УДК 517.9:532

Б. М. Вронский (Таврич. нац. ун-т, Симферополь)

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

We study the character of the spectrum of small oscillations, the completeness and the basis property of a system of eigenvectors.

Вивчено характер спектра, повноту і базисність системи власних векторів.

1. Постановка задачи и приведение ее к операторной форме. ***1.1. Постановка начально-краевой задачи.*** Пусть неподвижный сосуд целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, т. е. ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Oz по закону $\rho_0 = \rho_0(z)$. Область, занятую жидкостью, обозначим через Ω, а ее границу (твердую стенку) — через S. Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz.

Будем рассматривать случай устойчивой стратификации; она имеет место при выполнении условий (см. [1 – 4])

$$\begin{gathered} 0 < N_-^2 \le N^2(z) \le N_+^2 < \infty, \\ N^2(z) := N_0^2(z) - \left(\frac{g}{c}\right)^2, \qquad N_0^2(z) := -g(\ln\rho_0(z))', \end{gathered} \tag{1}$$

где c — скорость звука в жидкости. Величину $N^2(z)$ принято называть частотой плавучести или частотой Вяйсяля – Брента.

Из этих условий следует, что плотность является ограниченной, строго положительной функцией.

Малые движения системы описываются уравнениями (см. [1])

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \frac{1}{\rho_0}g\rho\vec{k} \qquad (\text{в } \Omega), \tag{2}$$

$$\rho + w_z\rho_0' + \rho_0 \operatorname{div}\vec{w} = 0 \qquad (\text{в } \Omega), \tag{3}$$

$$\rho + w_z\rho_0' = c^{-2}(p - gw_z\rho_0) \qquad (\text{в } \Omega), \tag{4}$$

краевым условием

$$\vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \qquad (\text{на } S) \tag{5}$$

и начальными условиями

$$\vec{w}(\vec{x},0) = \vec{w}^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial\vec{w}(\vec{x},0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \tag{6}$$

Здесь $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x},t)$ — поле смещения частиц жидкости от состояния равновесия, $p = p(\vec{x},t)$ — отклонение поля давления от равновесного, $\rho = \rho(\vec{x},t)$ — отклонение поля плотности от равновесного, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S, $\vec{x} = (x^1, x^2, z)$ — точка в $\mathbb{R}^3$.

В задаче (2) – (6) уравнение (2) является линеаризованным уравнением движения стратифицированной жидкости, условие (3) — уравнением неразрывности, уравнение (4) — уравнением состояния идеального баротропного газа, краевое условие (5) выражает условие непротекания идеальной жидкости через твердую стенку.

1.2. Метод ортогонального проектирования. Начально-краевую задачу (2) – (6) приведем к дифференциальному уравнению в некотором гильбертовом пространстве.

Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$ со скалярным произведением

$$(\vec{v},\vec{u})_{L_2} = \int_\Omega \rho_0(z)\vec{v}\cdot\vec{u}\,d\Omega. \tag{7}$$

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$, получающееся замыканием по норме $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$ множества гладких функций

$$\vec{J}_0(\Omega;\rho_0) = \left\{\vec{u}\in C^1(\Omega):\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega,\quad \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \ \text{ на } \ S\right\}. \tag{8}$$

Введем также подпространство квазипотенциальных полей

$$\vec{G}(\Omega;\rho_0) = \left\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0):\ \vec{v} = \frac{1}{\rho_0}\nabla\Phi\right\}. \tag{9}$$

Скалярные функции $\Phi = \Phi(\vec{x},t)$, порождающие подпространство $\vec{G}(\Omega;\rho_0)$, образуют пространство, которое будем обозначать $W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1})$. Скалярное произведение в нем задается формулой

$$(\Phi,\Psi)_{1,\Omega} = \int_\Omega \rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\,d\Omega, \tag{10}$$

причем на функции $\Phi\in W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1})$ налагается нормирующее условие

$$\int_\Omega \Phi\,d\Omega = 0.$$

Лемма 1. *Пространство* $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$ *допускает ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Omega;\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega;\rho_0)\oplus\vec{G}(\Omega;\rho_0). \tag{11}$$

Доказательство приведено в [2].

Из (11) следует, что любой вектор $\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$ можно представить в виде

$$\vec{w} = \vec{u} + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi,\qquad \vec{u}\in\vec{J}_0(\Omega;\rho_0),\qquad \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega;\rho_0). \tag{12}$$

В дальнейшем искомые функции $\vec{w}(\vec{x},t)$, $\rho_0^{-1}\nabla p(\vec{x},t)$ при любом $t\ge 0$ будем считать элементами пространства $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$. Функцию $\vec{w}$ будем искать в виде (12), а $\rho_0^{-1}\nabla p$ — считать элементом $\vec{G}(\Omega;\rho_0)$. Условие $\vec{w}\cdot\vec{n} = 0$ на S позволяет заключить, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ на S.

Исключим из системы уравнений (2) – (4) все функции, кроме $\vec{w}(\vec{x},t)$ (с помощью соотношений (3), (4) выразим p и ρ через $\vec{w}(\vec{x},t)$). После этого спроектируем обе части уравнения (2) на $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega;\rho_0)$. В результате получим

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}) + P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right) + P_0(-g\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) + P_G\left(N_0^2(z)u_z\vec{k} + \frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} - g\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}\right) +$$

$$+ \rho_0^{-1}\nabla\left(g\rho_0u_z + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} - c^2\rho_0\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right) = 0,$$

где P_0 и P_G — проекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega;\rho_0)$ соответственно. Введем в последнем уравнении функции Ψ_i, $i = 1, 2, 3$, такие, что $\Psi_i \in W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1})$ и

$$\rho_0^{-1}\nabla\Psi_1 = P_G(-g\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}), \qquad \rho_0^{-1}\nabla\Psi_2 = P_G\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\rho_0^{-1}\nabla\Psi_3 = P_G(N_0^2(z)u_z\vec{k}).$$

Тогда получим систему

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}) +$$

$$+ P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right) + P_0(-g\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + g\rho_0 u_z +$$

$$+ g\frac{\partial\Phi}{\partial z} - c^2\rho_0\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = 0. \tag{14}$$

1.3. Операторное уравнение задачи. Для перехода от системы (13), (14) к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве введем операторы A_{ij} и B_{ij}, $i, j = 1, 2$, следующим образом:

$$A_{11}\vec{u} = P_G(N_0^2(z)u_z\vec{k}), \qquad A_{12}\Phi = P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$A_{21}\vec{u} = \Psi_3, \qquad A_{22}\Phi = \Psi_2, \qquad B_{11}\vec{u} = 0,$$

$$B_{12}\Phi = P_0(-g\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\vec{k}), \qquad B_{21}\vec{u} = g\rho_0 u_z,$$

$$B_{22}\Phi = g\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Psi_1, \qquad B_0\Phi = -c^2\rho_0\,\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi).$$

Теперь систему (13), (14) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d^2U}{dt^2} + AU + BU = 0, \qquad U(0) = U^0, \qquad U'(0) = U^1, \\ U := (\vec{u}, \Phi)^T \in H := \vec{J}_0(\Omega;\rho_0) \oplus W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1}), \\ U^0 = (\vec{u}^0, \Phi^0)^T, \qquad U^1 = (\vec{u}^1, \Phi^1)^T.\end{gathered} \tag{15}$$

Скалярное произведение в пространстве H задается по формуле

$$(U_1, U_2)_H = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = \int_\Omega (\rho_0(z)\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\cdot\nabla\Phi_2)\,d\Omega.$$

Операторы A и B из (15) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} + B_0\end{pmatrix}.$$

Как будет показано ниже, оператор A ограничен и, следовательно, может быть расширен на все пространство. Областью же определения оператора B является ортогональная сумма $D(B_{21}) \oplus D(B_0)$, где

$$D(B_{21}) = \{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0) : u_z \in W_2^1(\Omega)\}, \qquad D(B_0) = W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1}) \cap W_2^3(\Omega).$$

1.4. Свойства операторов.

Лемма 2. *Оператор $A : H \to H$ является ограниченным и неотрицательным, причем $\|A\| = \max\limits_z N_0^2(z) := N_0^2$.*

Доказательство состоит в построении билинейной формы $(AU_1, U_2)_H$, где U_1, U_2 — произвольные элементы из H, и применении определений операторов A_{ij}, $i, j = 1, 2$, векторов U_i и соответствующих скалярных произведений. В результате можно получить выражение

$$(AU, U)_H = \int\limits_\Omega \rho_0(z) N_0^2(z) \left| \vec{u}_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|^2 d\Omega \geq 0,$$

исходя из которого легко показать, что $\|A\| \leq N_0^2$. Воспользовавшись равенством $\sigma(A_{11}) = [0, N_0^2]$ [5], получим $\|A\| = N_0^2$.

Лемма 3. *Оператор B_0 является неограниченным, самосопряженным и положительно определенным в пространстве $W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1})$, $D(B_0) = \Big\{\Phi \in$ $\in W_2^3(\Omega)$: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ (на S)$\Big\}$.*

Доказательство. Составим билинейную форму $(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}$, где $\Phi_1, \Phi_2 \in$ $\in D(B_0)$. Имеем

$$(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}(z) \nabla\left(-c^2 \rho_0(z) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\right)\right) \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega =$$

$$= c^2 \left(-\int\limits_\Omega \operatorname{div}\left(\rho_0(z) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\right) \cdot \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_2\right) d\Omega + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Omega \rho_0(z) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\right) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_2\right) d\Omega \right) =$$

$$= c^2 \int\limits_\Omega \rho_0(z) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\right) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_2\right) d\Omega -$$

$$- c^2 \int\limits_S \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right) dS =$$

$$= c^2 \int\limits_\Omega \rho_0(z) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1\right) \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_2\right) d\Omega = \ldots = (\Phi_1, B_0\Phi_2)_{1,\Omega}.$$

В выражении для $(B_0\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega}$ положим $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \in D(B_0)$. В результате получим

$$(B_0\Phi, \Phi)_{1,\Omega} = c^2 \int\limits_\Omega \rho_0(z) \left| \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\right) \right|^2 d\Omega.$$

Нетрудно убедиться в том, что оператор B_0 является эллиптическим. Для таких операторов выполняется неравенство [6, с. 539]

$$c_1 \|\Phi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega;\rho_0)} \leq c_2 \|\Phi\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \qquad c_1, c_2 > 0. \tag{16}$$

Выражение для $\|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega;\rho_0)}$ имеет вид

$$\|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega;\rho_0)} = c^4\int\limits_\Omega \rho_0^3(z)\left|\operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\right)\right|^2 d\Omega.$$

Сравнивая выражения для $(B_0\Phi,\Phi)_{1,\Omega}$ и $\|B_0\Phi\|^2_{L_2(\Omega;\rho_0)}$, а также используя приведенное неравенство, приходим к выводу, что норма в энергетическом пространстве оператора B_0 эквивалентна одной из норм пространства $W_2^2(\Omega)$. Отсюда и из теорем вложения С. Л. Соболева следует, что, во-первых, $(B_0\Phi,\Phi)_{1,\Omega} = \|\Phi\|^2_{B_0} \geq \gamma^2\|\Phi\|^2_{1,\Omega}$, т. е. оператор B_0 положительно определен, и, во-вторых, любое множество, ограниченное в норме энергетического пространства оператора B_0, компактно в норме пространства $W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1})$.

Замечание. В процессе доказательства леммы 3 мы применили формулу Грина в виде

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div}(\vec{a}F)\,d\Omega = \int\limits_\Omega \operatorname{div}(F\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla F)\,d\Omega = \int\limits_S F a_n\, dS$$

для векторной $\vec{a} = \rho_0^{-1}\nabla\Phi_1$ и скалярной $F = \operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_2\right)$ функций и условие $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ на S.

Определение 1. $\mathfrak{S}_p$ *— класс вполне непрерывных операторов, s-числа которых суммируемы со степенью p.*

Лемма 4. *Оператор* B_0^{-1} *принадлежит классу* $\mathfrak{S}_p$ *при* $p > 3/2$.

Доказательство. Компактность следует из предыдущей леммы. Кроме того, известно (см. [7]), что собственные значения оператора B_0^{-1} имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_n(B_0^{-1}) = c_{B_0^{-1}} n^{-2/3}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{17}$$

т. е. оператор B_0^{-1} принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$.

Лемма 5. *Оператор* $D := A + B$ *неотрицателен.*

Доказательство следует из вида квадратичной формы (DU, U):

$$(DU,U) = \int\limits_\Omega \rho_0(z)N_0^2(z)\left|\vec{u}_z + \rho_0^{-1}(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|^2 d\Omega -$$

$$- 2g\int\limits_\Omega \rho_0(z)\left(u_z + \rho_0(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\right)d\Omega +$$

$$+ c^2\int\limits_\Omega \rho_0(z)\left|\operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\right)\right|^2 d\Omega =$$

$$= \int\limits_\Omega \rho_0(z)\left\{N^2(z)\left(u_z + \rho_0(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + \left[g/c\left(u_z + \rho_0(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - c\operatorname{div}\left(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\right)\right]^2\right\}d\Omega,$$

выражение для которой получается способом, аналогичным использованному при составлении формул для (AU,U) и $(B_0\Phi,\Phi)$. Из полученного выражения следует, что $(DU,U) \geq 0$ $\forall U\in H$, а это означает, что оператор $D \geq 0$.

2. Собственные колебания. Перейдем к исследованию собственных колебаний системы, т. е. к изучению свойств решений задачи (15), зависящих от времени по закону $\exp(i\omega t)$. В результате получим спектральную задачу

$$\lambda U = AU + BU, \qquad \lambda = \omega^2. \tag{18}$$

Полученный оператор $D = A + B$ является, строго говоря, незамкнутым.

Ниже мы приведем исследуемую задачу к задаче для замкнутого оператора, который является самосопряженным расширением для оператора D.

Для этого вместо задачи (18) рассмотрим „смещенную” спектральную задачу вида

$$(\lambda + a)U = (D + aI)U, \quad \lambda + a := \mu, \quad D_a := D + aI. \tag{19}$$

Здесь a — произвольная положительная константа.

Оператор D_a является положительно определенным и допускает расширение до самосопряженного по Фридрихсу. Укажем конструкцию этого расширения. Легко видеть, что имеет место факторизация

$$D_a = \begin{pmatrix} A_{11} + aI & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} + B_0 + aI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + aI & Q \\ Q^t & I + G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где

$$Q = (A_{12} + B_{12}) B_a^{-1/2}, \quad Q^t = B_a^{-1/2}(A_{21} + B_{21}),$$
$$G = B_a^{-1/2}(A_{22} + B_{22}) B_a^{-1/2}, \quad B_a = aI + B_0.$$

Следующее утверждение вытекает непосредственно из свойств введенных выше операторов.

Лемма 6. 1. $Q^t = Q^*_{D(B_{21})}$.

2. *Оператор G является неотрицательным, симметричным и, следовательно, допускающим расширение до самосопряженного $\hat{G}$.*

3. *Оператор B_a имеет те же свойства, что и оператор B_0.*

Из представления (20) следует, что самосопряженное расширение оператора D_a имеет вид

$$\hat{D}_a = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + aI & Q \\ Q^* & I + \hat{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Область определения этого оператора состоит из векторов $(\vec{u}, \Phi)^T$ таких, что

$$\Phi \in D(B_a^{1/2}), \quad Q^*\vec{u} + (I + \hat{G}) B_a^{1/2} \Phi \in D(B_a^{1/2}).$$

В дальнейшем вместо задачи (19) будем рассматривать спектральную задачу для оператора $\hat{D}_a$:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + aI & Q \\ Q^* & I + \hat{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \Phi \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Заметим, что оператор D_a (в отличие от D) является замкнутым. Это следует из ограниченной обратимости составляющих его множителей.

Из физических соображений следует ожидать, что спектр задачи состоит из двух частей. Одна из них (дискретная часть) обусловлена сжимаемостью жидкости и занимает промежуток $[N_0^2, +\infty]$, другая (непрерывная) порождена стратификацией и расположена на отрезке $[0, N_0^2]$.

2.1. Акустические колебания. Будем считать, что $\lambda > N_0^2$. Уравнение (22) запишем покомпонентно

$$\begin{aligned} (aI + A_{11})\vec{u} + Q B_a^{1/2} \Phi &= \mu \vec{u}, \\ B_a^{1/2}(Q^*\vec{u} + (I + \hat{G}) B_a^{1/2} \Phi) &= \mu \Phi. \end{aligned} \tag{23}$$

От этих равенств с помощью замены $\Phi = B_a^{-1/2}\zeta$ перейдем к системе уравнений

$$\begin{aligned}(aI + A_{11})\vec{u} + Q\zeta &= \mu\vec{u},\\ Q^*\vec{u} + (I+\hat{G})\zeta &= \mu B_a^{-1}\zeta.\end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку $\lambda > N_0^2$, для „смещенного” спектрального параметра μ выполнено условие

$$\mu > N_0^2 + a := N_a^2.$$

При выполнении этого условия оператор-функция $(\mu I - A_{11}^a)$, $A_{11}^a := aI + A_{11}$ ограниченно обратима. Поэтому из системы (24) можно исключить функцию $\vec{u}$ с помощью соотношения $\vec{u} = (\mu I - A_{11}^a)^{-1}Q\zeta$. В результате получим задачу на собственные значения:

$$L(\mu)\zeta := (I + \hat{G} - \mu B_a^{-1} + F(\mu))\zeta = 0, \tag{25}$$

где $F(\mu) := Q^*(\mu I - A_{11}^a)^{-1}Q$ — аналитическая оператор-функция.

Лемма 7. *Оператор-функция $F(\mu)$ из (25) при $\mu > N_a^2$ принимает значения на множестве ограниченных и самосопряженных операторов.*

Доказать нужно только ограниченность. Для этого покажем, что операторы $Q = D_{12}B_a^{-1/2}$ и $Q^* = B_a^{-1/2}D_{21}$ ограничены. Поскольку они взаимно сопряжены, достаточно доказать ограниченность Q. Имеем $Q = A_{12}B_a^{-1/2} + B_{12}B_a^{-1/2}$. Первое слагаемое ограничено (и даже компактно) в силу свойств операторов A и $B_a^{-1/2}$. Покажем, что $B_{12}B_a^{-1/2}$ также ограничен. Для этого вычислим $\left\|B_{12}B_a^{-1/2}\zeta\right\|^2$:

$$\begin{aligned}\left\|B_{12}B_a^{-1/2}\zeta\right\|^2 &= (B_{12}B_a^{-1/2}\zeta,\, B_{12}B_a^{-1/2}\zeta) = (B_{12}\Phi,\, B_{12}\Phi) =\\ &= g^2\int_\Omega \rho_0(z)\left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega,\end{aligned}$$

$$\|\zeta\|^2 = (B_a\Phi, \Phi) = c^2\int_\Omega \rho_0(z)\left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega.$$

Отсюда следует

$$\left\|B_{12}B_a^{-1/2}\right\|^2 = \frac{g^2}{c^2}.$$

Следовательно, операторы Q и Q^* ограничены и для их норм справедливы оценки

$$\|Q\| = \left\|Q^*\right\| \le \lambda_1^{1/2}(B_a^{-1})N_a^2 + \frac{g}{c},$$

где $\lambda_1(B_a^{-1})$ — первое собственное значение оператора B_a^{-1}. Таким образом, ограниченность оператор-функции $F(\mu)$ доказана.

Лемма 8. *Оператор $\hat{G}$ является самосопряженным и компактным.*

Доказательство. Самосопряженность следует из структуры оператора $\hat{G}$ и свойств входящих в него операторов. Покажем его полную непрерывность. Для этого представим $\hat{G}$ в виде суммы $\hat{G} = \hat{G}_A + \hat{G}_B$, где $\hat{G}_A := B_a^{-1/2}A_{22}B_a^{-1/2}$, $\hat{G}_B := B_a^{-1/2}B_{22}B_a^{-1/2}$. Оператор $\hat{G}_A$ неотрицателен и принадлежит пространству $\mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$. Изучим свойства оператора $\hat{G}_B$. Для этого составим выражение для $(\hat{G}_B\zeta, \zeta)$:

$$(\hat{G}_B\zeta,\zeta) = -2g\int_\Omega \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)d\Omega.$$

Использовав неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left|(\hat{G}_B\zeta,\zeta)\right| \le 2g\|\zeta\|\sqrt{(B_a^{-1}\zeta,\zeta)}.$$

Выберем последовательность $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $\zeta_n \to 0$ (слабо) при $n \to \infty$. Для нее существует $c > 0$ такое, что для всех $n \in N$

$$\|\zeta_n\| = \left(c^2\int_\Omega \rho_0(z)\left|\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_n)\right|^2 d\Omega\right)^{1/2} < c$$

и в силу полной непрерывности оператора B_a^{-1} выполнено условие

$$(B_a^{-1}\zeta_n,\zeta_n) = \int_\Omega \rho_0^{-1}(z)|\nabla\Phi_n)|^2 d\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь в силу оценки для $(\hat{G}_B\zeta,\zeta)$ получим, что $\left|(\hat{G}_B\zeta,\zeta)\right| \to 0$ при $n \to \infty$ для любой слабосходящейся к нулю последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$, откуда следует, что $\hat{G}_B$ принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$. Кроме того, доказано неравенство

$$\left\|\hat{G}_B\right\| \le \frac{2g}{c^2}\lambda_1^{1/2}(B_a^{-1}).$$

2.2. Факторизация операторного пучка. Для исследования оператор-функции $L(\mu)$ из (25) воспользуемся теоремой о факторизации из [8, с. 178]. Перед тем как применить эту теорему, выполним в (25) замену $\mu = 1/\nu$ спектрального параметра. В результате получим операторный пучок

$$M(\nu) := \nu I - B_a^{-1} + \nu\hat{G}_A + \nu\hat{G}_B + \nu^2 F_1(\nu^{-1}), \qquad \nu\in[0, N_a^{-2}], \tag{26}$$

$$F_1(\nu^{-1}) := Q^*(I - \nu A_{11}^a)^{-1}Q.$$

Использовав оценки для норм операторов Q, Q^*, $\hat{G}_B$, $\hat{G}_A$, входящих в этот пучок, и общую теорему о факторизации из [8, с. 178], придем к следующему утверждению.

Теорема 1 (достаточное условие факторизации). *При выполнении условия*

$$\lambda_1(B_a) > \max\left\{\left(\sqrt{N_a^2 + \frac{g^2}{c^4}} - \frac{g}{c^2}\right)^2, 4\frac{g^2}{c^4}\right\} \tag{27}$$

оператор-функция $M(\nu)$ *допускает факторизацию вида* $M(\nu) = M_+(\nu) \times (\nu I - Z)$, *где* $M_+(\nu)$ *голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка* $[-\varepsilon_1, (N_a^2+\varepsilon_2)^{-1}]$, *а оператор* Z *подобен самосопряженному и такой, что* $\sigma(Z) \subset [-\varepsilon_1, (N_a^2+\varepsilon_2)^{-1}]$ *при некотором выборе чисел* ε_1 *и* ε_2.

С помощью метода неопределенных коэффициентов легко проверить, что $Z = M_0^{-1}B_a^{-1} = (I+T)B_a^{-1}$, где $T\in\mathfrak{S}_\infty$, т. е. Z — слабовозмущенный компактный оператор, причем $\operatorname{Ker} Z = \{0\}$.

2.3. О полноте системы мод акустических волн.

Теорема 2. *Если выполнено условие факторизации* (27), *то задача* (25) *при* $\lambda > N_0^2$ *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k = (\mu_k - a) = (\nu_k(Z)^{-1} - a)$, *состоящий из конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой* $\lambda = +\infty$.

Соответствующие им собственные векторы $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *образуют полную и минимальную систему в пространстве* $W_2^1(\Omega;\rho_0^{-1})$.

Доказательство. Поскольку оператор-функция $M_+(\nu)$ обратима, при выполнении условия факторизации задача (25) эквивалентна задаче на собственные значения для слабовозмущенного вполне непрерывного оператора Z. Осталось применить теорему М. В. Келдыша о слабовозмущенном операторе (см. [9]) и соотношения между спектральными параметрами λ, μ и ν.

Теорема 3. *Если выполнено условие факторизации* (27), *то решениям задачи* (24) $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при* $\lambda > N_0^2$ *соответствуют моды колебаний* $U_k = (\vec{u}_k, \Phi_k)^T$, $k = 1, 2, \ldots$, *имеющие характер акустических волн. А именно: при нормировке*

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2}^2 + \|\Phi_k\|_{1,\Omega}^2 = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

имеют место асимптотические формулы

$$\|\vec{u}_k\|_{L_2} \to 0, \qquad \left\| B_0^{-1}\Phi_k - \frac{1}{\lambda_k}\Phi_k \right\|_{1,\Omega} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{28}$$

Доказательство. Запишем систему (24), положив $\Phi = \Phi_k$ и $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$ (элементы Φ_k и числа λ_k построены по собственным векторам и собственным значениям задачи (25)), и выполнив замену $\Phi_k = B_0^{-1/2}\zeta_k$. После некоторых преобразований получим

$$\vec{u}_k = \lambda_k^{-1}(I - \lambda_k^{-1}A_{11}^{-1})Q\Phi_k,$$
$$\lambda_k B_0^{-1}\zeta_k - \zeta_k = Q^*\vec{u}_k + S\zeta_k,$$

после чего перейдем к пределу при $k \to \infty$. Из первого из соотношений имеем $\|\vec{u}_k\|_{L_2} \to 0$, а из второго — $\left\|B_0^{-1}\zeta_k - \lambda_k^{-1}\zeta_k\right\|_{1,\Omega} \to 0$. Переходя от ζ_k к Φ_k, получаем утверждение теоремы.

2.4. Симметризатор спектральной задачи. Введем в рассмотрение оператор F по формуле

$$F = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\nu|=t} M^{-1}(\nu)\,d\nu, \qquad \lambda_1(B_a^{-1}) < t < N_a^{-2}, \tag{29}$$

где оператор-функция $M(\nu)$ определена в (26). В работе [8] для оператор-функций такого вида доказано следующее утверждение.

Лемма 9. *Оператор* F *является самосопряженным, ограниченным и симметризующим справа оператор* Z, *т. е.* $(ZF)^* = ZF$.

Кроме того, рассуждения, аналогичные приведенным в [8], позволяют доказать следующее утверждение.

Лемма 10. *Оператор* F *является положительно определенным и имеет структуру* $F = I + F_1$, *где* $F_1 \in \mathfrak{S}_p$ *(при* $p > 3$).

2.5. Базисность системы мод акустических волн. Предварительно приведем следующее определение.

Определение 2. *Система векторов* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *называется* p*-базисом гильбертова пространства* H, *если входящие в нее векторы* y_k *имеют вид* $y_k = (I + K)x_k$, *где* K *— вполне непрерывный оператор из класса* $\mathfrak{S}_p$ *при некотором* $p > 0$, *причем оператор* $(I + K)$ *ограниченно обратим, а векторы* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *образуют ортонормированный базис пространства* H.

Наличие симметризатора F (и его структура, описанная выше) оператора Z

позволяет, при выполнении условия (27), доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *При выполнении условия* (27) *система собственных векторов задачи* (25) *образует* p-*базис* (*при* $p > 3$) *пространства* $W_2^1(\Omega; \rho_0^{-1})$.

Доказательство следует из эквивалентности, при выполнении условий этой теоремы, задачи (25) задаче на собственные значения для слабовозмущенного вполне непрерывного оператора Z. Наличие же симметризатора для Z позволяет привести эту задачу к задаче на собственные значения для самосопряженного вполне непрерывного оператора.

2.6. Волны, порожденные стратификацией. Будем считать, что $\mu \in \in [a, N_a^2]$. Вернемся к исследуемой системе (24).

На отрезке $[a, N_a^2]$ оператор $b(\mu) := I + \hat{G} - \mu B_a^{-1}$ обратим всюду, за исключением конечного числа точек. Это следует из того, что по теореме М. В. Келдыша (см. [8]) оператор-функция $b(\mu)$ обратима всюду, за исключением не более чем счетного множества изолированных точек с предельной точкой $\mu = \infty$. На отрезке $[a, N_a^2]$ этих точек не более конечного числа, т. е. утверждение об обратимости оператора $b(\mu)$ доказано.

В тех же точках, где оператор $b(\mu)$ обратим, имеем спектральную задачу

$$\lambda \vec{u} = (A_{11} - QQ^* + B(\lambda))\vec{u}, \tag{30}$$

где оператор-функция $B(\mu)$ принимает значения на множестве самосопряженных вполне непрерывных операторов.

Далее нам снова понадобится результат работы [5] о предельном спектре оператора A_{11} и связь между спектральными параметрами λ и μ. Опираясь на них и на теоремы о компактном и ограниченном возмущениях, можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Предельный спектр задачи* (18) *лежит на отрезке* $[0, N_0^2 + (g/c)^2]$.

Таким образом, проведенные в данной статье исследования показывают, что в сжимаемой стратифицированной жидкости существуют внутренние волны двух типов. Первые волны порождены сжимаемостью (см. теорему 2), а вторые — стратификацией (см. теорему 5).

Автор выражает благодарность профессору Н. Д. Копачевскому за внимание к работе и ценные обсуждения.

1. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
2. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1986. – **26**, № 5. – С. 734 – 753.
3. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при постоянной частоте плавучести // Вопросы волновых движений жидкости (сб. научн. тр.). – Краснодар: Кубан. ун-т, 1987. – С. 48 – 71.
4. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при произвольной частоте плавучести // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 10. – С. 1784 – 1796.
5. *Копачевский Н. Д., Царьков М. Ю.* К вопросу о спектре оператора плавучести // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1987. – № 3. – С. 548 – 551.
6. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.
7. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей. – Л., 1985. – 79 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 8058-В.
8. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
9. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – **24**, вып. 4 (160). – С. 15 – 41.

Получено 18.11.2005,
после доработки — 13.06.2006