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ та деякому $\lambda \geq 0$. Тоді $P_j = 0$ для всіх j, для яких $\alpha_j > \lambda$.*

Доведення. Справді, нехай $\alpha_j > \lambda$. Помножимо рівність $\sum_{k\neq j}\alpha_k P_k = \lambda I - \alpha_j P_j$ на P_j зліва і справа, тоді $\sum_{k\neq j}\alpha_k P_j P_k P_j = (\lambda-\alpha_j)P_j$. Ліва частина рівності є невід'ємним оператором, а права — недодатним, отже, $P_j = 0$.

З наведеної леми безпосередньо випливає, що $\Sigma_{\tilde{D}_4}$ не має точок на $(0, 1)$.

Покажемо, що відрізок $(1, 4/3)$ не містить точок $\Sigma_{\tilde{D}_4}$. Справді, діючи відображенням T, ми б одержали зображення, що відповідає вазі $\chi_{\tilde{D}_4,\frac{\lambda}{\lambda-1}}$, але $\frac{\lambda}{\lambda-1} > 4$ при $\lambda \in (1, 4/3)$. Для завершення доведення теореми зауважимо, що образи відрізка $[0, 4/3]$ (який містить лише точки 0, 1, $4/3$) під дією степенів відображення TS покривають увесь відрізок $[0,2)$.

3.2. Набори операторів, пов'язані з графом $\tilde{E}_6$.

Теорема 2. *Множина $\Sigma_{\tilde{E}_6}$ тих λ, для яких існують самоспряжені оператори A_1, A_2, A_3, для яких $\sigma(A_i) \subset \{0,1,2\}$, $i = 1,2,3$, та виконується рівність $A_1+A_2+A_3 = \lambda I$, має вигляд*

$$\Sigma_{\tilde{E}_6} = \left\{3 \pm \frac{1}{k+s}\ \middle|\ k=0,1,\dots;\ s \in \left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}\right\} \cup \{3\}.$$

Доведення. Оскільки для операторів A_1, A_2, A_3 виконується умова $\sigma(A_j) \subset \{0,1,2\}$, $\|A_j\| \leq 2$, маємо оцінку $\Sigma_{\tilde{E}_6} \subset [0,6]$. Відображення S встановлює симетричність $\Sigma_{\tilde{E}_6}$ відносно точки 3. Таким чином, досить дослідити $\Sigma_{\tilde{E}_6} \cap [0,3]$.

При $\lambda \in (0,1)$ за лемою 2 зображень немає.

S відображує $\lambda \in (0,1)$ в $\lambda \in (5,6)$, а $(TS)^2$ — $\lambda \in (5,6)$ в $\lambda \in (1, 3/2)$.

Звідси випливає, що $\Sigma_{\tilde{E}_6} \bigcap (1, 3/2) = \varnothing$.

Аналогічно, S відображує $\lambda \in (3/2, 2)$ в $\lambda \in (4, 9/2)$, а $(TS)^2$ — цю множину в $\lambda \in (-\infty, 0)$, для якої розв'язків немає. Отже, $\Sigma_{\tilde{E}_6} \bigcap (3/2, 2) = \varnothing$.

Насамкінець, S відображує $\lambda \in (2, 9/4)$ в $\lambda \in (15/4, 4)$, а $(TS)^2$ — цю множину в $\lambda \in (6, \infty)$, для якої розв'язків немає. Таким чином, $\Sigma_{\tilde{E}_6} \bigcap (2, 9/4) = \varnothing$.

Підсумовуючи, маємо

$$(TS)^2 : (\chi_6, 0) \mapsto \left(\chi_6, \frac{9}{4}\right) \quad \text{і} \quad \Sigma_{\tilde{E}_6} \bigcap \left[0, \frac{9}{4}\right) = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}.$$

Покажемо, що для перелічених значень λ розв'язки існують.

Одновимірні зображення — це трійки чисел a_1, a_2, $a_3 \subset \{0, 1, 2\}$, для яких $a_1 + a_2 + a_3 = \lambda$. На відрізку $[0, 3]$ такі зображення існують при $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$.

При $\lambda = 3/2$ зображення також існують. Справді, потрібно показати, що існують проектори P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2, для яких

$$P_1 + 2P_2 + Q_1 + 2Q_2 + R_1 + 2R_2 = \frac{3}{2} I,$$

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = R_1 R_2 = R_2 R_1 = 0.$$

За лемою 2 маємо $P_2 = Q_2 = R_2 = 0$, і задача зводиться до вигляду $P_1 + Q_1 + R_1 = \frac{3}{2} I$. Безпосередньо перевіряється, що розв'язками останнього рівняння є проектори

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки образи відрізка $[0, 9/4)$ під дією степенів $(TS)^2$ покривають увесь відрізок $[0, 3)$, робимо висновок, що $\Sigma_{\tilde{E}_6} \bigcap [0, 3)$ складається з образів множини $\{1, 1, 3/2, 2\}$ під дією відображення $\lambda \mapsto 2 + \frac{1}{4 - \lambda}$.

Теорему 2 доведено.

3.3. Набори операторів, пов'язані з графом $\tilde{E}_7$.

Теорема 3. *Множина $\Sigma_{\tilde{E}_7}$ тих λ, для яких існують самоспряжені оператори A_1, A_2, A_3, для яких $\sigma(A_1)$, $\sigma(A_2) \subset \{0, 1, 2, 3\}$, $\sigma(A_3) \subset \{0, 2\}$ та виконується умова $A_1 + A_2 + A_3 = \lambda I$, має вигляд*

$$\Sigma_{\tilde{E}_7} = \left\{ 4 \pm \frac{1}{k + s} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots;\ s \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1 \right\} \right\} \bigcup \{4\}.$$

Доведення. Як і при доведенні попередньої теореми, маємо $\Sigma_{\tilde{E}_7} \subset [0, 8]$, і ця множина симетрична відносно 4. Розглянемо структуру $\Sigma_{\tilde{E}_7} \bigcap [0, 4]$.

При $\lambda = 4$ існують одновимірні зображення, а відрізок $[0, 4)$ покривається образами відрізка $[0, 16/5)$ під дією відображення $\lambda \mapsto 2 + \frac{1}{5 - \lambda}$, яке породжується дією $(TS)^3$. Таким чином, потрібно дослідити структуру $\Sigma_{\tilde{E}_7} \bigcap$ $\bigcap [0, 16/5)$.

Як і раніше, $\Sigma_{\tilde{E}_7} \bigcap (0, 1) = \varnothing$. Міркування будемо проводити для відрізка $(1, 2)$. Оскільки $\lambda < 2$, для проекторів P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, для яких

$$P_1 + 2P_2 + 3P_3 + Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 + 2R_1 = \lambda I, \tag{3}$$

за лемою 2 маємо $P_2 = P_3 = Q_2 = Q_3 = R_1 = 0$, тому задача зводиться до опису пар $P_1 + Q_1 = \lambda I$. Але це можливо лише при $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Отже, $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap \cap (1, 2) = \varnothing$.

Застосовуючи S та $(TS)^3$ до $\lambda \in (0, 1) \cup (1, 2)$, приходимо до висновку, що $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap (5/2, 8/3) = \varnothing$ та $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap (2, 5/2) = \varnothing$.

S відображує $\lambda \in (8/3, 3)$ в $\lambda \in (5, 16/3)$, а $(TS)^3$ — в $\lambda \in (-\infty, 0)$, для яких розв'язків не існує. Отже, $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap (8/3, 3) = \varnothing$.

Аналогічно, S відображує $\lambda \in (3, 16/5)$ в $\lambda \in (24/5, 5)$, а $(TS)^3$ — в $\lambda \in (8, \infty)$, для яких розв'язків не існує. Таким чином, $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap (3, 16/5) = \varnothing$.

Отже, ми показали, що $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap [0, 16/5) \subset \{0, 1, 2, 5/2, 8/3, 3\}$.

У точках 0, 1, 2, 3 існують одновимірні зображення, які легко підрахувати.

При $\lambda = 5/2$ і $\lambda = 8/3$, оскільки $\lambda < 3$, маємо $P_3 = Q_3 = 0$ у співвідношенні (3), отже, умова зводиться до $P_1 + 2P_2 + Q_1 + 2Q_2 + 2R_1 = \lambda I$. При $\lambda = 5/2$, застосовуючи відображення $S(TS)^3$ до $\chi = (1, 2; 1, 2; 2; 5/2)$, одержуємо вагу $(1, 2; 1, 2; 2; 1)$, яка на підставі того, що $1 < 2$, приводить до співвідношення $P_1' + Q_1' = I$, яке має два одновимірні незвідні зображення.

При $\lambda = 8/3$, застосовуючи те ж відображення до $(1, 2; 1, 2; 2; 8/3)$, знаходимо вагу $(1, 2; 1, 2; 2; 0)$, для якої відповідне рівняння має єдине тривіальне зображення.

Таким чином, множину $\Sigma_{\tilde{E}_7} \cap [0, 4)$ можна отримати як образ множини $\{0, 1, 2, 5/2, 8/3, 3\}$ при ітераціях відображення $\lambda \mapsto 3 + \dfrac{1}{5 - \lambda}$, що породжується дією функтора $(TS)^3$.

Теорему 3 доведено.

3.4. Набори операторів, пов'язані з графом $\tilde{E}_8$.

Теорема 4. *Множина $\Sigma_{\tilde{E}_8}$ тих λ, для яких існують самоспряжені оператори A_1, A_2, A_3, для яких $\sigma(A_1) \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\sigma(A_2) \subset \{0, 2, 4\}$, $\sigma(A_3) \subset \{0, 3\}$ та виконується умова $A_1 + A_2 + A_3 = \lambda I$, має вигляд*

$$\Sigma_{\tilde{E}_8} = \left\{ 6 \pm \frac{1}{k+s} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots;\ s \in \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1 \right\} \right\} \cup \{6\}.$$

Доведення. Як і раніше, одержуємо, що $\Sigma_{\tilde{E}_8} \subset [0, 12]$ та множина $\Sigma_{\tilde{E}_8}$ симетрична відносно точки 6. У точці $\lambda = 6$ існують зображення (наприклад, одновимірні). Структура множини $\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap [0, 6)$ визначається структурою $\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap [0, 5 + 1/7)$, оскільки $(TS)^5$ відображує $(\chi_8, 0)$ в $(\chi_8, 5 + 1/7)$.

Розглянемо набори проекторів $P_1, \ldots, P_5, Q_1, Q_2, R$, для яких $P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 2Q_1 + 4Q_2 + 3Q_3 = \lambda I$ та $P_j P_k = 0$, $j \neq k$, $Q_1 Q_2 = 0$.

За лемою 2 при $\lambda < 3$ маємо $P_3 = P_4 = P_5 = Q_2 = R = 0$ або $P_1 + 2P_2 + 2Q_1 = \lambda I$, звідки випливає, що Q_1 комутує з P_1, P_2; незвідні зображення при цьому одновимірні та існують лише при $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

При $3 < \lambda < 4$ маємо $P_4 = P_5 = Q_2 = 0$, або $P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2Q_1 + 3R = \lambda I$. Таким чином, $\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap (3, 4) = \Sigma_{D_6, (1,2,3;2;3)} \cap (3, 4)$, де $\Sigma_{D_6, (1,2,3;2;3)}$ — множина тих $\lambda \in \mathbb{R}$, для яких існують проектори R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 такі, що R_1, R_2, R_3 попарно ортогональні і $R_1 + 2R_2 + 3R_3 + 2R_4 + 3R_5 = \lambda I$.

Твердження 3. $\Sigma_{D_6,(1,2,3;2;3)} \cap (3,4) = \{7/2\}$.

Доведення. Застосовуючи STS до $(1,2,3;2;3;\lambda)$, одержуємо вагу $(1,2,7-\lambda; 6-\lambda; 5-\lambda; 10-2\lambda)$. При $\lambda \in (3,4)$ маємо $7-\lambda > 10-2\lambda$, тому $\Sigma_{D_6,(1,2,3;2;3)} \cap (3,4)$ складається з тих λ, для яких існують розв'язки

$$P_1 + 2P_2 + (6-\lambda)Q_1 + (5-\lambda)R = (10-2\lambda)I.$$

Застосовуючи STS до цього набору проекторів, отримуємо вагу $(1, 2, \lambda-3; \lambda-2; 2\lambda-6)$. При $\lambda \in (3,4)$ маємо $\lambda-2 > 2\lambda-6$ і $P_1 + 2P_2 + (\lambda-3)Q_1 = (2\lambda-6)I$, звідки робимо висновок, що ці проектори комутують і єдине значення λ, для якого існують розв'язки, дорівнює $7/2$.

Отже, $\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap (3,4) = \{7/2\}$. Далі, $(TS)^5 S$ відображує відрізок $(3, 4)$ у відрізок $(4, 9/2)$, а $\lambda = 7/2$ у $5 - 2/3 = 13/3$. Відрізок $(0, 3)$ переводиться цим же відображенням у $(9/2, 24/5) = (5-1/2, 5-1/5)$, а точки $\{0,1,2,3\}$ відображуються відповідно в точки $\{5-1/5, 5-1/4, 5-1/3, 5-1/2\}$. Як і при доведенні попередньої теореми, одержуємо $\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap (24/5, 5) = \varnothing$ та $\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap (5, 36/7) = \varnothing$.

Таким чином,

$$\Sigma_{\tilde{E}_8} \cap [0, 36/7) = \left\{0, 1, 2, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{13}{3}, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, \frac{19}{4}, \frac{24}{5}, 5\right\},$$

і доведення теореми завершуємо обчисленням ітерацій відображення $\lambda \mapsto 5 + \frac{1}{7-\lambda}$ на цій множині, додаванням точки $\lambda = 6$ та застосуванням симетрії відносно $\lambda = 6$.

4. $*$-Зображення алгебр $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi_\Gamma}$, де Γ — розширений граф Динкіна. Для алгебри $\mathcal{A}_{\tilde{D}_4,\chi_{\tilde{D}_4}}$ наведемо явні формули як для зображень дискретної серії, так і для випадку інваріантної ваги.

Для інших алгебр функтори Кокстера дають алгоритм побудови зображень дискретної серії. Проте формули, що виникають при цьому, надто громіздкі.

Для випадку інваріантної ваги наведемо явні формули для зображень алгебр $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ (випадок алгебри $\mathcal{A}_{\tilde{E}_8,\chi_{\tilde{E}_8}}$ потребує подальшого дослідження).

4.1. Зображення алгебр, пов'язаних із графом $\tilde{D}_4$. Зображення алгебри $\mathcal{A}_{\tilde{D}_4,\chi_{\tilde{D}_4},\lambda}$ породжуються четвірками проекторів P_1, P_2, P_3, P_4, для яких $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \lambda I$, $\lambda \geq 0$.

Одновимірні зображення існують при $\lambda = 0$ (єдине зображення $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$) та при $\lambda = 1$ (чотири зображення: $P_1 = 1$, $P_2 = P_3 = P_4 = 0$ та перестановки цих проекторів).

Застосовуючи функтори Кокстера, одержуємо п'ять нескінченних серій незвідних зображень.

Щоб записати явні формули для цих зображень, введемо проектори в $\mathbb{C}^2$ вигляду

$$Q_{l,m} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} l & \sqrt{l(m-l)} \\ \sqrt{l(m-l)} & m-l \end{pmatrix},$$

$$R_{l,m} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} l & -\sqrt{l(m-l)} \\ -\sqrt{l(m-l)} & m-l \end{pmatrix}, \quad 0 \leq l \leq m.$$

Тоді формули для зображень наберуть такого вигляду.

Серія, що починається з $\lambda = 0$: $\dim H = n = 2k + 1$, $k \geq 0$, $\lambda = 2 \pm 2/n$. Запишемо формули для проекторів:

$$P_1 = Q_{n-1,n} \oplus Q_{n-3,n} \oplus \ldots \oplus Q_{2,n} \oplus 0,$$

$$P_2 = R_{n-1,n} \oplus R_{n-3,n} \oplus \ldots \oplus R_{2,n} \oplus 0, \quad H = \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^2}_{k} \oplus \mathbb{C}^1,$$

$$P_3 = 0 \oplus Q_{n-2,n} \oplus Q_{n-4,n} \oplus \ldots \oplus Q_{1,n},$$

$$P_4 = 0 \oplus R_{n-2,n} \oplus R_{n-4,n} \oplus \ldots \oplus R_{1,n}, \quad H = \mathbb{C}^1 \oplus \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^2}_{k},$$

причому $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2 - 2/n$. Крім цього, до переліку слід додати четвірки проекторів, одержані внаслідок застосування функтора S, $P_j' = I - P_j$, $j = 1, \ldots, 4$, для яких $P_1' + P_2' + P_3' + P_4' = 2 + 2/n$.

Серія, що починається з $\lambda = 1$: $\dim H = n \geq 0$, $\lambda = 2 \pm 1/n$ (разом одержимо 4 серії). Для $n = 2k$

$$P_1 = 0 \oplus Q_{2k-2,4k} \oplus Q_{2k-4,4k} \oplus \ldots \oplus Q_{2,4k} \oplus 0,$$

$$P_2 = 4k \oplus R_{2k-2,4k} \oplus R_{2k-4,4k} \oplus \ldots \oplus R_{2,4k} \oplus 0,$$

$$H = \mathbb{C}^1 \oplus \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^2}_{k-1} \oplus \mathbb{C}^1,$$

$$P_3 = Q_{2k-1,4k} \oplus Q_{2k-3,4k} \oplus \ldots \oplus Q_{1,4k},$$

$$P_4 = R_{2k-1,4k} \oplus R_{2k-3,4k} \oplus \ldots \oplus R_{1,4k}, \quad H = \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^2}_{k},$$

для $n = 2k + 1$

$$P_1 = 1 \oplus 2 \oplus Q_{2k-1,4k+2} \oplus Q_{2k-3,4k+2} \oplus \ldots \oplus Q_{1,4k+2},$$

$$P_2 = 0 \oplus R_{2k-1,4k+2} \oplus R_{2k-3,4k+2} \oplus \ldots \oplus R_{1,4k+2}, \quad H = \mathbb{C}^1 \oplus \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^2}_{k},$$

$$P_3 = Q_{2k,4k+2} \oplus Q_{2k-2,4k+2} \oplus \ldots \oplus Q_{2,4k+2} \oplus 0,$$

$$P_4 = R_{2k,4k+2} \oplus R_{2k-2,4k+2} \oplus \ldots \oplus R_{2,4k+2} \oplus 0, \quad H = \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^2}_{k} \oplus \mathbb{C}^1.$$

Інші три серії одержуються в результаті циклічної перестановки наведених проекторів.

Для побудованих четвірок проекторів маємо $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2 - 1/n$. Застосовуючи функтор S, додаємо до переліку четвірки проекторів $P_j' = I - P_j$, $j = 1, \ldots, 4$, для яких $P_1' + P_2' + P_3' + P_4' = 2 + 1/n$.

Незвідні четвірки проекторів, для яких $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2I$, описано в [15]. Ці зображення описуються наступним твердженням.

Твердження 4. *Незвідна четвірка проекторів, для яких* $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2I$, *унітарно еквівалентна одній із наступних*:

1) *шістці одновимірних зображень* $P_j = p_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots 4$, *де два з чисел* p_j — *одиниці, а інших два — нулі*;

2) *сім'ї двовимірних зображень вигляду*

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & -b-ic \\ -b+ic & 1-a \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-a & b-ic \\ b+ic & 1+a \end{pmatrix},$$
$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-a & -b+ic \\ -b-ic & 1+a \end{pmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & b+ic \\ b-ic & 1-a \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $a^2+b^2+c^2 = 1$, *і або* $a > 0,\ b > 0,\ c \in (-1,1)$, *або* $a = 0,\ b > 0,\ c > 0$, *або* $a > 0,\ b = 0,\ c > 0$.

Доведення. Розглянемо оператори $C_1 = I - P_2 - P_3$, $C_2 = I - P_1 - P_3$, $C_3 = I - P_1 - P_2$. Співвідношення $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2I$ еквівалентне наступному співвідношенню для C_1, C_2, C_3: $\{C_1, C_2\} = \{C_1, C_3\} = \{C_2, C_3\} = 0$, $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = I$. Тоді твердження випливає з опису трійок самоспряжених операторів, що попарно антикомутують.

4.2. Зображення алгебри, пов'язаної з графом $\tilde{E}_6$. Для $\lambda \neq 3$ всі незвідні зображення алгебри $\mathcal{A}_{\tilde{E}_6, \chi_{\tilde{E}_6}, \lambda}$ можна одержати з найпростіших (одно- та двовимірних) застосуванням функторів Кокстера, конструкцію яких наведено вище. Проте при їх застосуванні виникає велика кількість громіздких обчислень і не вдається одержати результат у такій компактній формі, як у випадку алгебри, пов'язаної з $\tilde{D}_4$.

Незвідні зображення алгебри $\mathcal{A}_{\tilde{E}_6, \chi_{\tilde{E}_6}, 3}$ описано в [16]. Ці зображення задаються трійками самоспряжених операторів, спектр яких лежить в $\{0, 1, 2\}$ і сума яких дорівнює $3I$. Переходячи до операторів $A_j - I$, одержуємо задачу: описати незвідні трійки самоспряжених операторів A_1, A_2, A_3, для яких

$$A_i^3 = A_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

Теорема 5. *Кожна незвідна трійка самоспряжених операторів* A_1, A_2, A_3 *в сепарабельному гільбертовому просторі, для якої* $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ *та* $\sigma(A_i) \subset \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, *унітарно еквівалентна одній із наступних нееквівалентних незвідних трійок*:

1) *сімці одновимірних зображень*:
   a) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$,
   b) $A_1 = -1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$ *та їх довільним перестановкам*;
2) *одному двовимірному зображенню*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix};$$

3) *сім'ї тривимірних зображень*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & i\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ -i\lambda_3 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1(1+i\sqrt{3}) & \lambda_3(i+\sqrt{3}) \\ \lambda_1(1-i\sqrt{3}) & 0 & \lambda_2(1+i\sqrt{3}) \\ \lambda_3(-i+\sqrt{3}) & \lambda_2(1-i\sqrt{3}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1(-1+i\sqrt{3}) & \lambda_3(-i+\sqrt{3}) \\ \lambda_1(-1-i\sqrt{3}) & 0 & \lambda_2(-1+i\sqrt{3}) \\ \lambda_3(i+\sqrt{3}) & \lambda_2(-1-i\sqrt{3}) & 0 \end{pmatrix},$$

де $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, *та або* $|\lambda_3| \neq \lambda_1 = \lambda_2$, *або* $|\lambda_3| < \lambda_1$, $|\lambda_3| < \lambda_2$ *та* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доведення. Виберемо в алгебрі елемент x такий, що $A_k = \varepsilon^k x + \varepsilon^{-k} x^*$, $k = 1, 2, 3$, де $\varepsilon = (-1+i\sqrt{3})/2$. Такий елемент визначається однозначно і разом з x^* породжує всю алгебру $\mathcal{A}_{\tilde{E}_6, \chi_{\tilde{E}_6}, 3}$. Нескладно показати, що цей елемент центрований, а потім скористатись результатами [17] та тим фактом, що x^3 лежить в центрі алгебри (детальне доведення див. у [16]).

4.3. Зображення алгебри, пов'язаної з графом $\tilde{E}_7$. Як і в попередніх випадках, обмежимось випадком $\mathcal{A}_{\tilde{E}_7, \chi_{\tilde{E}_7}}$. У випадку $\lambda \neq 4$ всі незвідні зображення одержують як результат застосування функторів Кокстера до вироджених зображень (які фактично є зображеннями деякої скінченновимірної підалгебри).

Незвідні зображення $\mathcal{A}_{\tilde{E}_7, \chi_{\tilde{E}_7}, 4}$ описано в [18]. Вони задаються трійками самоспряжених операторів A_1, A_2, A_3, для яких спектри A_1 та A_2 лежать в $\{0, 1, 2, 3\}$, а спектр A_3 — в $\{0, 2\}$ і виконується умова $A_1 + A_2 + A_3 = 4I$. В еквівалентній формі це задача опису пар самоспряжених операторів $A = A_1 - 3/2I$, $B = A_2 - 3/2I$ зі спектрами в $\{\pm 1/2, \pm 3/2\}$, для яких $(A+B)^2 = I$.

Теорема 6. *Пари операторів*

$$A = \frac{1}{8\phi}\begin{pmatrix} -16-\beta & 2\lambda & \sqrt{4\phi^4-\beta^2} & 0 \\ 2\lambda & 16+\beta & 0 & -\sqrt{4\phi^4-\beta^2} \\ \sqrt{4\phi^4-\beta^2} & 0 & -16+\beta & 2\lambda \\ 0 & -\sqrt{4\phi^4-\beta^2} & 2\lambda & 16-\beta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{8\phi}\begin{pmatrix} 16-\beta & 2\lambda\omega & -\sqrt{4\phi^4-\beta^2} & 0 \\ 2\lambda\overline{\omega} & -16+\beta & 0 & \sqrt{4\phi^4-\beta^2} \\ -\sqrt{4\phi^4-\beta^2} & 0 & 16+\beta & 2\lambda\omega \\ 0 & \sqrt{4\phi^4-\beta^2} & 2\lambda\overline{\omega} & -16-\beta \end{pmatrix},$$

де $\lambda^2 = -\phi^4 + 20\phi^2 - 64$, $\beta^2 = 16\phi^2 - \lambda^2(1+\omega)(1+\overline{\omega})$, $|\omega| = 1$, $\phi \in [2, 4]$, *задають зображення алгебри* $\mathcal{A}_{\tilde{E}_7, \chi_{\tilde{E}_7}, 4}$.

При $\phi = 2$ *зображення розкладається в пряму суму чотирьох одновимірних зображень*: $A = \pm 1/2$, $B = \mp 3/2$ *та* $A = \pm 3/2$, $B = \mp 1/2$.

При $\phi = 2\sqrt{2}$, $\omega = 1$ *зображення розкладається в пряму суму двох одновимірних зображень* $A = B = \pm 1/2$ *та одного двовимірного зображення*

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

в якому спектри операторів A *та* B *мають вигляд* $\{-3/2, 3/2\}$.

При $\phi = 4$ *зображення розкладається в пряму суму двох незвідних двовимірних зображень*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \{1/2, -3/2\}, \quad \sigma(B) = \{-1/2, 3/2\}$$

та

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \{-1/2, 3/2\}, \quad \sigma(B) = \{1/2, -3/2\}.$$

При всіх інших значеннях (ϕ, ω), $\phi \in (2, 4)$, $|\omega| = 1$, *зображення незвідне, причому* $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\pm 1/2, \pm 3/2\}$.

Наведені зображення складають повний перелік незвідних зображень з точністю до унітарної еквівалентності.

Доведення. Наведемо лише основні етапи доведення. Спочатку, використовуючи співвідношення в алгебрі, показуємо, що оператори A та B мають вигляд

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (5+2\lambda)I & -\mu I \\ -\mu I & (5-2\lambda)I \end{pmatrix}, \quad B^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (5-2\lambda)I & -\mu I \\ -\mu I & (5+2\lambda)I \end{pmatrix}.$$

Тут $\mu, \lambda \geq 0$ та $\mu^2 + \lambda^2 = 16$. Використавши цей розклад, подамо A та B у вигляді

$$A = \frac{1}{2} U_1 \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 2A_2 \end{pmatrix} U_1^*, \quad B = \frac{1}{2} U_2 \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 3B_2 \end{pmatrix} U_2^*,$$

де U_1 та U_2 — унітарні матриці, для яких вказано явний вигляд. Потім з допомогою співвідношення між операторами A, B та умов на їх спектри після деяких обчислень одержимо потрібні формули (детальний виклад див. у [18]).

4.4. Зображення алгебр, пов'язаних із графом $\tilde{E}_8$. Як і у випадках, що розглядалися вище, всі зображення алгебри $\mathcal{A}_{\tilde{E}_8, \chi_{\tilde{E}_8}, \lambda}$ при $\lambda \neq 6$ (дискретна серія) можна одержати з найпростіших під дією функторів Кокстера.

Формули для незвідних зображень $\mathcal{A}_{\tilde{E}_8, \chi_{\tilde{E}_8}, 6}$ авторам невідомі. Проте, як показано в [19], ці зображення мають розмірність не більшу 6, і, як і в попередніх випадках, зображення максимальної розмірності параметризуються точками двовимірної сфери з трьома виколотими точками, а в виколотих точках зображення звідні і розкладаються в пряму суму зображень меншої розмірності.

5. Структура множини $\Sigma_{\Gamma, M}$ у загальному випадку. Узагальнюючи результати з п. 3 для набору множин $M = (M_1, \ldots, M_n)$ (множини M_l задано співвідношенням (2)), асоційованого з розширеним графом Динкіна Γ, розглянемо множини $\Sigma_{\Gamma, M}$, що складаються з тих $\lambda \in \mathbb{R}$, для яких існують самоспряжені оператори A_l, для яких $\sigma(A_l) \subset M_l$, $l = 1, \ldots, n$, і $A_1 + \ldots + A_n = \lambda I$. Зауважимо, що множини Σ_Γ, що вивчались у п. 3, є окремим випадком $\Sigma_{\Gamma, M}$ при спеціальному виборі множин M_l.

Набір множин $M = (M_1, \ldots, M_n)$ та число $\lambda \in \mathbb{R}$ природним чином визначають вагу на графі Γ, яку будемо позначати $\chi = (M, \lambda)$.

Наступне твердження [20] описує властивості множини $\Sigma_{\Gamma,M}$ у випадку загального набору множин M на розширеному графі Динкіна Γ.

Теорема 7. *Нехай* Γ — *розширений граф Динкіна,* $\chi = (M, \lambda)$. *Тоді*:

1. *Множина* $\Sigma_{\Gamma,M}$ *скінченна або зліченна. Множина* $\Sigma_{\Gamma,M}$ *нескінченна тоді і лише тоді, коли для всіх коефіцієнтів ваги* χ *має місце* $\chi_k < \omega_\Gamma(\chi)$ *та* $\tilde{\chi}_k < \omega_\Gamma(\tilde{\chi})$, *де* $\tilde{\chi} = T\chi$.

2. *Якщо множина* $\Sigma_{\Gamma,M}$ *нескінченна, вона має єдину граничну точку* $\omega_\Gamma(\chi)$.

6. Зображення у випадку довільних ваг.

Теорема 8. *Всі незвідні набори операторів, пов'язані з розширеними графами Динкіна, скінченновимірні.*

Доведення. Нехай π — незвідне зображення алгебри $A_{\Gamma,\chi}$, де Γ — розширений граф Динкіна. Розглянемо окремо два випадки.

1. Нехай $\lambda = \omega_\Gamma(\chi)$ (λ — значення ваги в кореневій вершині, ω_Γ визначено в доведенні леми 1). В [19, 8] показано, що відповідна алгебра скінченновимірна над центром і тому є алгеброю з поліноміальним співвідношенням (PI-алгеброю; про PI-алгебри див., наприклад, [21]). Звідси випливає, що розмірності всіх її незвідних зображень обмежені одним числом.

2. Нехай $\lambda < \omega_\Gamma(\chi)$. Візьмемо зображення π алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$ та застосуємо до нього функтори $(ST)^n$, $n \in \mathbb{N}$. В результаті одержимо зображення алгебр, що відповідають вагам $\chi_k = (ST)^k\chi$. З леми 1 випливає, що коефіцієнти ваг χ_k необмежено спадають. Це означає, що на деякому кроці n подальше застосування функторів буде неможливим (конструкція має сенс лише для ваг із невід'ємними коефіцієнтами). Покажемо, що у цьому випадку у алгебри, що відповідає χ_n, або немає зображень (а тому немає зображень також у $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi}$), або зображення є очевидним продовженням зображення деякої підалгебри, що відповідає певному підграфу графа Γ (такий підграф є графом Динкіна, відповідна алгебра скінченновимірна і має скінченне число незвідних зображень, розмірність яких скінченна). Це означатиме, що зображення π можна отримати в результаті застосування функтора $(TS)^n$ до скінченновимірного зображення алгебри $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi_n}$, а отже, воно є скінченновимірним.

Нехай всі коефіцієнти ваг χ_k, $k \le n$, додатні, а один із коефіцієнтів ваги χ_{n+1} від'ємний або дорівнює нулю. Враховуючи формули для дії функторів на вагах, бачимо, що відповідний коефіцієнт ваги χ_n більший або дорівнює λ_n (λ_n — коефіцієнт ваги χ_n у кореневій вершині).

Зауважимо, що якщо один із коефіцієнтів ваги χ_n більший, ніж λ_n, то відповідний проектор є нулем (лема 2).

У випадку, коли один із коефіцієнтів χ_n дорівнює λ_n, відповідний проектор комутує з усіма іншими проекторами, а отже, є одиницею (тоді всі інші проектори будуть нулями) або нулем.

Таким чином, у кожному із зазначених випадків зображення задається зображенням деякої підалгебри в $\mathcal{A}_{\Gamma,\chi_n}$, що відповідає підграфу.

Для завершення доведення достатньо показати, що для довільного $\lambda < \omega_\Gamma(\chi)$ існує число n, для якого деякий коефіцієнт ваги χ_{n+1} є від'ємним або нулем. Але це безпосередньо випливає з леми 1. Доведення у випадку $\lambda < \omega_\Gamma(\chi)$ завершено.

3. Нехай $\lambda > \omega_\Gamma(\chi)$. Застосовуючи зображення S до ваги χ, одержуємо вагу χ', для якої $\lambda' < \omega_\Gamma(\chi')$, і можемо застосувати наведені вище міркування.

Теорему 8 доведено.

1. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Научн. зап. Львов. политех. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – **38**, № 2. – С. 3 – 7.
2. *Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 200 с.
3. *Fulton W.* Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus // Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.) – 2000. – **37**, № 3. – P. 209 – 249.
4. *Kruglyak S., Popovych S., Samoilenko Y.* The spectral problem and $*$-representations of algebras associated with Dynkin graphs // J. Algebra and Appl. – 2005. – **4**, № 6. – P. 761 – 776.
5. *Crawley-Boevey W., Holland M. P.* Noncommutative deformations of Kleinian singularities // Duke Math. J. – 1998. – **92**, № 3. – P. 605 – 635.
6. *Kruglyak S. A., Roiter A. V.* Locally scalar graph representations in the category of Hilbert spaces // Funct. Anal. and Appl. – 2005. – **39**, № 2. – P. 91 – 105.
7. *Vasilevski N.* C^*-algebras generated by orthogonal projections and their applications // Int. Equat. Oper. Theory. – 1998. – **31**. – P. 113 – 132.
8. *Mellit A. S., Samoilenko Yu. S., Vlasenko M. A.* Algebras generated with linearly dependent elements with prescribed spectra // Funct. Anal. and Appl. – 2005. – **39**, № 3. – P. 175 – 186.
9. *Samoilenko Yu. S., Zavodovsky M. V.* Spectral theorems for $*$-representations of the algebras $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\mathrm{com}}$ associated with Dynkin graphs // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 1. – P. 88 – 96.
10. *Ostrovskyi V. L.* On $*$-representations of a certain class of algebras related to a graph // Ibid. – 2005. – **11**, № 3. – P. 250 – 256.
11. *Ostrovskyi V.* Special characters on star graphs and representations of $*$-algebras. arXiv: math.RA/0509240, 2005.
12. *Kruglyak S. A.* Coxeter functors for a certain class of $*$-quivers and $*$-algebras // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 4. – P. 49 – 57.
13. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 25.
14. *Mellit A., Samoilenko Yu., Zavodovsky M.* On $*$-representations of algebras of Temperley – Lieb type and algebras generated by linearly dependent generators with given spectra // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2004. – **50**. – P. 1139 – 1144.
15. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**.
16. *Меллит А. С.* Когда сумма трех частичных отражений равна нулю // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1277 – 1283.
17. *Ostrovskyi V.* On operator relations, centered operators, and nonbijective dynamical systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – **2**, № 3-4. – P. 114 – 121.
18. *Островський В. Л.* Зображення алгебри, асоційованої з графом Динкіна $\tilde{E}_7$ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1193 – 1204.
19. *Mellit A.* Certain examples of deformed preprojective algebras and geometry of their $*$-representations. arXiv:math.RT/0502055, 2005.
20. *Yusenko K. A.* On existence of $*$-representations of certain algebras related to extended Dynkin graphs // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12**, № 2. – P. 197 – 204.
21. *Pierce R. S.* Associative algebras // Grad. Texts Math. – 1982. – **88**. – XII + 436 p.

Одержано 27.06.2006