УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Міжнар. мат. центр НАН України, Київ),
В. Д. Залізко (Нац. пед. ун-т, Київ)

ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ КООПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Pointwise estimates of the coconvex approximation of functions belonging to the class W^r, $r > 3$, are obtained.

Отримано поточкові оцінки коопуклого наближення функцій із класу W^r, $r > 3$.

1. Вступ. Нехай W^r, $r \in N$, — множина функцій $f \in C[-1, 1]$, які мають $(r-1)$-шу абсолютно неперервну похідну на $I := [-1, 1]$ і для яких при майже всіх $x \in I$ виконується нерівність

$$\left| f^{(r)}(x) \right| \le 1.$$

Позначимо через $Y := \{ y_i \}_{i=1}^{s}$, $s \in N$, набір з s фіксованих точок y_i:

$$y_{s+1} := -1 < y_s < \ldots < y_1 < 1 =: y_0.$$

Нехай $\Delta^{(2)}(Y)$ — множина неперервних на I функцій, які є опуклими донизу на відрізку $[y_{i+1}, y_i]$, якщо i — парне, і опуклими догори на тому ж самому відрізку, якщо i — непарне. Функції з $\Delta^{(2)}(Y)$ називаються коопуклими. Нехай

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{s} (x - y_i), \qquad \Pi(x, \varnothing) \equiv 1$$

(зауважимо, що якщо f є двічі диференційовною, то $f \in \Delta^{(2)}(Y) \Leftrightarrow \Leftrightarrow f''(x)\Pi(x) \ge 0,\ x \in I$),

$$\rho_n(x) := \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}, \qquad n \in N, \quad x \in I.$$

У цій роботі доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо* $r > 3$, $s \ge 2$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y)$, *то для кожного натурального* $n > N(Y, r)$ *існує алгебраїчний многочлен* P_n *степеня* $\le n$ *такий, що*

$$P_n''(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in I, \tag{1}$$

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \le C(Y, r)\rho_n^r(x), \quad x \in I, \tag{2}$$

де $N(Y, r)$ *і* $C(Y, r)$ — *сталі, які залежать лише від* $\min_{i=0,\ldots,s}(y_i - y_{i+1})$ *і* r.

Для $r = 1, 2, 3$ теорема 1 також є справедливою. Для $r = 1, 2$ вона є наслідком результатів роботи [1], а для $r = 3$ — роботи [2]. Для $s = 1$, $r > 2$ теорема 1, взагалі кажучи, не є вірною (див. [1], теорема 2). З [1, 2], теореми 1 і роботи [3] (для „малих” n) випливає така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $r \in N$, $s \ge 2$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y)$, *то для кожного натурального* $n \ge r - 1$ *існує алгебраїчний многочлен* P_n *степеня* $\le n$ *такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y),$$

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \le C(Y, r)\rho_n^r(x), \quad x \in I, \tag{3}$$

де $C(Y, r)$ — *стала, яка залежить лише від* $\min_{i=0,\ldots,s}(y_i - y_{i+1})$ *і* r.

На цей час вже отримано точні за порядком рівномірні і поточкові оцінки як чисто опуклого ($s = 0$, тобто без точок перегину), так і коопуклого ($s \geq 1$) наближення недиференційовних ($r = 0$) і „слабко" диференційовних ($r = 1, 2$) функцій (див., наприклад, [2, 4]). Наведемо чотири результати щодо (ко)опуклого наближення функцій для випадку $r \geq 3$. Для $s = 0$ поточкову оцінку у класичній формі

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \leq c(r,k)\rho_n^r(x)\omega_k\left(f^{(r)}; \rho_n(x)\right), \quad x \in I, \quad n \geq k + r - 1, \tag{4}$$

де $\omega_k(\cdot)$ — k-й модуль неперервності і $c(r,k)$ — стала, було доведено в [5] ($r = 0$, $k = 3$) і Манія (див. [6, с. 148]) ($r > 1$, $k \in N$). У роботі [7] встановлено, що (4) не виконується для $r = 0$, $k \geq 4$ (навіть з $1/n$ замість $\rho_n(x)$). Для $s \geq 1$ аналогічний негативний результат доведено в [8]. Kopotun, Leviatan і Шевчук люб'язно повідомили, що ними доведено рівномірний аналог оцінки (4) ($s \geq 1$, $r \geq 3$, $k \in N$), який включає модуль неперервності Ditzian – Totik.

Загальну схему доведення теореми 1 запозичено в [9, 10]. Вона ґрунтується на ідеї DeVore [11] зображення похідної (тут $f''(x)$) сумою двох функцій: „великої" і „малої", на використанні поліноміальних ядер типу Дзядика [12, 6] і на „монотонному" розбитті одиниці DeVore і Yu [13]. Теорему 1 буде доведено в п. 2. У п. 3 у зручній для нас формі наведено міркування з [3], які доводять теорему 2 для $r - 1 \leq n \leq N(Y, r)$.

2. Означення і допоміжні твердження. 1. Нехай точки $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \ldots, n$, складають чебишовське розбиття відрізка I. Позначимо

$$I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \quad h_j := h_{j,n} := x_{j-1} - x_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Без спеціальних посилань будемо використовувати нерівності

$$h_{j\pm1} \leq 3h_j,$$

$$\rho_n(x) < h_j < 5\rho_n(x), \quad x \in I_j,$$

$$\rho_n^2(y) < 4\rho_n(x)\left(|x-y| + \rho_n(x)\right), \quad x, y \in I,$$

$$2\left(|x-y| + \rho_n(x)\right) > |x-y| + \rho_n(y) > \frac{|x-y| + \rho_n(x)}{2}, \quad x, y \in I.$$

Для фіксованих $n \in N$ і $Y = \{y_i\}_{i=1}^s$ позначимо

$$O_i := O_{i,n} := O_{i,n}(Y) := (x_{j+2}, x_{j-3}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{n+2} = x_{n+1} := -1$, $x_{-1} = x_{-2} = x_{-3} := 1$,

$$O := O(n, Y) := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Будемо писати $j \in H := H(n, Y)$, якщо $I_j \cap O = \varnothing$, $j = \overline{1,n}$. Виберемо число $N(Y)$ так, щоб для кожного $n \geq N(Y)$ будь-який інтервал (y_{i+1}, y_i), $i = \overline{1, s-1}$, містив принаймні сім різних відрізків I_j.

Через c будемо позначати додатні сталі, які можуть залежати лише від r, s і деякого фіксованого числа $b \in N$, тобто $c := c(r, s, b)$. Ці сталі, взагалі кажучи, є різними, навіть якщо вони знаходяться в одному рядку. Якщо далі є посилання на значення цих сталих, то будемо писати $c_\nu := c_\nu(r, s, b)$. Дотримуючись [6], покладемо

$$t_j(x) := t_{j,n}(x) := \frac{\cos^2 2n\arccos x}{\left(x - x_j^0\right)^2} + \frac{\sin^2 2n\arccos x}{\left(x - \bar{x}_j\right)^2}, \quad n \in N,$$

де

$$\bar{x}_j = \frac{\cos(j-1/2)\pi}{n}, \qquad x_j^0 = \cos\beta_j^0, \qquad \beta_j^0 = \begin{cases} \dfrac{(j-1/4)\pi}{n}, & \text{коли } j \le \dfrac{n}{2}, \\ \dfrac{(j-3/4)\pi}{n}, & \text{коли } j > \dfrac{n}{2}. \end{cases}$$

Точки $\bar{x}_j$ і x_j^0 є нулями відповідних чисельників і знаходяться строго в середині I_j, а t_j — алгебраїчні многочлени степеня $4n-2$ такі, що

$$t_j(x) \le \frac{c}{\left(|x - x_j| + h_j\right)^2} \le c\,t_j(x), \quad x \in I$$

$$\left(t_j(x) \le \frac{10^3}{h_j^2}, \qquad x \in I_j \right).$$

Наслідуючи [1, 4, 5], для кожного $j \in H$ розглянемо чотири многочлени степеня cn:

$$T_j(x) := T_{j,n}(x; b; Y) := \frac{1}{d_j}\int_{-1}^{x} t_j^b(u)\Pi(u)\,du,$$

$$\bar{T}_j(x) := \bar{T}_{j,n}(x; b; Y) := \frac{1}{\bar{d}_j}\int_{-1}^{x} (u - x_j)(x_{j-1} - u)t_j^{b+1}(u)\Pi(u)\,du,$$

де

$$d_j := d_{j,n}(b; Y) := \int_{-1}^{1} t_j^b(u)\Pi(u)\,du,$$

$$\bar{d}_j := \bar{d}_{j,n}(b; Y) := \int_{-1}^{1} (u - x_j)(x_{j-1} - u)t_j^{b+1}(u)\Pi(u)\,du,$$

і

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x; b; Y) := \alpha\int_{-1}^{x} T_{j+1}(u)\,du + (1-\alpha)\int_{-1}^{x} T_{j-1}(u)\,du,$$

$$\bar{\tau}_j(x) := \bar{\tau}_{j,n}(x; b; Y) := \beta\int_{-1}^{x} \bar{T}_{j+1}(u)\,du + (1-\beta)\int_{-1}^{x} \bar{T}_{j-1}(u)\,du,$$

де α і $\beta \in [0, 1]$ вибрано з умови

$$\tau_j(1) = \bar{\tau}_j(1) = 1 - x_j,$$

і $T_0(x) \equiv \bar{T}_0(x) :\equiv 0$, $T_{n+1}(x) \equiv \bar{T}_{n+1}(x) :\equiv 1$.

Нехай

$$\chi(x; a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a, \\ 1, & \text{якщо } x > a, \end{cases} \qquad a \in I,$$

$$\chi_j(x) := \chi(x; x_j),$$

$$(x-a)_+ := (x-a)\chi(x; a),$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \frac{h_j}{|x-x_j| + h_j}.$$

Зауважимо, що

$$h_j \Gamma_j(x) \le c\rho_n(x), \quad x \in I. \tag{5}$$

Лема 1 [1, 4, 5]. *Якщо* $j \in H$ *і* $b \ge 6(s+2)$, *то*

$$\tau_j''(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \ge 0, \quad x \in I, \tag{6}$$

$$\bar{\tau}''(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \le 0, \quad x \in I \setminus I_j, \tag{7}$$

$$\tau_j'(\pm 1) = \bar{\tau}'(\pm 1) = \chi_j(\pm 1),$$

$$\tau_j(\pm 1) = \bar{\tau}(\pm 1) = (\pm 1 - x_j)_+,$$

$$\left|(x-x_j)_+ - \tau_j(x)\right| \le c_1 h_j (\Gamma_j(x))^{2b-s-2}, \quad x \in I, \tag{8}$$

$$\left|(x-x_j)_+ - \bar{\tau}_j(x)\right| \le c_1 h_j (\Gamma_j(x))^{2b-s-2}, \quad x \in I, \tag{9}$$

$$\left|\chi_j(x) - \tau_j'(x)\right| \le c_2 (\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \quad x \in I,$$

$$\left|\chi_j(x) - \bar{\tau}_j'(x)\right| \le c_2 (\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \quad x \in I,$$

$$\left|\tau_j''(x)\right| \le c_3 \frac{1}{h_j} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s}, \quad x \in I, \tag{10}$$

$$\left|\bar{\tau}_j''(x)\right| \le c_3 \frac{1}{h_j} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s}, \quad x \in I. \tag{11}$$

Зокрема, якщо $j \ne n$, *то*

$$c_4 \frac{1}{h_j} \Gamma_j^{2b}(x) \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \le \left|\tau_j''(x)\right| \le c_5 \frac{1}{h_j} \Gamma_j^{2b}(x) \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I, \tag{12}$$

$$c_4 \frac{1}{h_j} \Gamma_j^{2b}(x) \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \le \left|\bar{\tau}_j''(x)\right| \le c_5 \frac{1}{h_j} \Gamma_j^{2b}(x) \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I \setminus I_j, \tag{13}$$

$$\left|\tau_j''(x)\right| \ge c_6 \frac{1}{h_j} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x \in I \setminus O, \tag{14}$$

$$\left|\bar{\tau}_j''(x)\right| \ge c_6 \frac{1}{h_j} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x \in I \setminus (O \cup I_j). \tag{15}$$

Крім того, якщо $n \ge N(Y)$, *то*

$$\left|\tau_j''(x)\right| \ge c_7 \frac{1}{h_j} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i, \quad i = \overline{1,s}, \tag{16}$$

$$\left|\bar{\tau}_j''(x)\right| \ge c_7 \frac{1}{h_j} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i, \quad i = \overline{1,s}. \tag{17}$$

***Зауваження* 1.** При доведенні леми 1 було застосовано, зокрема, нерівності

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \le \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)} + 1\right)^s, \quad x \in I, \quad y \in I \setminus O,$$

$$\gamma_j^2(x) \ < \ 16\Gamma_j(x), \qquad \Gamma_j^2(x) \ < \ 400\gamma_j(x), \quad x \in I,$$

де $\gamma_j(x) := \rho_n(x)/\left(\left|x - x_j\right| + \rho_n(x)\right)$. Доведення оцінок (12) – (15) спираються на нерівності (6), (7) і тотожності $\left|\tau_j''(x)\right| \equiv \alpha\left|T_{j+1}'(x)\right| + (1-\alpha)\left|T_{j-1}'(x)\right|$, $\left|\bar{\tau}_j''(x)\right| \equiv \beta\left|\bar{T}_{j+1}'(x)\right| + (1-\beta)\left|\bar{T}_{j-1}'(x)\right|$, а доведення оцінок (16) і (17) — крім того, на співвідношення $O_i \cap O_{i-1} = \varnothing$, $i = \overline{2, s}$.

Далі зафіксуємо $n \geq N(Y)$. Для довільного інтервалу $E = \left(x_{j_1}, x_{j_2}\right) \subset I$, $j_1 > j_2$, позначимо

$$^*E \ := \ \left(x_{j_1+1}, x_{j_2}\right) \cap I; \qquad \left|E\right| \ := \ x_{j_2} \ - \ x_{j_1}.$$

Лема 2. *Якщо* $s \geq 2$ *і функція* $g \in \Delta^{(2)}(Y)$ *має „маленьку” другу похідну*

$$\left|g''(x)\right| \ \leq \ \rho_n^{r-2}(x), \qquad x \in I, \quad r \ \geq \ 3, \tag{18}$$

то існує многочлен $G_n(x) := G_n(x; g)$ *степеня* cn *такий, що*

$$G_n''(x)\Pi(x) \ \geq \ 0, \quad x \in I, \tag{19}$$

і

$$\left|g(x) - G_n(x)\right| \ \leq \ c(Y, r)\rho_n^r(x), \quad x \in I, \tag{20}$$

де $c(Y, r)$ *— стала, яка залежить лише від* $\min_{i=0,\ldots,s}(y_i - y_{i+1})$ *і* r.

Доведення. Нехай $\bar{L}(x)$ — неперервна ламана, яка інтерполює g на I в кожній точці набору $\left\{x_j, \ j \in H\right\} \cup Y$ (тобто, взагалі кажучи, $\bar{L}(\pm 1) \neq g(\pm 1)$). Напевно $\bar{L}(x) \in \Delta^{(2)}(Y)$. „Підправимо” $\bar{L}$ так, щоб нова ламана $L \in \Delta^{(2)}(Y)$ і точки Y не були її вузлами. Нехай

$$\left(\underline{y_i}, \overline{y_i}\right) \ := \ {}^*O_i, \quad i \ = \ \overline{1, s}, \qquad {}^*O \ := \ \bigcup_{i=1}^{s} {}^*O_i;$$

$l(x; a, b)$ — пряма, яка інтерполює $g(x)$ в a і b; $\bar{i}$ — такий парний індекс $i = \overline{2, s}$, для якого $\left|{}^*O_{\bar{i}}\right| = \max_{i\,-\,\text{парне}}\left|{}^*O_i\right|$ (якщо таких індексів два, то нехай $\bar{i}$ — більший з них); аналогічно, $\underline{i} : \left|{}^*O_{\underline{i}}\right| = \max_{i\,-\,\text{непарне}}\left|{}^*O_i\right|$. Для кожного $i = \overline{1, s}$ позначимо

$$l_i \ := \ \begin{cases} \max\left\{l'\left(x; \underline{y_i}, y_i\right), l'\left(x; y_i, \overline{y_i}\right)\right\}, & \text{якщо } i - \text{парне}, \\ \min\left\{l'\left(x; \underline{y_i}, y_i\right), l'\left(x; y_i, \overline{y_i}\right)\right\}, & \text{якщо } i - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$\Delta_i \ := \ \int\limits_{\underline{y_i}}^{\overline{y_i}} \left(l_i - \bar{L}'(t)\right) dt$$

(тобто $\Delta_i \geq 0$, коли i — парне, і $\Delta_i \leq 0$, коли i — непарне). Покладемо

$$L'(x; A, B) \ := \ \begin{cases} \bar{L}'(x), & x \in (-1, 1) \setminus {}^*O, \\ l_i, & x \in {}^*O_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad i \neq \bar{i} \vee \underline{i}, \\ A, & x \in {}^*O_{\bar{i}}, \\ B, & x \in {}^*O_{\underline{i}}, \end{cases}$$

де числа $A \geq l_{\bar{i}}$ і $B \leq l_{\underline{i}}$ вибрано з умови

$$L(1; A, B) := \int_{-1}^{1} L'(t; A, B)\,dt = \bar{L}(1).$$

А саме, нехай $\Delta := L\big(1; l_{\bar{i}}, l_{\underline{i}}\big) - \bar{L}(1)$ і

$$A = l_{\bar{i}}, \quad B = l_{\underline{i}} - \frac{\Delta}{\left|{}^{*}O_{\underline{i}}\right|}, \quad \text{якщо} \quad \Delta \geq 0,$$

$$A = l_{\bar{i}} - \frac{\Delta}{\left|{}^{*}O_{\bar{i}}\right|}, \quad B = l_{\underline{i}}, \quad \text{якщо} \quad \Delta < 0.$$

Отже,

$$L(x) := L(x; A, B) := \int_{-1}^{x} L'(t; A, B)\,dt \in \Delta^{(2)}(Y),$$

і точки Y не є вузлами L. Тому

$$\Pi(x_j)[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L] \geq 0, \quad j \in H, \tag{21}$$

$$[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L] = 0, \quad j \notin H, \tag{22}$$

де $[\cdot]$ — друга поділена різниця L.

Оцінимо $\big|g(x) - L(x)\big|$, $x \in I$. Нерівність

$$\big|g(x) - L(x; x_j, x_{j-1})\big| \leq \int_{x_j}^{x} \int_{\Theta}^{t} |g''(u)|\,du\,dt \leq c\rho_n^r(x),$$

$$\Theta \in I_j, \quad x \in [x_{j+1}, x_{j-2}],$$

і аналогічна нерівність для $x \in {}^{*}O_i$, $i = \overline{1, s}$, приводять до оцінки

$$\big|g(x) - \bar{L}(x)\big| \leq c\rho_n^r(x), \quad x \in I.$$

Крім того, для $x \in \big[-1, \underline{y_s}\big] \cup \big[\overline{y_1}, 1\big]$ $L(x) - \bar{L}(x) \equiv 0$; для решти x врахуємо, що $\big|\Delta\big| \leq (s-1)\max_{i=1,\ldots,s}|\Delta_i|$, і тоді

$$\big|L(x) - \bar{L}(x)\big| = \left|\int_{\underline{y_s}}^{x} \big(L'(t) - \bar{L}'(t)\big)dt\right| \leq$$

$$\leq 2(s-1)\max_{i=1,\ldots,s} \int_{{}^{*}O_i} \big|l_i - g'(t) + g'(t) - \bar{L}'(t)\big|dt \leq c\max_{i=1,\ldots,s} \rho_n^r(y_i) \leq c_8\rho_n^r(x),$$

де c_8 — додатна стала, яка залежить лише від $\min_{i=0,\ldots,s}(y_i - y_{i+1})$ і r. Отже,

$$\big|g(x) - L(x)\big| \leq \big|g(x) - \bar{L}(x)\big| + \big|\bar{L}(x) - L(x)\big| \leq c_8\rho_n^r(x), \quad x \in I. \tag{23}$$

Зокрема,

$$\big|[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L]\big| = \big|[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L - g + g]\big| \leq$$

$$\leq c_8\frac{\rho_n^r(x_j)}{\rho_n^2(x_j)} + \frac{1}{2}|g''(\Theta)| \leq c_8\rho_n^{r-2}(x_j), \quad \Theta \in (x_{j+1}, x_{j-1}), \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{24}$$

Зобразимо L у вигляді

$$L(x) \equiv l(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L \right](x_{j-1} - x_{j+1})(x - x_j)_+ \equiv$$

$$\equiv l(x) + \sum_{j \in H} \left[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L \right](x_{j-1} - x_{j+1})(x - x_j)_+, \tag{25}$$

де $l(x) := [x_n, x_{n-1}; L](x+1) + L(-1)$; при цьому ми скористались (22). Покладемо $b_1 = 6(s+2) + r$, $\tau_j(x) = \tau_{j,n}(x; b_1; Y)$,

$$G_n(x) := l(x) + \sum_{j \in H} \left[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L \right](x_{j-1} - x_{j+1})\tau_j(x). \tag{26}$$

Нерівності (6) і (21) гарантують виконання співвідношень

$$\left[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L \right](x_{j-1} - x_{j+1})\tau_j''(x)\Pi(x) =$$

$$= \frac{1}{\Pi^2(x_j)}\Big(\Pi(x_j)\left[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L \right]\Big)(x_{j-1} - x_{j+1})\Big(\tau_j''(x)\Pi(x_j)\Pi(x)\Big) \geq 0,$$

$$x \in I, \quad j \in H,$$

що приводить до (19). Оцінка (20) випливає з (5), (8) і (23) – (26). А саме,

$$\left| g(x) - G_n(x) \right| \leq \left| g(x) - L(x) \right| + \left| L(x) - G_n(x) \right| \leq c_8 \rho_n^r(x) +$$

$$+ \sum_{j \in H} \left[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}; L \right](x_{j-1} - x_{j+1})\Big((x - x_j)_+ - \tau_j(x)\Big) \leq$$

$$\leq c_8 \rho_n^r(x) + c c_8 \sum_{j \in H} \rho_n^{r-2}(x_j)(x_{j-1} - x_{j+1})\rho_n(x_j)\left(\frac{\rho_n(x_j)}{\left| x - x_j \right| + \rho_n(x_j)} \right)^{2b_1 - s - 2} \leq$$

$$\leq c_8 \rho_n^r(x) + c c_8 \sum_{j=1}^{n} h_j^r \Gamma_j^{r+11s}(x) \leq$$

$$\leq c c_8 \rho_n^r(x)\left(1 + \rho_n(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{\left(\left| x - x_j \right| + \rho_n(x) \right)^2} \right) \leq c c_8 \rho_n^r(x), \quad x \in I.$$

Лему 2 доведено.

2. Нехай $\beta := \arccos x$, $x \in I$; $\alpha := \arccos y$, $y \in I$;

$$l := 24(r-1)s + 3(r-1) + s + 3$$

і

$$D_{2l+1,n,l}(y, x) := \frac{1}{(2l)!} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial x^{2l+1}} (x - y)^{2l} \int_{\beta - \alpha}^{\beta + \alpha} J_{n,l}(t)\,dt \tag{27}$$

— поліноміальне ядро типу Дзядика [6, с. 129], де

$$J_{n,l}(t) = \frac{1}{\gamma_{n,l}} \left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right]^{2(l+1)}, \quad \gamma_{n,l} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2(l+1)} dt$$

— ядро типу Джексона.

Нехай функція $g = g(x)$ є неперервною на I і $L_{r-1}(x; g)$ позначає многочлен Лагранжа степеня $\leq r - 1$, який інтерполює g у точках $-1 + 2i/(r-1)$, $i = \overline{0, r-1}$.

Лема 3 [6, с. 135]. *Якщо* $g \in W^r$, $r \geq 3$ *і* $g''(x) = 0$ *для* $x \in F \subset I$, *то многочлен*

$$D_n(x;g) := \int_{-1}^{1} \big(g(y) - L_{r-1}(y;g)\big) D_{2l+1,n,l}(y,x)\,dy + L_{r-1}(x;g) \tag{28}$$

степеня cn *наближає* g *та її похідні на* I *так, що*

$$\left| g^{(p)}(x) - D_n^{(p)}(x;g) \right| \le c_9 \rho_n^{r-p}(x) \left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, I \setminus F) + \rho_n(x)} \right)^{l-2r}, \tag{29}$$

$$p = 0 \vee 1 \vee 2 \vee 3, \quad x \in I,$$

зокрема

$$\left| g^{(p)}(x) - D_n^{(p)}(x;g) \right| \le c_9 \rho_n^{r-p}(x), \quad x \in I. \tag{30}$$

3. Для кожного $i = \overline{1,s}$ позначимо

$$Y_i := Y \setminus \{ y_i \}; \qquad \left(x_{j_i+3}, x_{j_i-3} \right) := {}^*O_i;$$

$j_i^* := j_i + 2$, а у випадку $j_s + 2 = -1$ нехай $j_s^* := j_s - 2$;

$$\check{\tau}_{i,n}(x) := \tau_{j_i^*,n}(x; b_2; Y_i) - \bar{\tau}_{j_i^*,n}(x; b_2; Y_i),$$

де

$$b_2 := l - r + s - 1.$$

Нехай

$$K_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in I \setminus O, \\ \dfrac{|x - y_i|}{h_{j_i}}, & \text{якщо } x \in O_i \subset O,\ i = \overline{1,s}. \end{cases}$$

Лема 4. *Якщо* $g \in W^r$, $g''(x) = 0$, $x \in F \subset I$, *і* $g''(y_i) = 0$, $i = \overline{1,s}$, *то многочлен*

$$Q_n(x;g) := D_n(x;g) - \sum_{j=1}^{s} \frac{D_n''(y_i;g)}{\check{\tau}_{i,n}''(y_i)} \check{\tau}_{i,n}(x) \tag{31}$$

степеня cn *задовольняє нерівності*

$$\left| g(x) - Q_n(x;g) \right| \le c_{10} \rho_n^r(x), \quad x \in I, \tag{32}$$

$$\left| g''(x) - Q_n''(x;g) \right| \le c_{11} \rho_n^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, I \setminus F) + \rho_n(x)} \right)^{l-2r} K_n(x), \quad x \in I, \tag{33}$$

зокрема

$$\left| g''(x) - Q_n''(x;g) \right| \le c_{11} \rho_n^{r-2}(x) K_n(x), \quad x \in I. \tag{34}$$

Доведення. З рівності $g''(y_i) = 0$ і оцінок (30), (5) – (9), (14), (15) випливає нерівність

$$\left| V_{i,n}(x) \right| := \left| \frac{D_n''(y_i;g)}{\check{\tau}_{i,n}''(y_i)} \check{\tau}_{i,n}(x) \right| \le$$

$$\le c_9 \rho_n^{r-2}(y_i) \left(2c_6 \frac{1}{h_{j_i^*}} \left(\Gamma_{j_i^*}(y_i) \right)^{2b_2 + 2(s-1)} \right)^{-1} 2c_1 h_{j_i^*} \left(\Gamma_{j_i^*}(x) \right)^{2b_2 - s - 1} \le$$

$$\leq \; ch_{j_i^*}^r \left(\Gamma_{j_i^*}(x)\right)^{2b_2-s-1} \;\leq\; c\rho_n^r(x), \quad x \in I.$$

Тому нерівність (32) виконується. Аналогічно (29), (10) і (11) приводять до оцінки

$$\left|V_{i,n}''(x)\right| \;\leq$$

$$\leq\; c_9\,\rho_n^{r-2}(y_i)\left(\frac{\rho_n(y_i)}{\operatorname{dist}\left(y_i, I\setminus F\right)+\rho_n(y_i)}\right)^{l-2r} c\left(\frac{1}{h_{j_i^*}}\right)^{-1} 2c_3\,\frac{1}{h_{j_i^*}}\left(\Gamma_{j_i^*}(x)\right)^{2b_2-(s-1)} \;\leq$$

$$\leq\; c\rho_n^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_n(y_i)}{\operatorname{dist}\left(y_i, I\setminus F\right)+\rho_n(y_i)}\right)^{l-2r}\left(\frac{\rho_n(x)}{|x-y_i|+\rho_n(x)}\right)^{(2b_2-(s-1)-(r-2))/2} \;\leq$$

$$\leq\; c\rho_n^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}\left(x, I\setminus F\right)+\rho_n(x)}\right)^{l-2r} =:\; c\rho_n^{r-2}(x)\Omega, \quad x\in I, \tag{35}$$

з якої з урахуванням (29) отримуємо (33), коли $x \in I\setminus O$. З (35) і нерівності Дзядика для модуля похідної алгебраїчного многочлена [14] (або див. [6, с. 120]) випливає оцінка

$$\left|V_{i,n}'''(x)\right| \;\leq\; c\rho_n^{r-3}(x)\Omega, \quad x\in I.$$

Ця оцінка разом з умовою $g''(y_i) = 0$ і (29) гарантують виконання (33) для $x\in O_i \subset O$, $i = \overline{1, s}$. Дійсно,

$$\left|g''(x) - Q_n''(x;g)\right| \;=\; \left|\int_{y_i}^{x} g'''(u) - D_n'''(u;g) + \sum_{i=1}^{s} V_{i,n}'''(u)\,du\right| \;\leq$$

$$\leq\; c\frac{|x-y_i|}{h_{j_i}} h_{j_i}\,\rho_n^{r-3}(x)\Omega \;\leq\; c_{11}\,\rho_n^{r-2}(x)\Omega K_n(x).$$

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Якщо множина* $E\subset I\setminus O$ *складається з яких-небудь відрізків* I_j, *то многочлен*

$$U_n(x) \;:=\; U_n(x;E) \;:=\; \sum_{j:\,I_j\subset E} h_j^{r-1}\left(\tau_{j,n}(x;b_3;Y) - \bar{\tau}_{j,n}(x;b_3;Y)\right)\operatorname{Sign}\Pi(x_j), \tag{36}$$

$$b_3 \;:=\; 6(s+2) \,+\, r,$$

степеня cn *задовольняє нерівності*

$$\left|U_n(x)\right| \;\leq\; c_{12}\,\rho_n^r(x), \quad x\in I, \tag{37}$$

$$\left|U_n''(x)\right| \;\leq\; c_{13}\,\rho_n^{r-2}(x), \quad x\in I, \tag{38}$$

$$\left|U_n''(x)\right| \;\geq\; c_{14}\,\rho_n^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x,E)+\rho_n(x)}\right)^{l-2r-1} K_n(x), \quad x\in I\setminus E, \tag{39}$$

$$U_n''(x)\Pi(x) \;\geq\; 0, \quad x\in I\setminus E. \tag{40}$$

Доведення. На підставі (5) з оцінок (8) і (9) випливає (37); з (10) і (11) — (38); з (6) і (7) — (40); з (6), (7) і (14) – (17) — (39).

Лему 5 доведено.

Лема 6. *Якщо* $g \in W^r$ *і на відрізку*

$$J_j := \bigcup_{\nu=0}^{20r} I_{j+\nu}, \quad j = \overline{1, n-20r},$$

серед усіх $I_{j+\nu}$ *знайдеться принаймні* $2r-1$ *відрізків* $I_{j+\nu_p}$, $0 \le \nu_1 < \nu_2 < \ldots$ $\ldots < \nu_{2r-1} \le 20r$, *таких, що на кожному з них є хоча б одна точка* $\tilde{x}_{j+\nu_p} \in I_{j+\nu_p}$, $p = \overline{1, 2r-1}$, *в якій*

$$\left|g\left(\tilde{x}_{j+\nu_p}\right)\right| \le \rho_n^r\left(\tilde{x}_{j+\nu_p}\right),$$

то для всіх $x \in J_j$ *виконується нерівність*

$$|g(x)| \le c_{15}(r)\rho_n^r(x).$$

Лему 6 доводять, використовуючи нерівність Whitney [15]. Зазначимо, що

$$|J_j| = \operatorname{mes} J_j \le c_{16}\,\rho_n(x), \quad x \in J_j. \tag{41}$$

3. Доведення теореми 1. Нехай $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y)$. Зобразимо функцію $f''(x)$ у вигляді суми „маленької” $g_1 = g_1(x)$ і „великої” $g_2 = g_2(x)$ функцій. Позначимо

$$A := \max\{c_{13} + c_{11}, 1\}. \tag{42}$$

Означення 1. *Нехай* $j = \overline{1, n}$. *Будемо писати* $j \in V_1$, *якщо*

$$|f''(x)| \le A c_{15}(r-2)\rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I_j;$$

$j \in V_2$, *якщо* $j \notin V_1$, $O \cap \bigcup_{\nu=-3}^{3} I_{j+\nu} = \varnothing$ *і*

$$|f''(x)| \ge A\rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I_j;$$

$j \in V_3$, *якщо* $j \notin V_1 \cup V_2$. *Покладемо*

$$E_1 := \bigcup_{j \in V_1} I_j; \quad E_2 := \bigcup_{j \in V_2} I_j; \quad E_3 := \bigcup_{j \in V_3} I_j.$$

Множина E_3 (якщо $E_3 \ne \varnothing$) складається з (скінченного числа) відрізків $[a_\nu, b_\nu] =: l_\nu$, які не перетинаються. Кожен відрізок l_ν згідно з лемою 6 (для $f'' \in W^{r-2}$) не може складатись із більш ніж $20(r-2)$ відрізків I_j. (Іншими словами, якщо $j \in V_3$, то між індексами $j, j+1, \ldots, j+20(r-2)$ знайдеться принаймні один, який не належить V_3.) Позначимо

$$E_{1,3} := E_1 \cup \left(\bigcup_{\nu: l_\nu \cap E_1 \ne \varnothing} l_\nu\right).$$

Будемо вважати $E_{1,3} \ne I$ (або, що те саме, $E_2 \ne \varnothing$), інакше $|f''(x)| \le$ $\le A c_{15}^2(r-2)\rho_n^{r-2}(x)$, $x \in I$, і теорема 1 випливає з леми 2. Нехай k_μ — відрізки, які не перетинаються і складають $E_{1,3} = \bigcup_\mu k_\mu$. Через k_{μ_p} позначимо ті з них, які складаються з трьох і чотирьох відрізків I_j (якщо такі є). Покладемо

$$G_1 := \overline{E_{1,3} \setminus \bigcup_p k_{\mu_p}}, \quad G_2 := \overline{I \setminus G_1} \supset E_2.$$

Нехай $G_2^* := G_2^*(n)$ позначає об’єднання всіх I_j, $j = \overline{1, n}$, таких, що $I_j \cap G_2 \ne$ $\ne \varnothing$; $G_2^{**} := G_2^{**}(n)$ — об’єднання всіх I_j таких, що $I_j \cap G_2^* \ne \varnothing$; аналогічно, $G_2^{***} = \left(G_2^{**}\right)^* = \left(\left(G_2^*\right)^*\right)^*$. Очевидно, $G_2 \subset G_2^* \subset G_2^{**} \subset G_2^{***} \subset I$. Для кожного $j = \overline{1, n}$ позначимо

$$S_j(x) := \int_{x_j}^{x} (y - x_j)^{r-2}(x_{j-1} - y)^{r-2}\, dy \left(\int_{x_j}^{x_{j-1}} (y - x_j)^{r-2}(x_{j-1} - y)^{r-2}\, dy \right)^{-1}.$$

Означення 2. *Нехай* $x \in I_j$. *Покладемо*

$$g_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } I_j \subset G_2^*, \\ f''(x), & \text{якщо } I_j \subset \overline{I \setminus G_2^{**}}, \\ f''(x) S_j(x), & \text{якщо } I_j \subset \overline{G_2^{**} \setminus G_2^*} \text{ і } x_j \in G_2^*, \\ f''(x)\big(1 - S_j(x)\big), & \text{якщо } I_j \subset \overline{G_2^{**} \setminus G_2^*} \text{ і } x_j \notin G_2^*, \end{cases}$$

$$g_2(x) := f''(x) - g_1(x).$$

Введемо

$$f_1(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1) + \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t} g_1(u)\,du\,dt, \qquad f_2(x) := \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t} g_2(u)\,du\,dt$$

(тобто $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$). Відмітимо, що

$$f_1,\, f_2 \in c_{17} W^r \cap \Delta^{(2)}(Y) \tag{43}$$

і

$$|f_1''(x)| \le c_{17} A c_{15}^2 (r-2) \rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I. \tag{44}$$

Позначимо

$$A_1 := \max\left\{ (c_{17})^{r-2}, \left(\frac{c_{17} c_{11} (c_{16}+1)^{l-2r-1}}{c_{14}} \right)^{r-3}, \right.$$
$$\left. \left(\frac{c_{17} c_{11} 14^{l-2r-1}}{c_{14}} \right)^{r-3}, \left(\frac{c_{17} c_{11} 66^{l-2r-1}}{c_{14}} \right)^{r-2} \right\},$$

$$n_1 := [A_1 + 1]\, n,$$

де $[\cdot]$ — ціла частина. Зауважимо, що

$$A_1 \frac{\rho_{n_1}(x)}{\rho_n(x)} < 1, \quad x \in I. \tag{45}$$

Доведемо, що многочлен

$$P_{n_1}(x) := G_n(x; f_1) + Q_{n_1}(x; f_2) + U_n(x; E_2), \tag{46}$$

визначений за формулами (26), (31) і (36), є шуканим в теоремі 1. Нерівність (2) безпосередньо випливає з оцінок (44), (20), (32) і (37). Доведемо (1), тобто доведемо нерівність

$$G_n''(x; f_1)\Pi(x) + \left(f_2''(x) + Q_{n_1}''(x; f_2) - f_2''(x) + U_n''(x; E_2)\right)\Pi(x) =:$$
$$=: \Psi_1(x) + \Psi_2(x) \ge 0, \quad x \in I. \tag{47}$$

Нерівність $\Psi_1(x) \ge 0$, $x \in I$, є наслідком (43) і (19). Згідно з (43) і (40) оцінка

$$|f_2''(x)| - \left|Q_{n_1}''(x; f_2) - f_2''(x)\right| + |U_n''(x; E_2)| \geq 0, \quad x \in I, \tag{48}$$

приводить до нерівності $\Psi_2(x) \geq 0$, $x \in I$. Для доведення (48) розглянемо чотири випадки. При цьому будемо враховувати означення 1 і 2 та (33), (38) – (43), (45). Якщо:

1) $x \in E_2$, тобто $|f_2''(x)| = |f''(x)| \geq A\rho_n^{r-2}(x)$ і $K_n(x) = 1$, то (48) випливає з нерівності

$$A\rho_n^{r-2}(x) - c_{17}c_{11}\rho_{n_1}^{r-2}(x) - c_{13}\rho_n^{r-2}(x) \geq 0;$$

2) $x \in G_2 \setminus E_2$, тобто $f_2''(x) = f''(x)$, то з урахуванням нерівності

$$\rho_{n_1}(x)K_{n_1}(x) \leq \rho_n(x)K_n(x), \quad x \in I \tag{49}$$

(яка є правильною для будь-якого $n_1 \geq n$) маємо

$$-c_{17}c_{11}\rho_{n_1}^{r-2}(x)K_{n_1}(x) + c_{14}\rho_n^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, E_2) + \rho_n(x)}\right)^{l-2r-1} K_n(x) \geq$$

$$\geq -c_{17}c_{11}\rho_{n_1}^{r-2}(x)K_{n_1}(x) + \frac{c_{14}}{(c_{16}+1)^{l-2r-1}}\rho_n^{r-2}(x)K_n(x) \geq 0,$$

тому оцінка (48) тим більше виконується:

3) $x \in I \setminus G_2^{***}$, тобто $f_2''(x) = 0$, то з урахуванням (49) і нерівності $14\operatorname{dist}\left(x, G_2^{**}\right) > \operatorname{dist}(x, E_2) + \rho_n(x)$ маємо

$$-c_{17}c_{11}\rho_{n_1}^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_{n_1}(x)}{\operatorname{dist}(x, G_2^{**}) + \rho_{n_1}(x)}\right)^{l-2r} K_{n_1}(x) +$$

$$+ c_{14}\rho_n^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, E_2) + \rho_n(x)}\right)^{l-2r-1} K_n(x) \geq 0,$$

звідки випливає (48);

4) $x \in G_2^{***} \setminus G_2$, то $x \notin O$ і (48) є наслідком нерівності

$$-c_{17}c_{11}\rho_{n_1}^{r-2}(x) + \frac{c_{14}\rho_n^{r-2}(x)}{66^{l-2r-1}} \geq 0.$$

Таким чином, оцінку (48) доведено для всіх $x \in I$.

Теорему 1 доведено.

4. Доведення теореми 2 для „малих" *n*. Нехай $n = r - 1$. Розглянемо два випадки:

1. Нехай $s \geq r - 2$. Оскільки $f''(y_i) = 0$ для всіх $i = \overline{1, r-2}$, то $L(x; f'') :=$ $:= L(x; f''; y_1, \ldots, y_{r-2}) \equiv 0$, де L — многочлен Лагранжа степеня $\leq r - 3$, який інтерполює $f''(x)$ в y_i, $i = \overline{1, r-2}$. Тоді з нерівності

$$|f''(x)| = |[y_1, \ldots, y_{r-2}, x; f'']|\prod_{i=1}^{r-2}|x - y_i| \leq c(r), \quad f \in W^r, \quad r \geq 3, \tag{50}$$

де $[\cdot]$ — поділена різниця функції f'' в $y_1, \ldots, y_{r-2}$ і x, випливає, що многочлен $P_{r-1}(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1)$ є шуканим в теоремі 2 $\left(c(r) \leq C(Y, r)\rho_{C(Y)}^r(x),\ x \in I\right)$.

2. Нехай $s < r-2$. До точок y_i, $i = \overline{1, s}$, додамо $r-2-s$ рівновіддалених точок y_i, $i = \overline{s+1, r-2}$, $-1 = y_{s+1} < y_{s+2} < \ldots y_{r-2} < y_s$. Зауважимо, що аналогічно (50) виконується нерівність

$$|f''(x) - L(x; f'')| \le \frac{1}{(r-2)!} \prod_{i=1}^{r-2} |x - y_i| \le c_{18}(r) |\Pi(x)|.$$

Покладемо

$$P_{r-1}(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1) + \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} \big(L(u; f'') + c_{18}(r)\Pi(u) \big)\, du\, dt$$

і зауважимо, що $P''_{r-1}(x)\Pi(x) \ge 0$. Для $r-1 < n \le N(Y, r)$ покладемо $P_n(x) := P_{r-1}(x)$.

Теорему 2 доведено.

1. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Coconvex pointwise approximation // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1200–1212.
2. *Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д.* Коопукле наближення функцій, які мають більше однієї точки перегину // Там же. – 2004. – **56**, № 3. – С. 352–365.
3. *Pleshakov M. G., Shatalina A. V.* Piecewise coapproximation and the Whitney inequality // Approxim. Theory. – 2000. – **105**. – P. 189–210.
4. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Coconvex approximation // Ibid. – 2002. – **118**. – P. 20–65.
5. *Kopotun K. A.* Pointwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials // Constr. Approxim. – 1994. – **10**. – P. 153–178.
6. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
7. *Шведов А. С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **30**. – С. 839–846.
8. *Wu X., Zhou S. P.* A counterexample in comonotone approximation in L^p space // Colloq. Math. – 1993. – **64**. – С. 265–274.
9. *Шевчук И. А.* Приближение монотонных функций монотонными многочленами // Мат. сб. – 1992. – **183**. – С. 63–78.
10. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Piecewise monotone pointwise approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 311–348.
11. *DeVore R. A.* Monotone approximation by polynomials // SIAM J. Math. Anal. – 1977. – **8**. – P. 906–921.
12. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
13. *DeVore R. A., Yu X. M.* Pointwise estimates for monotone polynomial approximation // Constr. Approxim. – 1985. – **1**. – P. 323–331.
14. *Дзядык В. К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию ($\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$) на конечном отрезке вещественной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**, № 2. – С. 623–642.
15. *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences // J. Math. Pures and Appl. – 1957. – **6**, № 36. – P. 67–95.

Одержано 27.02.2004