УДК 517.51, 515.12

В. В. Михайлюк (Чернівец. нац. ун-т)

ОДНОТОЧКОВІ РОЗРИВИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКУ ДВОХ КОМПАКТНИХ ПРОСТОРІВ

We investigate the existence of a separately continuous function $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ with a one-point set of points of discontinuity in the case where the topological spaces X and Y satisfy conditions of compactness type. In particular, for the compact spaces X and Y and the nonizolated points $x_0 \in X$ and $y_0 \in Y$, we show that the separately continuous function $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ with the set of points of discontinuity $\{(x_0, y_0)\}$ exists if and only if sequences of nonempty functionally open set exist in X and Y and converge to x_0 and y_0, respectively.

Досліджується існування нарізно неперервної функції $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ з одноточковою множиною точок розриву, коли X і Y задовольняють умови типу компактності. Зокрема, показано, що для компактних просторів X і Y і неізольованих точок $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ існує нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ з множиною $\{(x_0, y_0)\}$ точок розриву тоді і тільки тоді, коли в X і Y існують послідовності непорожніх функціонально відкритих множин, які збігаються до x_0 і y_0 відповідно.

1. Із теореми Наміоки [1] випливає, що множина точок розриву нарізно неперервної функції, тобто функції, неперервної відносно кожної змінної, зокрема, на добутку двох компактів міститься в добутку множин першої категорії. Природно виникає питання про опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках компактів (див. [2]), зокрема: чи кожна одноточкова множина з неізольованими проекціями в добутку двох компактів є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції? В [3] (теорема 9) показано, що відповідь на це питання є негативною. А саме, на добутку двох тихоновських кубів, хоча б один з яких має незліченну вагу, не існує нарізно неперервної функції з одноточковим розривом. Цей результат було узагальнено в [4].

Умови на топологічні простори X і Y і точки $a \in X$ і $b \in Y$, які забезпечують існування нарізно неперервної функції $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ з множиною $\{(a, b)\}$ точок розриву, вивчалися в [5] (див. також [6]). Там було показано, що для цього достатньо, щоб X і Y були тихоновськими, a і b — неізольованими G_δ-точками у відповідних просторах, причому простір Y має зліченну базу околів точки b або є локально зв'язним у точці b. Крім того, з результатів роботи [7], де розв'язується задача про побудову нарізно неперервної функції на добутку компактів Еберлейна з даною множиною точок розриву, випливає, що сформульоване вище твердження має місце також, коли X і Y — компакти Еберлейна та $a \in X$ і $b \in Y$ — неізольовані точки. Зауважимо, що основним інструментом при доведенні результатів із [7] є властивість типу Прейсса – Симона компактів Еберлейна (див. [8, с. 170]), тобто наявність у компакті Еберлейна послідовності відкритих множин, яка збігається до даної точки. Оскільки тихоновський куб незліченної ваги не має такої властивості, то на підставі теореми 9 із [3] природно встановити, наскільки існування збіжних послідовностей відкритих множин у компактних просторах X і Y є необхідною умовою для існування нарізно неперервної функції $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ з одноточковою множиною розривів.

Вивченню цього питання і присвячено дану роботу. А саме, для певних класів топологічних просторів ми встановимо рівносильність наступних тверджень:

i) існують послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх функціонально відкритих множин $U_n \subseteq X$ і $V_n \subseteq Y$, які збігаються до точок $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ відповідно, причому $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$;

ii) існує нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, множина точок розриву якої дорівнює $\{(x_0, y_0)\}$.

Спочатку, використавши поняття залежності функцій від певного числа координат, встановимо цей факт, коли X — сепарабельний псевдокомпакт і Y — компакт або X — псевдокомпакт зі зліченним числом Сусліна і Y — компакт Валдівіа. А потім, перейшовши до асоційованих відображень, отримаємо аналогічний результат для компактних просторів X і Y.

2. Нагадаємо деякі означення, введемо позначення і доведемо допоміжні твердження.

Множину точок розриву відображення $f: X \to Y$, де X, Y — топологічні простори, позначатимемо через $D(f)$. Якщо, крім того, Y — метричний простір із метрикою d і $A \subseteq X$ — непорожня множина, то число $\omega_f(A) = \sup\limits_{x', x'' \in A} d(f(x'), f(x''))$ називається *коливанням відображення f на множині A*, а число $\omega_f(x_0) = \inf\limits_{U \in \mathcal{U}} \omega_f(U)$, де $\mathcal{U}$ — система всіх околів точки $x_0 \in X$, — *коливанням відображення f у точці* x_0.

Для функції $f: X \to \mathbb{R}$ через $\operatorname{supp} f$ позначатимемо носій $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ функції f.

Множина A в топологічному просторі X називається *функціонально відкритою*, якщо існує неперервна функція $f: X \to [0, 1]$, для якої $A = f^{-1}((0, 1])$.

Будемо говорити, що послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх підмножин A_n топологічного простору X *збігається до точки* $x_0 \in X$ (позначатимемо $A_n \to x_0$), якщо для довільного околу U точки x_0 в X існує номер n_0 такий, що $A_n \subseteq U$ для всіх $n \geq n_0$.

Сім'ю $(A_i : i \in I)$ підмножин A_i топологічного простору X називатимемо *локально скінченною*, якщо для довільної точки $x \in X$ існує окіл U точки x у X такий, що множина $\{i \in I : U \bigcap A_i \neq \varnothing\}$ є скінченною, і *точково-скінченною*, якщо для довільної точки $x \in X$ множина $\{i \in I : x \in A_i\}$ є скінченною.

Тихоновський простір X називається *псевдокомпактним*, якщо довільна неперервна функція $f: X \to \mathbb{R}$ є обмеженою, і *ліндельофовим*, якщо з довільного відкритого покриття простору X можна виділити не більш ніж зліченне підпокриття.

У випадку нескінченного кардиналу $\aleph$ будемо говорити, що топологічний простір X має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph})$, якщо для довільної точково-скінченної сім'ї $(A_i : i \in I)$ відкритих у X непорожніх множин A_i маємо $|I| \leq \aleph$. Ця властивість так позначалася в [9], де вона використовувалась при дослідженні залежності від певної кількості координат нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів-добутків.

Топологічний простір X має *зліченне число Сусліна*, якщо довільна система непорожніх відкритих множин в X має не більш ніж зліченну потужність.

Твердження 1. *Берівський простір X має властивість* $(\mathrm{II}_{\aleph_0})$ *тоді і тільки тоді, коли X має зліченне число Сусліна.*

Доведення. *Необхідність* є очевидною. Доведемо *достатність*. Нехай X має зліченне число Сусліна і $(U_i : i \in I)$ — точково-скінченна сім'я відкритих у X непорожніх множин U_i, причому множина I є нескінченною. Використовуючи беровість простору X, для кожного $i \in I$ знайдемо відкриту в X непорожню множину $V_i \subseteq U_i$ таку, що множина $\{ j \in I : U_j \cap V_i \neq \varnothing \}$ є скінченною. Тоді множина $\{ j \in I : V_j \cap V_i \neq \varnothing \}$ також є скінченною для кожного $i \in I$. Вибравши максимальну множину $J \subseteq I$ так, щоб сім'я $(V_j : j \in J)$ була попарно неперетинною, одержимо $|I| \leq \aleph_0 |J| \leq \aleph_0^2 = \aleph_0$. Отже, X має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph_0})$.

Неперервне відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у топологічний простір Y називається *досконалим*, якщо f є замкненим, тобто для довільної замкненої в X множини A її образ $B = f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$ є замкненим в Y, і множина $f^{-1}(y) = \{ x \in X : f(x) = y \}$ є компактною в X для кожного $y \in Y$.

Твердження 2. *Нехай X, Y — топологічні простори, $\varphi : Y \to Y_0$ — досконале сюр'єктивне відображення, $f_0 : X \times Y_0 \to \mathbb{R}$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ таке, що $f(x, y) = f_0(x, \varphi(y))$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Тоді $D(f_0) = D$, де $D = \{ (x, \varphi(y)) : (x, y) \in D(f) \}$.*

Доведення. Нехай $(x, y) \in D(f)$ і $y_0 = \varphi(y)$. З теореми про неперервність складеної функції випливає, що $(x, y_0) \in D(f_0)$. Отже, $D \subseteq D(f_0)$.

Нехай $(x_0, y_0) \notin D$. Покладемо $K = \varphi^{-1}(y_0)$. Оскільки φ є досконалим, то K — компактна множина в Y. Зауважимо, що функція f неперервна в кожній точці (x_0, y), де $y \in K$, причому $f(x_0, y) = f_0(x_0, y_0)$. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існують відкритий окіл U точки x_0 в X і відкрита множина G в Y такі, що $K \subseteq G$ і $|f(x, y) - f_0(x_0, y_0)| < \varepsilon$ для довільних $x \in U$ і $y \in G$. Множина $Y \setminus G$ є замкненою в Y, а φ — досконале відображення, тому множина $F = \varphi(Y \setminus G)$ також є замкненою в Y_0, причому $y_0 \notin F$. Покладемо $V_0 = Y_0 \setminus F$. Зрозуміло, що V_0 — окіл точки y_0 і $\varphi^{-1}(V_0) \subseteq G$. Нехай $x \in U$ і $y' \in V_0$. Виберемо $y'' \in G$ так, щоб $\varphi(y'') = y'$. Тоді $|f_0(x, y') - f_0(x_0, y_0)| = |f(x, y'') - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Отже, функція f_0 є неперервною в точці (x_0, y_0). Таким чином, $D(f_0) \subseteq D$.

Наступне твердження доводить імплікацію i) $\Rightarrow$ ii).

Твердження 3. *Нехай X, Y — довільні топологічні простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх функціонально відкритих в X і Y відповідно множин $U_n \subseteq X$ і $V_n \subseteq Y$ такі, що $U_n \to x_0$ і $V_n \to y_0$, причому $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{ (x_0, y_0) \}$.*

Доведення. Нехай $\varphi_n : X \to [0, 1]$ і $\psi_n : Y \to [0, 1]$ — такі неперервні функції, що $U_n = \varphi_n^{-1}((0, 1])$, $V_n = \psi_n^{-1}((0, 1])$ і $\sup_{x \in X} \varphi_n(x) = \sup_{y \in Y} \psi_n(y) = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \psi_n(y)$, є шуканою.

3. Перейдемо до вивчення питань залежності нарізно неперервних функцій на добутках від певної кількості координат.

Нехай Z, T — довільні множини, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ і $f : Y \to Z$. Будемо говорити, що f *зосереджене на множині* S, де $S \subseteq T$, якщо для довільних $y', y'' \in Y$ із рівності звужень $y'|_S = y''|_S$ випливає рівність $f(y') = f(y'')$. Якщо при цьому потужність $|S|$ множини S не перевищує $\aleph_0$, то будемо говорити, що f *залежить від зліченної кількості координат*.

Нехай, крім того, X — довільна множина і $g : X \times Y \to Z$. Тоді g *зосеред-*

жене на множині $S \subseteq T$ *відносно другої змінної*, якщо $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$, і g *залежить від зліченної кількості координат відносно другої змінної*, якщо $|S| \le \aleph_0$ для деякої такої множини S.

Теорема 1. *Нехай* X — *сепарабельний топологічний простір і* $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ — *ліндельофовий простір. Тоді кожна нарізно неперервна функція* $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат відносно другої змінної.*

Доведення. Оскільки Y є ліндельофовим, то кожна неперервна функція $g: Y \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат. Тому для кожного $x \in \in X$ існує не більш ніж зліченна множина $T_x \subseteq T$ така, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'|_{T_x} = y''|_{T_x}$. Нехай A — зліченна скрізь щільна в X множина. Покладемо $S = \bigcup_{a \in A} T_a$. Зрозуміло, що $|S| \le \aleph_0$. Для довільних y', $y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$ маємо $y'|_{T_a} = y''|_{T_a}$, тому $f(a, y') = f(a, y'')$ для кожного $a \in A$. Врахувавши, що функція f неперервна відносно змінної x і замикання $\overline{A}$ множини A збігається з X, одержимо $f(x, y') = f(x, y'')$ для всіх $x \in X$.

Теорема 2. *Нехай* X — *топологічний простір з властивістю* $(\Pi_{\aleph_0})$ *і* $Y \subseteq \subseteq \mathbb{R}^T$ — *компакт, причому* $Y = \overline{B}$, *де* $B = \{ y \in Y : |\operatorname{supp} y| \le \aleph_0 \}$. *Тоді довільна нарізно неперервна функція* $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат відносно другої змінної.*

Доведення. Доведемо спочатку, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченна множина $S_\varepsilon \subseteq T$ така, що для довільних $b', b'' \in B$ з рівності $b'|_{S_\varepsilon} = b''|_{S_\varepsilon}$ випливає, що $|f(x, b') - f(x, b'')| \le \varepsilon$ для кожного $x \in X$.

Припустимо, що це не так. Тобто існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільної не більш ніж зліченної множини $S \subseteq T$ існують $x \in X$ і $b', b'' \in B$ такі, що $b'|_S = = b''|_S$ і $|f(x, b') - f(x, b'')| > \varepsilon$. За допомогою трансфінітної індукції побудуємо сім'ї $(S_\alpha : \alpha < \omega_1)$ не більш ніж зліченних множин $S_\alpha \subseteq T$, $(b_\alpha : \alpha < \omega_1)$, $(c_\alpha : \alpha < \omega_1)$ і $(x_\alpha : \alpha < \omega_1)$ точок $b_\alpha, c_\alpha \in B$ і $x_\alpha \in X$ такі, що:

а) $b_\alpha|_{S_\alpha} = c_\alpha|_{S_\alpha}$ для кожного $\alpha < \omega_1$;

б) $S_\alpha \subseteq S_\beta$ для довільних $\alpha < \beta < \omega_1$;

в) $\operatorname{supp} b_\alpha \subseteq S_{\alpha+1}$, $\operatorname{supp} c_\alpha \subseteq S_{\alpha+1}$ для кожного $\alpha < \omega_1$;

г) $|f(x_\alpha, b_\alpha) - f(x_\alpha, c_\alpha)| > \varepsilon$ для кожного $\alpha < \omega_1$.

Виберемо довільну не більш ніж зліченну множину $S_1 \subseteq T$. Згідно з нашим припущенням існують точки $x_1 \in X$ і $b_1, c_1 \in B$ такі, що $b_1|_{S_1} = c_1|_{S_1}$ і $|f(x_1, b_1) - f(x_1, c_1)| > \varepsilon$. Покладемо $S_2 = S_1 \cup \operatorname{supp} b_1 \cup \operatorname{supp} c_1$. Зрозуміло, що $|S_2| \le \aleph_0$. Виберемо точки $x_2 \in X$ і $b_2, c_2 \in B$ такі, що $b_2|_{S_2} = c_2|_{S_2}$ і $|f(x_2, b_2) - f(x_2, c_2)| > \varepsilon$.

Припустимо, що для деякого $\beta < \omega_1$ сім'ї $(S_\alpha : \alpha < \beta)$, $(b_\alpha : \alpha < \beta)$, $(c_\alpha : \alpha < < \beta)$ і $(x_\alpha : \alpha < \beta)$ вже побудовано. Покладемо $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} (S_\alpha \cup \operatorname{supp} b_\alpha \cup \cup \operatorname{supp} c_\alpha)$. Оскільки при $\alpha < \beta$ всі множини S_α, $\operatorname{supp} b_\alpha$ і $\operatorname{supp} c_\alpha$ не більш ніж зліченні, то $|S_\beta| \le \aleph_0$. Тепер, використавши наше припущення, виберемо точки x_β і $b_\beta, c_\beta \in B$ так, щоб $b_\beta|_{S_\beta} = c_\beta|_{S_\beta}$ і $|f(x_\beta, b_\beta) - f(x_\beta, c_\beta)| > \varepsilon$.

Далі, використавши неперервність функції f відносно змінної x і умову г), для кожного $\alpha < \omega_1$ знайдемо відкритий окіл U_α точки x_α в X такий, що

$|f(x, b_\alpha) - f(x, c_\alpha)| > \varepsilon$ для кожного $x \in U_\alpha$. Оскільки простір X має властивість $(\Pi_{\aleph_0})$, то сім'я $(U_\alpha : \alpha < \omega_1)$ не є точково-скінченною. Отже, існує точка $x_0 \in X$ і строго зростаюча послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ не більш ніж зліченних ординалів α_n такі, що $|f(x_0, b_{\alpha_n}) - f(x_0, c_{\alpha_n})| > \varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Покладемо $T_n = S_{\alpha_n}$, $v_n = b_{\alpha_n}$ і $w_n = c_{\alpha_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Використавши компактність простору Y і неперервність функції $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0, y)$, виберемо скінченну множину $T_0 \subseteq T$ так, щоб $|f(x_0, y') - f(x_0, y'')| < \varepsilon$, як тільки $y', y'' \in Y$ з $y'|_{T_0} = y''|_{T_0}$. Оскільки $|f(x_0, v_n) - f(x_0, w_n)| > \varepsilon$, то $v_n|_{T_0} \neq w_n|_{T_0}$. Але згідно з умовою а) $v_n|_{T_n} = w_n|_{T_n}$, а згідно з умовами б) і в) функції $v_n|_{T \setminus T_{n+1}}$ і $w_n|_{T \setminus T_{n+1}}$ є нульовими, тому $v_n|_{T \setminus T_{n+1}} = w_n|_{T \setminus T_{n+1}}$. Отже, $T_0 \cap (T_{n+1} \setminus T_n) \neq \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Врахувавши, що послідовність $(T_n)_{n=1}^\infty$ зростає, одержимо, що множина T_0 є нескінченною, а це суперечить її вибору. Таким чином, існування множини S_ε доведено.

Покладемо $S_0 = \bigcup_{n=1}^\infty S_{1/n}$. Зрозуміло, що $f(x, b') = f(x, b'')$ для довільних $x \in X$ і $b', b'' \in B$ з $b'|_{S_0} = b''|_{S_0}$. Зафіксуємо довільні точки $x \in X$, $y', y'' \in Y$ такі, що $y'|_{S_0} = y''|_{S_0}$. Використавши неперервність функції $f^x : Y \to \mathbb{R}$, $f^x(y) = f(x, y)$, на компактному просторі $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ знайдемо не більш ніж зліченну множину $T_0 \subseteq T$ таку, що $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ для довільних $y_1, y_2 \in Y$ з $y_1|_{T_0} = y_2|_{T_0}$. Оскільки B є зліченно компактною множиною, $Y = \overline{B}$ і функція $f^x : Y \to \mathbb{R}$, $f^x(y) = f(x, y)$, неперервна, то існують точки $b', b'' \in B$ такі, що $b'|_{T_0 \cup S_0} = y'|_{T_0 \cup S_0}$, $f(x, y') = f(x, b')$, $b''|_{T_0 \cup S_0} = y''|_{T_0 \cup S_0}$ і $f(x, y'') = f(x, b'')$. Тоді $f(x, y') = f(x, b') = f(x, b'') = f(x, y'')$. Отже, f зосереджене на множині S_0, тому f залежить від зліченної кількості координат відносно другої змінної.

4. Вивчення нарізно неперервних функцій двох змінних з одноточковим розривом розпочнемо з допоміжного твердження.

Твердження 4. *Нехай X — псевдокомпактний простір, Y — топологічний простір, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$, $\delta > 0$ і U_0 — замкнений окіл точки x_0 в X такі, що $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \delta$ для кожного $x \in U_0$, послідовності $(U_n)_{n=1}^\infty$ і $(V_n)_{n=1}^\infty$ відкритих непорожніх множин $U_n \subseteq U_0$ і V_n в X і Y відповідно такі, що $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \delta$ для всіх $(x, y) \in U_n \times V_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тоді якщо $(V_n)_{n=1}^\infty$ збігається до y_0, то $(U_n)_{n=1}^\infty$ збігається до x_0.*

Доведення. Нехай U — довільний замкнений окіл точки x_0 в X. Припустимо, що множина $N = \{n \in \mathbb{N} : U_n \setminus U \neq \varnothing\}$ є нескінченною. Без обмежень загальності можемо вважати, що $N = \mathbb{N}$. Покладемо $\tilde{U}_n = U_n \setminus U$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки X є псевдокомпактним, то згідно з [10, с. 311] сім'я $(\tilde{U}_n : n \in \mathbb{N})$ відкритих непорожніх множин $\tilde{U}_n$ не є локально скінченною в X. Тому існує точка $\tilde{x} \in U_0$ така, що довільний окіл $\tilde{U}$ точки $\tilde{x}$ в X перетинається з нескінченною кількістю елементів сім'ї $(\tilde{U}_n : n \in \mathbb{N})$. Оскільки $V_n \to y_0$, то довільний окіл W точки $(\tilde{x}, y_0)$ в $X \times Y$ перетинається з нескінченною кількістю елементів сім'ї $(W_n : n \in \mathbb{N})$, де $W_n = \tilde{U}_n \times V_n$. Зауважимо, що $\tilde{x} \neq x_0$, тому функція f є неперервною в точці $(\tilde{x}, y_0)$. Врахувавши, що $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \delta$ для довільної точки $(x, y) \in W_n$ при $n \in \mathbb{N}$, одержимо $|f(\tilde{x}, y_0) - f(x_0, y_0)| \geq \delta$, а це суперечить тому, що $\tilde{x} \in U_0$. Отже, N є скінченною і $U_n \to x_0$.

Нагадаємо, що компактний простір Y є *компактом Валдівіа*, якщо Y гомеоморфний деякому компактному простору $Z \subseteq \mathbb{R}^T$ такому, що множина $\{z \in Z : |\operatorname{supp} z| \leq \aleph_0\}$ є щільною в Z.

Основним результатом даного пункту є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай X — сепарабельний псевдокомпактний простір і Y — компакт або X — псевдокомпактний простір зі зліченним числом Сусліна і Y — компакт Валдівіа, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ — неізольовані точки у відповідних просторах. Тоді наступні твердження є рівносильними*:

i) *існують послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх відкритих множин $U_n \subseteq X$ і $V_n \subseteq Y$, які збігаються до x_0 і y_0 відповідно*;

ii) *існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.*

Доведення. Оскільки X і Y — тихоновські простори, то імплікація i) $\Rightarrow$ ii) випливає з твердження 3.

ii) $\Rightarrow$ i). Нехай X — сепарабельний псевдокомпактний простір, Y — компакт і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$. Без обмежень загальності можна вважати, що $Y \subseteq \mathbb{R}^T$, де T — деяка множина. Згідно з теоремою 1 функція f залежить від зліченної кількості координат відносно другої змінної, тобто існує не більш ніж зліченна множина $S \subseteq T$ така, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$.

Покладемо $\varphi : Y \to \mathbb{R}^S$, $\varphi(y) = y|_S$, $Z = \varphi(Y)$, $f_0 : X \times Z \to \mathbb{R}$, $f_0(x, \varphi(y)) = f(x, y)$, де $y \in Y$. Зрозуміло, що відображення $\varphi : Y \to Z$ є досконалим, тому згідно з твердженням 2 $D(f_0) = \{(x_0, z_0)\}$, де $z_0 = \varphi(y_0)$. Крім того, функція f_0 є нарізно неперервною (неперервність відносно першої змінної випливає безпосередньо з неперервності f відносно першої змінної, а неперервність відносно другої змінної можна одержати з допомогою твердження 2, де як перший множник використовується одноточковий простір $\{x\}$). Виберемо $\delta > 0$ так, щоб $\omega_{f_0}(x_0, z_0) > 3\delta$, і замкнені околи U_0 і W_0 точок x_0 і z_0 в X і Z відповідно так, щоб $|f_0(x, z_0) - f_0(x_0, z_0)| < \delta$ і $|f_0(x_0, z) - f_0(x_0, z_0)| < \delta$ для довільних $x \in U_0$ і $z \in W_0$.

Зауважимо, що Z — метризовний компакт. Зафіксуємо довільну базу $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих околів $G_n \subseteq W_0$ точки z_0 в Z і візьмемо довільний відкритий окіл $\tilde{U}$ точки x_0 в X. Оскільки $\omega_{f_0}(\tilde{U} \times G_n) > 3\delta$ і функція f_0 є неперервною у всіх точках, крім (x_0, z_0), то існують послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх відкритих множин $U_n \subseteq \tilde{U}$ і $W_n \subseteq W_0$ в X і Z відповідно такі, що $|f_0(x, z) - f_0(x_0, z_0)| > \delta$ для всіх $(x, z) \in U_n \times W_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що $W_n \to z_0$. Тому згідно з твердженням 4 $U_n \to x_0$.

Покладемо $V_n = \varphi^{-1}(W_n)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$. Зауважимо, що $|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \delta$ для кожного $y \in V_0$ і $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \delta$ для всіх $(x, y) \in U_n \times V_n$

при $n \in \mathbb{N}$. Знову використавши твердження 4 і помінявши місцями змінні, одержимо, що $V_n \to y_0$.

Тепер нехай X — псевдокомпактний простір зі зліченним числом Сусліна і Y — компакт Валдівіа. Можна вважати, що $Y \subseteq \mathbb{R}^T$, причому множина $\{ y \in \in Y : |\operatorname{supp} y| \leq \aleph_0 \}$ є щільною в Y. З [10, с. 311] випливає, що X є берівським простором. Тому з твердження 1 і теореми 2 випливає, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат відносно другої змінної. Далі міркуємо так само, як і в попередньому випадку.

5. У цьому пункті ми встановимо аналогічний результат для добутку компактних просторів.

Теорема 4. *Нехай X, Y — компактні простори і $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ — неізольовані точки у відповідних просторах. Тоді наступні твердження є рівносильними*:

i) *існують послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх функціонально відкритих множин $U_n \subseteq X$ і $V_n \subseteq Y$, які збігаються до x_0 і y_0 відповідно, причому $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ при $n \in \mathbb{N}$*;

ii) *існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{ (x_0, y_0) \}$.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 3, досить перевірити імплікацію ii) $\Rightarrow$ i). Нехай $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція з $D(f) = \{ (x_0, y_0) \}$. Розглянемо неперервне асоційоване відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$, $\varphi(x)(y) = f(x, y)$. Покладемо $\tilde{X} = \varphi(X)$, $g : \tilde{X} \times Y \to \mathbb{R}$, $g(\tilde{x}, y) = \tilde{x}(y) = f(x, y)$, де $\tilde{x} = \varphi(x)$. Зрозуміло, що g — нарізно неперервна функція. Оскільки X — компактний простір, то φ — досконале відображення і згідно з твердженням 2 $D(g) = = \{(\tilde{x}_0, y_0)\}$, де $\tilde{x}_0 = \varphi(x_0)$. Нехай $\tilde{x} \in A = \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_0\}$. Врахувавши, що Y — компактний простір і функція g є неперервною в кожній точці множини $\{\tilde{x}\} \times \times Y$, одержимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $\tilde{U}$ точки $\tilde{x}$ в $\tilde{X}$ такий, що $|\tilde{x}(y) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon$ для довільних $y \in Y$ і $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Отже, на множині A топологія поточкової збіжності і нормована топологія, породжена максимум-нормою з банахового простору $C(X)$, збігаються. Тому, зокрема, множина A є метризовним підпростором простору $\tilde{X}$.

Тепер розглянемо асоційоване відображення $\psi : Y \to C_p(\tilde{X})$, $\varphi(y)(\tilde{x}) = = g(\tilde{x}, y)$. Покладемо $\tilde{Y} = \psi(Y)$, $h : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$, $h(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, y)$, де $\tilde{y} = \varphi(y)$. Як і в попередньому випадку, маємо $D(h) = \{(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\}$, де $\tilde{y}_0 = \psi(y_0)$, і множина $B = \tilde{Y} \setminus \{\tilde{y}_0\}$ є метризовним підпростором простору $\tilde{Y}$.

Візьмемо $\delta > 0$ так, щоб $\omega_h(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) > 4\delta$, і виберемо замкнені околи $\tilde{U}_0$ і $\tilde{V}_0$ точок $\tilde{x}_0$ і $\tilde{y}_0$ в $\tilde{X}$ і $\tilde{Y}$ відповідно так, щоб $|h(\tilde{x}, \tilde{y}_0) - h(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)| < \delta$ і $|h(\tilde{x}_0, \tilde{y}) - h(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)| < \delta$ для довільних $\tilde{x} \in \tilde{U}_0$ і $\tilde{y} \in \tilde{V}_0$. Покладемо $Z = = \tilde{X} \times \tilde{Y}$, $z_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ і $W_0 = \operatorname{int}(\tilde{U}_0) \times \operatorname{int}(\tilde{V}_0)$, де через $\operatorname{int}(C)$ позначено внутрішність множини C у відповідному топологічному просторі. Для кожної точки $z \in A \times B$ виберемо відкритий окіл G_z точки z в Z такий, що $z_0 \notin \overline{G_z}$ і $\omega_h(G_z) < \delta$. Оскільки $A \times B$ — метризовний підпростір простору Z, то згідно з теоремою Стоуна про паракомпактність метризовного простору [10, с. 414] у відкрите покриття $(G_z : z \in A \times B)$ простору $A \times B$ можна вписати деяке локально скінченне відкрите покриття $(W_i : i \in I)$. Покладемо $J = \{ i \in I : W_i \cap$

$\bigcap W_0 \neq \varnothing$ і $\left| h(z) - h(z_0) \right| > 2\delta$ для деякого $z \in W_i \}$. Оскільки $\omega_h(z_0) > 4\delta$, то для будь-якого околу $W \subseteq W_0$ точки z_0 існує точка $z \in W$ така, що $\left| h(z) - h(z_0) \right| > 2\delta$, причому згідно з вибором $\tilde{U}_0$ і $\tilde{V}_0$ точка z обов'язково входить до множини $A \times B$. Тому $z_0 \in \overline{\bigcup_{i \in J} W_i}$. Врахувавши, що $z_0 \notin \overline{W_i}$ для кожного $i \in I$, одержимо, що множина J є нескінченною. Крім цього, зауважимо, що оскільки $\omega_h(W_i) < \delta$ при $i \in I$, то для довільних $j \in J$ і $z \in W_j$ виконується нерівність $\left| h(z) - h(z_0) \right| > \delta$. Оскільки $\left| h(z) - h(z_0) \right| < \delta$ для кожного $z \in ((\{\tilde{x}_0\} \times \tilde{V}_0) \cup (\tilde{U}_0 \times \{\tilde{y}_0\})) \setminus \{z_0\} = C$ і функція h є неперервною в кожній точці множини C, то $\overline{\bigcup_{i \in J} W_i} \cap C = \varnothing$.

Виберемо довільну зліченну множину $\{ j_1, j_2, \ldots \} \subseteq J$ і покладемо $\tilde{W}_n = W_{j_n} \cap W_0$ при $n \in \mathbb{N}$. З означення множини J випливає, що всі множини $\tilde{W}_n$ є непорожніми. Зауважимо, що сім'я $(\tilde{W}_n : n \in \mathbb{N})$ є локально скінченною в кожній точці множини $(A \times B) \cup (Z \setminus (\tilde{U}_0 \times \tilde{V}_0)) \cup C = Z \setminus \{z_0\}$. Нехай W — довільний замкнений окіл точки z_0 у Z. Тоді сім'я $(\tilde{W}_n \setminus W : n \in \mathbb{N})$ є локально скінченною сім'єю відкритих множин у компакті Z. Тому $\tilde{W}_n \setminus W \neq 0$ лише для скінченної кількості номерів n, тобто існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\tilde{W}_n \subseteq W$ для всіх $n \geq n_0$. Отже, $\tilde{W}_n \to z_0$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо відкриті непорожні множини $\tilde{U}_n$ і $\tilde{V}_n$ в $\tilde{X}$ і $\tilde{Y}$ відповідно такі, що $\tilde{U}_n \times \tilde{V}_n \subseteq \tilde{W}_n$. Зрозуміло, що $\tilde{U}_n \to \tilde{x}_0$ і $\tilde{V}_n \to \tilde{y}_0$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ покладемо $U_n = \varphi^{-1}(\tilde{U}_n)$ і $V_n = \psi^{-1}(\tilde{V}_n)$. Множини U_0 і V_0 є замкненими, а U_n і V_n при $n \in \mathbb{N}$ — функціонально відкриті в X і Y відповідно, як прообрази таких самих множин при неперервних відображеннях. Тепер, застосувавши твердження 4 до функції g, одержимо, що із збіжності $\tilde{U}_n \to \tilde{x}_0$ випливає збіжність $V_n \to y_0$. Далі, міркуючи аналогічно, для функції f отримуємо, що $U_n \to x_0$.

1. *Namioka I.* Separate contimuity and joint continuity // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**, № 2. – P. 515 – 531.
2. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real. Anal. Exch. – 1985 – 1986. – **11**, № 2. – P. 283 – 322.
3. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 1992. – 44, № 9. – С. 1209 – 1220.
4. *Михайлюк В. В.* До питання про множину точок розриву нарізно неперервного відображення // Мат. студії. – 1994. – № 3. – С. 91 – 94.
5. *Маслюченко В. К.* Зв'язки між різними характеристиками величини множин точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень. – Чернівці, 1994. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, № 70-Ук94.
6. *Маслюченко О. В.* Коливання нарізно неперервних функцій на добутку компактів Еберлейна // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 67 – 70.
7. *Архангельский А. В.* Топологические пространства функций. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 222 с.
8. *Maslyuchenko V. K., Maslyuchenko O. V., Mykhaylyuk V. V., Sobchuk O. V.* Paracompactness and separately continuous mappings // Gen. Topol. Banach Spaces. – New York: Nova Publ., 2000. – P. 147 – 169.
9. *Михайлюк В. В.* Залежність від **n** координат нарізно неперервних функцій на добутках компактів // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 822 – 829.
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 751 с.

Одержано 23.10.2003