УДК 517.9

В. Гр. Самойленко, Юл. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ ДЛЯ ОДНОФАЗОВИХ СОЛІТОНОПОДІБНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We construct asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions for the Korteweg – de Vries equation with coefficients depending on a small parameter.

Побудовано асимптотичні розвинення для однофазового солітоноподібного розв'язку для рівняння Кортевега – де Фріза з коефіцієнтами, що залежать від малого параметра.

1. Вступ. Одним із фундаментальних рівнянь сучасної фізики є рівняння Кортевега – де Фріза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

яке вперше було запропоноване голландським вченим Д. Кортевегом та його учнем Дж. де Фрізом [1] для математичного опису відокремленої хвилі, рух якої в каналі вперше спостерігав Дж. Скотт-Рассел [2] в 1834 р.

Як відомо, Д. Кортевег і Дж. де Фріз знайшли періодичні хвильові розв'язки рівняння (1), які мають несинусоїдальну форму і стають наближено синусоїдальними, якщо їх амплітуда є дуже малою. При збільшенні довжини хвилі вони набирають вигляду далеко розміщених один від одного пагорбів, а в граничному випадку — при дуже великій довжині хвилі — залишається один пагорб, який і відповідає відокремленій хвилі.

Рівняння Кортевега – де Фріза стало одним з основних досягнень Д. Кортевега і Дж. де Фріза, хоча при житті Д. Кортевега про це майже ніхто не згадував. Праця [1] Д. Кортевега і Дж. де Фріза залишилася майже непоміченою, її швидко забули і лише окремі вчені, що займалися задачами гідродинаміки, зрідка повертались до розгляду рівняння Кортевега – де Фріза та проблеми відокремленої хвилі. Згодом було віддано належну шану цьому рівнянню та його творцям, коли в 1995 році в Амстердамі — на батьківщині Д. Кортевега і Дж. де Фріза — було проведено міжнародну наукову конференцію, присвячену сторіччю від дня відкриття рівняння Кортевега – де Фріза. Тепер це рівняння застосовується при моделюванні різноманітних хвильових процесів.

Удруге рівняння Кортевега – де Фріза опинилось у центрі уваги фізиків та математиків у 1965 р., коли відомі американські вчені М. Крускал та Н. Забускі [3] розв'язали проблему Е. Фермі, Дж. Паста та С. Улама [4] і було виявлено зв'язок рівнянь ланцюжка Тоди [5], що досліджувались Е. Фермі, Дж. Паста та С. Уламом, із рівнянням Кортевега – де Фріза.

Вивчаючи за допомогою числових експериментів рівняння Кортевега – де Фріза для випадку малої дисперсії, тобто при наявності малого параметра при старшій похідній у рівнянні (1), М. Крускал та Н. Забускі [3] математично обґрунтували багато фізичних властивостей відокремленої хвилі, відкритих експериментально Дж. Скоттом-Расселом, сформулювали означення солітона в праці [3], яка спонукала бурхливий розвиток математичної теорії солітонів, основою якої є рівняння Кортевега – де Фріза [6].

У зв'язку з рівнянням Кортевега – де Фріза потрібно також згадати про класичну працю К. С. Гарднера, Дж. М. Гріна, М. Д. Крускала та Р. М. Міури [7], в якій уперше було запропоновано так званий метод спектрального перетворення для розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза, та працю П. Лакса [8], який показав загальний характер цього методу.

Як відомо, при дослідженні різноманітних задач квантової механіки [9], нелінійної теорії поширення хвиль [10], фізики плазми [3] виникає потреба вивчення хвильових процесів як у середовищах із малою дисперсією, так і в неоднорідних середовищах. Найбільш простою моделлю, що описує хвильовий процес у середовищі з малою в'язкістю μ, є рівняння Бюргерса

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x - \mu u_{xx} = 0, \tag{2}$$

яке, як відомо, за допомогою підстановки Коула – Хопфа [6] зводиться до рівняння теплопровідності. Це в свою чергу дозволяє побудувати точний розв'язок для рівняння (2) та дослідити низку специфічних ефектів у гідродинаміці середовищ із малою в'язкістю, зокрема явище перекидання хвилі та явище ударної хвилі. Крім того, використовуючи формули для точних розв'язків рівняння (2), можна проаналізувати асимптотичні властивості (при $\mu \to 0$) цих розв'язків та вказати такі розв'язки рівняння (2), які прямують (поточково) при $\mu \to 0$ до деякого розривного розв'язку. Зауважимо, що такий характер асимптотичної поведінки розв'язків рівняння (2) притаманний явищу ударної хвилі [6].

Для більш складних систем, наприклад для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними (залежними від просторової та еволюційної змінних) коефіцієнтами, системи Нав'є – Стокса з малою в'язкістю та інших, не завжди вдається знайти точний розв'язок, а тому для аналізу властивостей їх розв'язків використовуються різні асимптотичні методи малого параметра, застосування яких часто базується на використанні формул для точних розв'язків відповідної породжуючої (незбуреної, $\mu = 0$) задачі, який при цьому має бути граничним (при $\mu \to \to 0$) для розв'язку збуреної задачі. Розв'язок відповідної породжуючої задачі часто є розривною функцією — це видно [11] на прикладі рівняння Бюргерса (2).

Зазначимо, що задачі побудови асимптотичних розв'язків розглядались у різних аспектах: для побудови асимптотичних розв'язків із швидко осцилюючими коефіцієнтами застосовувався метод усереднення [12]; для побудови так званих асимптотичних одно- та багатофазових солітоноподібних розв'язків для сингулярно збурених диференціальних рівнянь з частинними похідними Г. Венцель, Х. Крамер та Л. Бріллюен запропонували метод, який згодом дістав назву методу ВКБ [13] і пізніше застосовувався Г. Б. Уіземом [14] та М. Дж. Лайтхілом [15] при вивченні задач про поширення періодичних хвиль; російські математики В. П. Маслов, Г. А. Омельянов та С. Ю. Доброхотов в [11, 16, 17] знайшли солітоноподібні розв'язки для низки задач математичної фізики та обгрунтували ідею побудови асимптотичних розвинень для солітоноподібних розв'язків для деяких класів диференціальних рівнянь з частинними похідними; в [18] побудовано асимптотичний розв'язок типу примежового шару для крайової задачі для лінійного еліптичного рівняння, який є добре відомим прикладом солітоноподібного розв'язку. Подібні розвинення виникають також при побудові швидкоосцилюючих асимптотичних розв'язків лінійних та нелінійних рівнянь [19] та асимптотики функції Гріна для параболічних рівнянь [20], асимптотичних швидкоспадних розв'язків строго гіперболічних систем зі змінними коефіцієнтами [21] тощо.

Разом з тим при побудові розривних розв'язків відповідних породжуючих задач виникає низка математичних проблем. У працях Р. Куранта [22] та інших показано, що розривні розв'язки для лінійних породжуючих рівнянь можна шукати у вигляді

$$u(x, t) = \delta(S)\psi_0(x, t) + \vartheta(S)\psi(S, x, t), \tag{3}$$

де $\psi(S, x, t) = \psi_1(x, t) + S\psi_2(x, t) + S^2\psi_3(x, t) + \ldots$, $S = S(x, t)$ — деяка нескінченно диференційовна функція, $\delta(S)$ — функція Дірака, $\vartheta(S)$ — функція Хевісайда, $\psi_0(x, t)$, $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$, … — нескінченно диференційовні функції змінних x, t. Але якщо розривний розв'язок породжуючого $(\mu = 0)$ рівняння для (2) шукати у вигляді (3), то після підстановки $u(x, t)$ з (3) у відповідне граничне рівняння, яке є квазілінійним, виникає проблема, пов'язана з визначенням добутку узагальнених функцій $\vartheta(S)\delta(S)$, який, взагалі кажучи, не визначено, оскільки залежить від способу апроксимації узагальнених функцій $\vartheta(S)$ і $\delta(S)$.

У зв'язку з проблемою визначення добутку узагальнених функцій слід згадати працю В. К. Іванова [23], в якій запропоновано підхід для визначення добутку узагальнених функцій, що дозволило дослідити низку задач, пов'язаних із знаходженням розривних розв'язків квазілінійних рівнянь, і, таким чином, вивчити окремі породжуючі задачі для рівнянь, що містять малий параметр при старшій похідній. У підсумку це дало можливість, зокрема, побудувати узагальнення солітонних розв'язків — так звані солітоноподібні (асимптотичні) розв'язки для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами математичної та теоретичної фізики, які солітонних розв'язків не мають.

Зауважимо, що оскільки математичні моделі, що базуються на рівнянні Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній, описують важливі хвильові процеси в середовищах з малою дисперсією [24, 25], то, очевидно, становить значний інтерес розв'язання задачі про побудову асимптотичних розвинень для такого типу задач. Зокрема, Р. Грімшоу [26] дослідив явище резонансу, що виникає внаслідок взаємодії двох хвиль, а Е. С. Бенілов, Р. Грімшоу та Є. П. Кузнєцова [27] розглянули рівняння Кортевега – де Фріза п'ятого порядку з малим параметром при старшій похідній та дослідили стійкість нелокальної відокремленої хвилі для такого рівняння.

У даній статті розглядається задача про знаходження асимптотичних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза з коефіцієнтами, що залежать від малого параметра, вигляду

$$u_{xxx} = a(x, \varepsilon)u_t + b(x, \varepsilon)uu_x. \tag{4}$$

Припускається, що функції $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$ мають вигляд

$$a(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{N_0}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \qquad b(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{N_0}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k, \tag{5}$$

де $N_0 \in \boldsymbol{N}$, $x \in R^1$, $t \in [0, T]$; $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(R^1)$, $k \geq 0$.

2. Вигляд асимптотичного розв'язку та умова Гюгоніо. Аналогічно до [11] позначимо за допомогою $G = G(R^1_x \times [0,T] \times R^1_\tau)$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = (x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in R^1_x \times (0,T) \times R^1_\tau$, для яких рівномірно за змінними (x, t) на кожному компакті $K \subset R^1_x \times (0,T)$ для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, α виконуються такі дві умови:

1) має місце співвідношення

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^n \frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} f(x,t,\tau) = 0; \tag{6}$$

2) існує нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$ така, що

$$\lim_{\tau \to -\infty} \tau^n \frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} \left(f(x,t,\tau) - f^-(x,t) \right) = 0, \quad (x, t) \in K. \tag{7}$$

Позначимо за допомогою $G_0 = G_0(R^1_x \times [0,T] \times R^1_\tau)$ лінійний підпростір у G функцій $f(x,t,\tau)$ таких, що додатково до умов (6), (7) рівномірно щодо (x, t) на кожному компакті $K \subset R^1_x \times (0,T)$ справджується рівність

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x,t,\tau) = 0, \qquad (x, t) \in K.$$

Означення [11]. *Функція* $u = u(x, t, \varepsilon)$ *називається однофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа* $N \geq 0$ *функція* $u(x, t, \varepsilon)$ *може бути зображена за допомогою розкладу за малим параметром* ε *у вигляді*

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right] + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{8}$$

де $\tau = (x - \varphi(t))/\varepsilon \in C^{(\infty)}(R_x^1 \times [0,T])$ *— скалярна дійсна функція, функції* $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, *— нескінченно диференційовні* (*в точках* $t = 0$, $t = T$ *розглядаються відповідно ліва та права похідні*); $V_0(x, t, \tau) \in G_0$, $V_j(x, t, \tau) \in G$, $j = 1, 2, \ldots, N$. *Функція* $x - \varphi(t)$ *називається фазою однофазової солітоноподібної функції* $u(x, t, \varepsilon)$. *Функція* $\varphi(t)$ *визначає лінію розриву функції* $u(x, t, \varepsilon)$ *при* $\varepsilon = 0$.

Вигляд асимптотичних розвинень для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза (4) залежить від значень числа N_0 у (5). Потрібно розрізняти випадки, коли N_0 — парне та коли N_0 — непарне. А саме, для випадку парного N_0 асимптотичний розв'язок для однофазового солітоноподібного розв'язку будується у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon^{N_0/2}};$$

для випадку непарного N_0 — у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{[N_0/2]} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right) +$$

$$+ \sum_{j=[N_0/2+1]}^{2N} \varepsilon^{(j+1)/2} \left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

де $\tau = \dfrac{x - \varphi(t)}{\varepsilon^{N_0/2}}$.

Випадок $N_0 = 1$ розглянуто в [28]. У подальшому вважаємо, що $N_0 \geq 2$.

Асимптотичний розв'язок рівняння (4) аналогічно [11] подамо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \overline{U}(x, t, \varepsilon) + \varepsilon G_\varepsilon(S, x, t) + \varepsilon F_\varepsilon(S, x, t), \tag{9}$$

де $S = x - \varphi(t)$; $\overline{U}(x, t, \varepsilon)$ — нескінченно диференційовні функції; $G_\varepsilon(S, x, t)$, $F_\varepsilon(S, x, t)$ — нескінченно диференційовні функції такі, що $\|\varepsilon G_\varepsilon(S,x,t)\|_C \leq C_1$; $\|F_\varepsilon(S,x,t)\|_C \leq C_2$, де C_1, C_2 — не залежні від ε константи, $\|\cdot\|_C$ — норма простору неперервних щодо $(x, t) \in R_x^1 \times [0,T]$ функцій. У (9) функції $\overline{U}(x, t, \varepsilon)$, $G_\varepsilon(S, x, t)$, $F_\varepsilon(S, x, t)$ задовольняють умови

$$\begin{gathered} G_\varepsilon(S, x, t) \to g(t)\delta(S) \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \\ \varepsilon G_\varepsilon(S, x, t) \to 0 \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \\ F_\varepsilon(S, x, t) \to f(x, t)\vartheta(S) \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \end{gathered} \tag{10}$$

де D' — простір узагальнених функцій, залежних від змінної S, $g(t)$, $f(x, t)$ — деякі нескінченно диференційовні функції.

Коефіцієнти асимптотичних розвинень для функцій $\overline{U}(x, t, \varepsilon)$, $G_\varepsilon(S, x, t)$, $F_\varepsilon(S, x, t)$ і функція $\varphi(t)$, що визначає лінію розриву при $\varepsilon = 0$ для розв'язку (9) і є поки що невизначеною, знаходяться за допомогою рекурентних обчислень. Функція $\varphi(t)$ пов'язана певним чином із коефіцієнтами асимптотичних розвинень в (5) за допомогою співвідношень, що називаються умовою типу Гюгоніо [29], яку можна отримати для розглядуваного випадку таким чином. Підставимо (9) і (5) у рівняння (4), домножимо одержані вирази на ε^{N_0} та спрямуємо ε до нуля. Як результат отримаємо рівняння для визначення функції $u_0(x,t) = \overline{U}(x,t,0)$:

$$a_0(x)u_{0t} + b_0(x)u_0u_{0x} = 0. \qquad (11)$$

Рівність (11) називається породжуючим рівнянням для рівняння Кортевега – де Фріза (4).

Підставимо (5) в (4) і, врахувавши рівняння (11), домножимо отримане співвідношення на ε^{N_0-1}, $N_0 \geq 2$, та спрямуємо ε до нуля. Використовуючи умови (10) та враховуючи, що

$$\varepsilon(G_\varepsilon(S,x,t))^2 \to r(t)\delta(S) \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\varepsilon\, G_\varepsilon(S,x,t)F_\varepsilon(S,x,t) \to 0 \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

отримуємо співвідношення (не наводимо його через громіздкість), з якого шляхом прирівнювання коефіцієнта при $\delta'(S)$ до нуля одержуємо для визначення функції $x = \varphi(t)$ рівняння вигляду

$$-a_0(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}b_0(\varphi)\frac{r(t)}{g(t)} + b_0(\varphi)u_0(\varphi,t) = 0. \qquad (12)$$

Тут функція $r(t)/g(t)$ залежить від апроксимації δ-функції й буде визначена пізніше.

Співвідношення (12) відоме як умова типу Гюгоніо і визначає зв'язок між функцією фази $\varphi(t)$, що описує лінію розриву для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза, та головним членом регулярної частини асимптотики (9) і коефіцієнтами асимптотичних розкладів (5).

3. Побудова асимптотичних розв'язків. Асимптотичний розв'язок (8) складається з двох частин: регулярної та сингулярної частин асимптотики. При його побудові використовуються стандартні обчислення методу малого параметра. При цьому регулярна частина асимптотики визначається як розв'язок деякої системи диференціальних рівнянь, що містить одне квазілінійне та решту лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, а сингулярна частина асимптотики спочатку визначається як розв'язок деякої (іншої, ніж для регулярної частини, асимптотики) системи диференціальних рівнянь, що містить також одне квазілінійне та решту лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними на кривій розриву $x = \varphi(t)$; потім знаходиться диференціальне рівняння для визначення функції $\varphi(t)$, після чого будується продовження сингулярної частини асимптотики з кривої розриву $x = \varphi(t)$ в деякий окіл цієї кривої та проводиться процедура зшивання отриманих асимптотик таким чином, щоб члени асимптотики побудованого розв'язку належали введеному вище простору G.

Опишемо алгоритм побудови асимптотичного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза (4). Розглянемо спочатку випадок, коли $N_0 = 2$. Асимптотичний однофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (4) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x,t,\varepsilon) = u_N(x,t,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \qquad (13)$$

де

$$u_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j\left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}.$$

Функція $U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$ називається регулярною частиною асимптотики (13), а функція $V_N(x, t, \tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(x,t,\tau)$ — її сингулярною частиною, при цьому, очевидно, $u_N = U_N + V_N$.

Враховуючи вигляд похідних $u_t(x, t, \varepsilon)$, $u_x(x, t, \varepsilon)$, $u_{xxx}(x, t, \varepsilon)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_N}{\partial \tau}\varphi'(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_N}{\partial \tau} + \frac{\partial u_N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u_N}{\partial x^3} + \frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^3 u_N}{\partial x^2 \partial \tau} + \frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 u_N}{\partial x \partial \tau^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 u_N}{\partial \tau^3},$$

та підставляючи їх у рівняння (4), знаходимо

$$\frac{\partial^3 u_N}{\partial x^3} + \frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^3 u_N}{\partial x^2 \partial \tau} + \frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 u_N}{\partial x \partial \tau^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 u_N}{\partial \tau^3} =$$

$$= a(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_N}{\partial \tau}\varphi'(t)\right) + b(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial u_N}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_N}{\partial \tau}\right)u_N + g_N(x,t,\tau,\varepsilon), \quad (14)$$

де $g_N(x, t, \tau, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ — деяка нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, що визначається рекурентним (відносно j) чином за функціями u_j, $j = 1, \ldots, N-1$.

Тоді знаходимо співвідношення для асимптотичних розвинень у вигляді

$$\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} + \frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2 \partial \tau} + \frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x \partial \tau^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau^3} =$$

$$= a(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial V_N}{\partial t} + \frac{\partial U_N}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial \tau}\varphi'(t)\right) +$$

$$+ b(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{\partial U_N}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial \tau}\right)(V_N + U_N) + g_N(x,t,\tau,\varepsilon). \quad (15)$$

Для визначення регулярної частини асимптотики $U_N(x, t, \varepsilon)$ зі співвідношення (15) обчислимо границю при $\tau \to +\infty$ виразів у лівій і правій частинах (15) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При цьому одержимо систему рівнянь для функцій u_j, $j = \overline{0, N}$, вигляду

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_0 = 0, \quad (16)$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x)u_j(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} = f_j(x,t,u_0,u_1,\ldots,u_{j-1}), \quad j = \overline{1, N},$$

де функції $f_j(t,x,u_0,u_1,\ldots,u_{j-1})$, $j = 1, \ldots, N$, у правій частині (16) визначаються рекурентним чином. Отже, функції u_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, можна знайти послідовно, розв'язуючи квазілінійне та лінійні диференціальні рівняння (16). Надалі припускаємо, що рівняння (16) має нескінченно диференційовні розв'язки.

4. Знаходження сингулярної частини асимптотики (функцій $V_j(x, t, \tau)$, $j = 0, 1, \ldots, N$). Враховуючи (16), із (15) стандартним чином (прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра) знаходимо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Ці рівняння спочатку використовуємо для визначення функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j = 0,$

$1, \ldots, N$, на кривій розриву $x = \varphi(t)$, яка визначається на наступному етапі як розв'язок певного звичайного диференціального рівняння, а потім ці рівняння використовуються для продовження цих функцій в область

$$\Omega_\mu(\Gamma) = \left\{(x,t) \in R^1 \times [0,T] : |x - \varphi(t)| < 2\mu\right\},$$

де $\mu \in (0, 1)$ — деяка стала. Зазначимо, що область $\Omega_\mu(\Gamma)$, як і функція $\varphi(t)$, поки що невизначені. При цьому ми користуємось тим, що в області $\Omega_\mu(\Gamma)$ будь-яка нескінченно диференційовна функція $g(x, t)$ допускає розвинення вигляду

$$g(x, t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}\left(\frac{d^j}{dx^j} g(x,t)\right)\Bigg|_{x=\varphi(t)} \tau^j \varepsilon^j + O\left((x - \varphi(t))^{N+1}\right).$$

Підставивши розвинення (13) у рівняння (4) та врахувавши (16), послідовно для кожного $j = \overline{0, N}$ знайдемо, що при $x = \varphi(t)$ функції $v_j = v_j(t,\tau) = V_j(x,t,\tau)\big|_{x=\varphi(t)}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, є розв'язками системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3} - a_0(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\varphi'(t) - b_0(\varphi)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^3 v_1}{\partial\tau^3} - a_0(\varphi)\frac{\partial v_1}{\partial\tau}\varphi'(t) - b_0(\varphi)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_1}{\partial\tau} + v_1\frac{\partial v_0}{\partial\tau} + v_0\frac{\partial v_1}{\partial\tau}\right] = \Im_1(t,\tau), \quad (17)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3} - a_0(\varphi)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\varphi'(t) - b_0(\varphi)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau} + v_j\frac{\partial v_0}{\partial\tau} + v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\right] = \Im_j(t,\tau), \quad j = \overline{2, N},$$

де

$$\Im_j(t,\tau) = F_j(t, V_0(x,t,\tau), \ldots, V_{j-1}(x,t,\tau), u_0(x,t), \ldots, u_j(x,t))\big|_{x=\varphi(t)}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Проінтегруємо перше рівняння системи (17) щодо τ:

$$\frac{d^2 v_0}{\partial\tau^2} = -a_0(\varphi)v_0(t,\tau)\varphi'(t) + b_0(\varphi)u_0(\varphi,t)v_0(t,\tau) + \frac{1}{2}b_0(\varphi)v_0^2(t,\tau) + c_1(t). \quad (18)$$

Оскільки $v_0(t,\tau) \in G_0$, то можна покласти $c_1(t) \equiv 0$.

Домноживши рівняння (18) на $dv_0/d\tau$ та проінтегрувавши щодо τ, отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\left(\frac{dv_0}{d\tau}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\left[a_0(\varphi)\varphi'(t) - b_0(\varphi)u_0(\varphi,t)\right]\frac{dv_0^2}{\partial\tau} + \frac{1}{4}b_0(\varphi)v_0\frac{dv_0^2}{d\tau},$$

тобто

$$\left(\frac{dv_0}{d\tau}\right)^2 = -a_0(\varphi)v_0^2\varphi'(t) + \frac{1}{2}b_0(\varphi)v_0^3 + c_2(t). \quad (19)$$

Із умови $v_0(t,\tau) \in G_0$ випливає, що $c_2(t) \equiv 0$. Отже, розв'язком рівняння (19) у просторі G_0 є функція

$$v_0(t, \tau, \varphi) = A[\varphi]\operatorname{ch}^{-2}((\tau + C_0)H[\varphi]),$$

де

$$A[\varphi] = -2\frac{a_0(\varphi)\varphi'(t) - b_0(\varphi)u_0(\varphi,t)}{b_0(\varphi)}, \qquad H[\varphi] = \frac{2\sqrt{A[\varphi]}}{b_0(\varphi(t))},$$

при умові, що $A[\varphi] > 0$.

Лема 1. *Нехай* $A[\varphi] > 0$. *Тоді розв'язком першого рівняння системи* (17) *у просторі* G_0 *є функція* $v_0(t, \varphi, \tau) = A[\varphi]\mathrm{ch}^{-2}((\tau + C_0)H[\varphi])$.

Розглянемо тепер систему (17) при $j = 1, 2, 3, \ldots$. Позначимо оператор

$$L = \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + \left(a_0(\varphi)\varphi'(t) - b_0(\varphi)v_0 - b_0(\varphi)u_0(\varphi,t)\right)\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial v_0}{\partial\tau}b_0(\varphi).$$

Тоді систему рівнянь (17) при $j = 1, 2, 3, \ldots$ можна записати в операторному вигляді

$$Lv_j = F_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Лема 2. *Нехай* $F_j(t, \tau) \in G_0$, $j \geq 1$. *Тоді для розв'язності операторних рівнянь* (20) *у просторі* G *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова ортогональності*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau = 0, \quad j \geq 1. \tag{21}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що рівняння (20) має розв'язок $v_j(t, \tau) \in G_0$, $j = \overline{1, n}$. Покажемо, що при цьому виконується умова (21). Домноживши (20) на $v_0(t, \tau)$ і проінтегрувавши в межах від $-\infty$ до $+\infty$, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^3 v_j(t,\tau)}{d\tau^3} - a_0(\varphi)\frac{\partial v_j(t,\tau)}{\partial\tau}\varphi'(t) - \right.$$

$$\left. - b_0(\varphi)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j(t,\tau)}{\partial\tau} + v_j(t,\tau)\frac{\partial v_0(t,\tau)}{\partial\tau} + v_0\frac{\partial v_j(t,\tau)}{\partial\tau}\right]\right)v_0(t,\tau)d\tau = 0.$$

Достатність. Розглянемо рівняння, що отримується з (21) інтегруванням щодо τ:

$$L_1 v_j = \Phi_j(t, \tau), \quad j \geq 1,$$

де

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + a_0(\varphi)\varphi'(t) - b_0(\varphi)u_0(\varphi(t),t) - v_0(t,\tau)b_0(\varphi),$$

$$\Phi_j(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_j(t,\tau)d\tau + E_j(t).$$

Функцію $E_j(t)$ виберемо таким чином, щоб $\lim_{\tau\to\infty}\Phi_j(t, \tau) = 0$. Тоді з умови $F_j(t, \tau) \in G_0$ випливає, що $\Phi_j(\tau, t) \in G$.

Оператор $L_1 : G_0' \to G_0'$ — нетерів [27], при цьому $\mathrm{Ker}\, L_1 = \{v_{0\tau}'(t,\tau)\}$. Отже, якщо функція $u \in G_0'$ задовольняє рівняння $L_1 u = F$, де $F \in G_0'$ і $\int_{-\infty}^{\infty} F(t,\tau)v_{0\tau}'(t,\tau)d\tau = 0$, то тоді $u \in G_0$ [27].

Запишемо функцію $v_j(t,\tau)$, $j = 1, 2, \ldots$, у вигляді

$$v_j(t,\tau) = \nu_j(t,\tau)\eta(t,\tau) + \psi_j(t,\tau),$$

де $\eta(t,\tau) \in G$, $\lim_{\tau\to-\infty}\eta(t,\tau) = 1$,

$$\nu_j(t,\tau) = -\left(a_0(\varphi)\varphi'(t) - b_0(\varphi)\right)^{-1} \lim_{\tau\to-\infty}\Phi_j(t,\tau) = 0,$$

$\psi_j(t,\tau)$ — деяка функція, властивості якої дослідимо нижче.

Розглянемо операторне рівняння

$$L_1\psi_j = \Phi_j(t,\tau) - \nu_j L_1\eta.$$

Покажемо, що функція $\psi_j \in G_0$, $j = \overline{1,N}$. Оскільки $\lim_{\tau\to-\infty}(\Phi_j(t,\tau) - \nu_j L_1\eta) = 0$ рівномірно щодо t, то функція $\Phi_j(t,\tau) - \nu_j L_1\eta \in G_0$, а отже, $\psi_j \in G_0$.

Лему доведено.

Якщо умова ортогональності (21) виконується, то загальний розв'язок рівняння (17) при $j \geq 1$ у просторі G має вигляд

$$v_j(t,\tau) = z_j(t,\tau) + c_j v_{0\tau}, \tag{22}$$

де c_j — стала інтегрування, $z_j(t,\tau)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (17) при $j \geq 1$, тобто

$$z_j(t,\tau) = v_{0\tau}\int_{-\infty}^{\infty} v_{0\tau}^{-2}(t,\tau_1)\int_{-\infty}^{\tau_1}\Phi_j(t,\tau_2)v_{0\tau}(t,\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1, \quad j = 1,\ldots,N.$$

Розглянемо умову ортогональності (21) при $j = 1$, тобто для функції

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(t,\tau) = {} & a_0(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial t} + b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)} v_0 + \\ & + \left(-a_1(\varphi)\varphi'(t) + b_1(\varphi)u_0(\varphi,t) + b_0(\varphi)u_1(\varphi)\right)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \\ & + \tau\left(-a_0'(\varphi)\varphi'(t) + b_0'(\varphi)u_0(\varphi,t) + b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)}\right)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \\ & + b_1(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial \tau}v_0 + \tau b_0'(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial \tau}v_0.\end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{I}_1(t,\tau)v_0(t,\tau)\,d\tau = {} & \left(a_0(\varphi)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)}\right)\int_{-\infty}^{\infty} v_0^2\,d\tau + \\ & + \frac{1}{2}\left(-a_1(\varphi)\varphi'(t) + b_1(\varphi)u_0(\varphi,t) + b_0(\varphi)u_1(\varphi,t)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial v_0^2}{\partial \tau}\,d\tau + \\ & + \frac{1}{2}\left(-a_0'(\varphi)\varphi'(t) + b_0'(\varphi)u_0(\varphi,t) + b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\tau\frac{\partial v_0^2}{\partial \tau}\,d\tau + \\ & + \frac{1}{3}b_1(\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial v_0^3}{\partial \tau}\,d\tau + \frac{1}{3}b_0'(\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}\tau\frac{\partial v_0^3}{\partial \tau}\,d\tau,\end{aligned} \tag{23}$$

звідки, враховуючи явний вигляд функції $v_0(t,\tau)$, знаходимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Im_1(t,\tau)\, v_0(t,\tau)\, d\tau = \left(a_0(\varphi)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)} \right)\left(\frac{8}{3}\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} \right) -$$

$$- \frac{4}{3}\left(-a_0'(\varphi)\varphi'(t) + b_0'(\varphi)u_0(\varphi,t) + b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)} \right)\left(\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} \right).$$

Тепер з цієї умови ортогональності отримуємо звичайне диференціальне рівняння для визначення функції $\varphi(t)$ у вигляді

$$a_0(\varphi)\frac{d}{dt}\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} + \left(2a_0'(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} - 2b_0'(\varphi)u_0(\varphi,t) - b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t)} \right)\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} = 0. \quad (24)$$

Рівняння (24) має вигляд звичайного диференціального рівняння, що не розв'язане відносно похідної. Питання про існування та єдиність його розв'язку потребує вивчення в кожному конкретному випадку при заданих функціях $a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi)$. При цьому ми враховуємо, що функції $u_0(x,t)$, $A[\varphi]$, $H[\varphi]$ в свою чергу функціонально залежать від функцій $a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi)$. Надалі вважаємо, що диференціальне рівняння (24) задовольняє умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, що, очевидно, можливо при досить загальних умовах щодо функцій $a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi)$.

5. Побудова сингулярної частини асимптотики в околі кривої розриву. Визначимо в замиканні області $\Omega_\mu(\Gamma)$ функції $V_j(x, t, \tau)$, $j \geq 1$. Враховуючи (22), розв'язок рівняння (17) при $j = 1, \ldots, N$ подамо у вигляді

$$v_j(t,\tau) = \nu_j(t)\eta_j(t,\tau) + \psi_j(t,\tau), \quad j = 1, \ldots, N,$$

де

$$\nu_j(t) = -\left(a_0(\varphi)\varphi'(t) - b_0(\varphi)\right)^{-1} \lim_{\tau\to-\infty} \Phi_j(t,\tau),$$

$$\psi_j(t,\tau) = \psi_{j,1}(t,\tau) + c_j(t)\, v_{0,\tau}(t,\tau),$$

$\psi_{j,1}$ — деяка функція з простору G_0, $c_j(t)$ — стала інтегрування.

Розглянемо задачу Коші вигляду

$$\begin{aligned} \Lambda u_j^-(x,t) &= f_j^-(x,t), \\ u_j^-(x,t)\big|_\Gamma &= \nu_j(t), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (25)$$

де диференціальний оператор Λ записується у вигляді

$$\Lambda = a_0(x)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}.$$

Оскільки крива Γ трансверсальна характеристикам оператора Λ при всіх $t \in \in [0, T]$, то задача (25) коректно поставлена і відповідно до теореми Коші – Ковалевської при досить малих μ в області $\Omega_\mu(\Gamma)$ має розв'язок $u_j^-(x,t) \in \in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$.

Визначимо продовження функції $v_j(t,\tau)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ таким чином:

$$V_0(x,t,\tau) = v_0(t,\tau),$$

$$V_j(x,t,\tau) = u_j^-(x,t)\eta(t,\tau) + \psi_j(t,\tau).$$

Розглянемо головний член асимптотичного розвинення (13):

$$Y_0(x,t) = u_0(x,t) + v_0(t,\tau) = u_0(x,t) + A[\varphi]\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\left[\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon} + C_0\right] H[\varphi]\right).$$

Очевидно, що $Y_0(x,t) \to u_0(x,t)$ в D' при $\varepsilon \to 0$;

$$\frac{Y_0(x,t) - u_0(x,t)}{\varepsilon} \to g(t)\,\delta(x-\varphi(t))$$

в D' при $\varepsilon \to 0$. Отже, з умови (24), як наслідок, випливає згадана вище умова типу Гюгоніо для розривного розв'язку породжуючого рівняння (11).

6. Побудова глобального розв'язку. Розглянемо області

$$D^- = \left\{(x,t) \in R^1 \times [0,T] :\ \varphi(t) - x \ge \mu\right\},$$

$$D^+ = \left\{(x,t) \in R^1 \times [0,T] :\ x - \varphi(t) \ge \mu\right\}.$$

При всіх $x < \varphi(t)$, $t \in [0, T]$, функцію $u_j^-(x,t)$, $j = 1, \ldots, N$, визначимо як нескінченно диференційовний розв'язок задачі (25).

Асимптотичний за малим параметром ε розв'язок рівняння (4) отримується за допомогою процедури склеювання розв'язків, побудованих раніше.

Теорема 1. *Нехай* $N_0 = 2$ *та виконуються умови*:

1) *функції* $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^\infty(R^1)$, $k \ge 0$;

2) *має місце нерівність* $A[\varphi] > 0$, *де функція* $\varphi(t)$ *є розв'язком рівняння* (24);

3) *функції* $F_j(t,\tau)$, $j = 1, \ldots, N$, *належать простору* G_0;

4) *умова ортогональності* $\int_{-\infty}^{\infty} F_j(t,\tau)\, v_0(t,\tau)\, d\tau = 0$ *виконується при* $j = 1, \ldots, N$.

Тоді функція

$$u_N(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} Y_N^-(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ Y_N(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ Y_N^+(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in D^+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

де

$$Y_N^-(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + u_j^-(x,t)\right], \quad (x,t) \in D^-,$$

$$Y_N^+(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t), \quad (x,t) \in D^+,$$

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right], \quad (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},$$

є асимптотичним розвиненням для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза (4), *тобто для довільного компакта* $K \subset R_x^1 \times (0,T)$ *справджується співвідношення*

$$\max_{(x,t)\in K} \left|u(x,t,\varepsilon) - u_N(x,t,\varepsilon)\right| = O(\varepsilon^{N+1}), \quad N \in \mathbf{N}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $N_0 \ge 3$ і є парним. Алгоритм побудови асимптотичних розвинень для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза (4) у даному випадку в цілому є аналогічним описаному вище. При цьому асимптотичний розв'язок рівняння (4) шукається у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \Big[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau) \Big] + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{26}$$

де $\tau = (x-\varphi(t))/\varepsilon^k \in C^{(\infty)}(R^1_x \times [0,T])$ — скалярна дійсна функція, $k = N_0/2$.

Регулярна частина асимптотики (26) визначається аналогічно описаному вище з системи диференціальних рівнянь вигляду (16), а сингулярна частина асимптотики — з системи вигляду (17).

Аналогічно викладеному вище можна довести таку теорему.

Теорема 2. *Нехай* $N_0 = 2k$, $k = 2, 3, \ldots$, *та виконуються умови*:

1) *функції* $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^\infty(R^1)$, $k \geq 0$;

2) *має місце нерівність* $A[\varphi] > 0$, *де функція* $\varphi(t)$ *є розв'язком рівняння* (24);

3) *функції* $F_j(t,\tau)$, $j = 1, \ldots, N$, *належать простору* G_0;

4) *умова ортогональності* $\int_{-\infty}^{\infty} F_j(t,\tau) v_0(t,\tau) d\tau = 0$ *виконується при* $j = 1, \ldots, N$.

Тоді функція

$$u_N(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} Y_N^-(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ Y_N(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ Y_N^+(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in D^+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

де

$$Y_N^-(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \Big[u_j(x,t) + u_j^-(x,t) \Big], \qquad (x,t) \in D^-,$$

$$Y_N^+(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t), \qquad (x,t) \in D^+,$$

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \Big[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau) \Big], \qquad (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon^k},$$

є асимптотичним розвиненням для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза (4), *тобто для довільного компакта* $K \subset R^1_x \times (0,T)$ *справджується співвідношення*

$$\max_{(x,t)\in K} \big| u(x,t,\varepsilon) - u_N(x,t,\varepsilon) \big| = O(\varepsilon^{N+1}), \quad N \in \mathbf{N}.$$

Розглянемо нарешті випадок, коли $N_0 = 2k+1$, $k = 1, 2, \ldots$. Асимптотичне розвинення для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза шукається у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{[N_0/2]} \varepsilon^j \Big(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau) \Big) + $$

$$+ \sum_{j=[N_0/2+1]}^{2N} \varepsilon^{(j+1)/2} \Big(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau) \Big) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{27}$$

регулярна частина асимптотики (27) задовольняє систему диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду (16), а сингулярна частина асимптотики — систему вигляду (17). Як і для попереднього випадку, необхідною та достатньою умовою розв'язності у просторі G системи диференціальних рівнянь вигляду (17) є умова ортогональності (21). При цьому для визначення функції $x = \varphi(t)$ отримуємо також звичайне диференціальне рівняння вигляду (24).

Аналогічно випадку $N_0 = 2$ можна довести таку теорему.

Теорема 3. *Нехай* $N_0 = 2k+1,\ k = 1, 2, \ldots,$ *та виконуються умови*:

1) *функції* $a_k(x),\ b_k(x) \in C^\infty(R^1),\ k \geq 0$;

2) *має місце нерівність* $A[\varphi] > 0$, *де функція* $\varphi(t)$ *є розв'язком рівняння* (24);

3) *функції* $F_j(t,\tau),\ j = 1, \ldots, N,$ *належать простору* G_0;

4) *умова ортогональності* $\int_{-\infty}^{\infty} F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau = 0$ *виконується при* $j = 1, \ldots, N$.

Тоді функція

$$u_N(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} Y_N^-(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ Y_N(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ Y_N^+(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in D^+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

де

$$Y_N^-(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{[N_0/2]} \varepsilon^j\left[u_j(x,t) + u_j^-(x,t)\right] + \sum_{j=[N_0/2+1]}^{2N} \varepsilon^{(j+1)/2}\left[u_j(x,t) + u_j^-(x,t)\right],$$

$$(x,t) \in D^-,$$

$$Y_N^+(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{[N_0/2]} \varepsilon^j u_j(x,t) + \sum_{j=[N_0/2+1]}^{2N} \varepsilon^{(j+1)/2} u_j(x,t), \quad (x,t) \in D^+,$$

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{[N_0/2]} \varepsilon^j\left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right] +$$

$$+ \sum_{j=[N_0/2+1]}^{2N} \varepsilon^{(j+1)/2}\left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right], \quad (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma),$$

$\tau = (x - \varphi(t))/\varepsilon^{N_0/2}$, *є асимптотичним розвиненням для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза* (4), *тобто для довільного компакта* $K \subset R_x^1 \times (0,T)$ *справджується співвідношення*

$$\max_{(x,t)\in K} \left|u(x,t,\varepsilon) - u_N(x,t,\varepsilon)\right| = O(\varepsilon^{N+1}), \quad N \in \mathbf{N}.$$

7. Висновки. В даній роботі розв'язано задачу про побудову асимптотичних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами, що залежать від малого параметра, та знайдено умови існування асимптотичних розвинень для його однофазових солітоноподібних розв'язків із заданою точністю.

1. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Phil. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
2. *Scott-Russel J.* Report on waves // Rept fourteenth meeting of the British Association Adv. Sci. – London: John Murray, 1845. – P. 311.

3. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of “solutions” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240.
4. *Ферми Э., Паста Дж., Улам С.* Изучение нелинейных задач // Научные труды / Э. Ферми: В 2 т. – М.: Наука, 1972. – Т.2. – 256 с.
5. *Toda M.* Waves in nonlinear lattice // Suppl. Theory Phys. – 1970. – № 45. – P. 174 – 200.
6. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
7. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095.
8. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 15. – P. 467 – 490.
9. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
10. *Нелинейная* теория распространения волн / Под ред. Г. И. Баренблатта. – М.: Мир, 1970. – 231 с.
11. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), № 2. – С. 63 – 124.
12. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой структурой. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.
13. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
14. *Whitham G. B.* Non-linear dispersive waves // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1965. – № 283. – P. 238 – 261.
15. *Lighthill M. J.* A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid // Phil. Mag. – 1949. – **40**. – P. 1179 – 1201.
16. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почтипериодические решения в ВКБ-приближениях // Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Вып. 5. – С. 3 – 94.
17. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
18. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. – 1960. – Вып. 5 (121). – С. 778 – 781.
19. *Маслов В. П.* Операторные методы. – М.: Наука, 1973. – 543 с.
20. *Данилов В. Г., Фроловичев С. М.* Туннельный метод ВКБ построения асимптотики функции Грина для параболических уравнений // Докл. РАН. – 2001. – **379**, № 5. – С. 591 – 594.
21. *Доброхотов С. Ю., Жевандров И. Н., Маслов В. П., Шафаревич А. Н.* Асимптотические быстро убывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами // Мат. заметки. – 1991. – **49**, № 4. – С. 31 – 46.
22. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 540 с.
23. *Иванов В. К.* Ассоциативная алгебра простейших обобщенных функций // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 4. – С. 731 – 740.
24. *Омельянов Г. А.* Взаимодействие волн разных масштабов в газовой динамике // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 1. – С. 148 – 151.
25. *Dobrokhotov S. Yu.* Hugoniot – Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations // Rus. J. Math. Phys. – 1999. – **6**, № 2. – P. 137 – 173.
26. *Grimshaw R.* Models for instability in inviscid fluid flows due to a resonance between two waves // Nonlinear Instability Analysis. – 2001. – **2**. – P. 1 – 14.
27. *Benilov E. S., Grimshaw R.* The generation of radiating waves in a singularly perturbed Korteweg – de Vries equation // Physica D. – 1993. – **69**, № 3-4. – P. 270 – 278.
28. *Samoylenko Yu.* Asymptotical expansions for one-phase solution-type solution to perturbed Korteweg – de Vries equation // Proc. Fifth Int. Conf. “Symmetry in Nonlinear Math. Phys.” – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2004.
29. *Грушин В. В.* Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Мат. сб. – 1971. – Вып. 84 (126), № 2. – С. 163 – 195.

Одержано 18.11.2003