К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.927

С. М. Ментинський (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ДВОСТОРОННЯ АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

We investigate the algorithmof two-sided approximation of a solution of multipoint boundary-value problem for quasilinear differential equation with many control parameters under the assumption on the B-monotonicity in the J. Pokornyi sense of the right-hand side of equation. We establish conditions of monotonicity of successive approximations and of their uniform convergence to the solution of problem.

Побудовано алгоритм двосторонньої апроксимації розв'язку багатоточкової крайової задачі для квазілінійного диференціального рівняння з параметрами за припущень, які є двосторонніми аналогами В-монотонності за Ю. Покорним правої частини рівняння. Встановлено умови монотонності послідовних наближень та їх рівномірної збіжності до розв'язку задачі.

Статтю присвячено побудові і дослідженню одного способу двосторонньої апроксимації розв'язків багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами

$$x^{(m)} = H(t, x, x, \lambda, \lambda) - \sum_{\tilde{m}=1}^{m-1} q_{\tilde{m}}(t) x^{(\tilde{m})} - \xi\dot{\lambda}, \tag{1}$$

$$x(t_i) = x_i, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+k} = T, \quad i = 1, 2, \ldots, m+k, \tag{2}$$

де функція $H : D = [0; T] \times [a; b] \times [a; b] \times [c; d] \times [c; d] \to C^m[0; T]$ неперервна за сукупністю аргументів, a, b, $q_{\tilde{m}} \in C^m[0; T]$ ($C^m[0; T]$ — простір m разів неперервно диференційовних на $[0; T]$ дійсних функцій), $\lambda, \xi, c, d \in R^k$.

Для $m = 1$, $k = 1$ задача (1), (2) досліджувалася в [1, 2]. Процеси послідовних наближень до розв'язку крайової задачі (2) для рівняння

$$x^{(m)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$$

при $m = 1$, $k > 1$ побудовано в [3 – 5]. У роботі [6] для наближеного розв'язання задачі (1), (2) при $m > 1$, $k = 1$, $q_{\tilde{m}} = 0$, $\tilde{m} = 1, \ldots, m-1$, застосовано двосторонній ітераційний процес, який дозволяє отримувати монотонні послідовні наближення та зручні оцінки шуканого розв'язку за допомогою вилки. Застосування алгоритмів такого типу як до задачі (1), (2), так і до інших крайових задач часто ускладнюється через припущення про монотонність за функціональними аргументами та параметрами функції $H(t, y, z, \eta, \mu)$ (див. [6]). Метою пропонованого дослідження є побудова алгоритму для апроксимації розв'язків задачі (1), (2), який зберігає відомі переваги двосторонніх методів без використання тих чи інших властивостей монотонності правої частини рівняння (1). Для цього, зокрема, використано методику, запропоновану в [7].

Використавши конструкції відповідних обернених операторів із [6], побудуємо двосторонні апроксимації до розв'язку задачі (1), (2) за таких припущень:

1) $\xi > \theta$, $\theta \in R^k$ — нуль-вектор;
2) функції

$$Q_p(t) = \sum_{k=p}^{m-1} (-1)^{k-p} q_k^{(k-p)}(t) C_k^p, \quad p = 1, \ldots, m-1$$

(C_k^p — біноміальні коефіцієнти), обмежені і зберігають знак на $[0; T]$:

$$0 \leq Q_p(t) \leq m_p;$$

3) задано неперервні за сукупністю аргументів незростаючі щодо u, η неспадні щодо v, μ додатні при $t \in [0; T]$, $u, v \in [a; b]$, $\eta, \mu \in [c; d]$ функції $A_1(t, u, v)$, $B_1(t, u, v)$, $K_1(t, \eta, \mu)$, $N_2(t, \eta, \mu)$, для яких із співвідношень $u \leq v$, $\eta \leq \mu$ $(t \in [0; T],\ x, u, v \in [a; b],\ \lambda, \mu, \eta \in [c; d])$ випливають нерівності

$$\begin{gathered}
-A_1(t, u, v)(v - u) - K_1(t, \eta, \mu)(\mu - \eta) \leq H(t, v, x, \mu, \lambda) - H(t, u, x, \eta, \lambda), \\
H(t, v, x, \mu, \lambda) - H(t, x, u, \eta, \lambda) \leq B_2(t, u, v)(v - u) + N_2(t, \eta, \mu)(\mu - \eta).
\end{gathered} \tag{3}$$

Позначимо

$$\underline{F}_{m,k}[u, v, \eta, \mu] = L_{m+k}[H(t, u, v, \eta, \mu) - W(t, u, v, \eta, \mu); H(t, v, u, \mu, \eta) +$$
$$+ W(t, u, v, \eta, \mu)] + \Psi_m^k[u, v] + x_0(t),$$
$$\overline{F}_{m,k}[v, u, \mu, \eta] = L_{m+k}[H(t, v, u, \mu, \eta) + W(t, u, v, \eta, \mu); H(t, u, v, \eta, \mu) -$$
$$- W(t, u, v, \eta, \mu)] + \Psi_m^k[v, u] + x_0(t),$$

де

$$W(t, u, v, \eta, \mu) = \big(A_1(t, u, v) + B_2(t, u, v)\big)(v - u) +$$
$$+ \big(K_1(t, \eta, \mu) + N_2(t, \eta, \mu)\big)(\mu - \eta),$$

а оператори L_{m+k}, $\Psi_m^k[u, v]$ визначено співвідношеннями

$$L_{m+k}[\varphi(t, x); \psi(t, x)] =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m+k} \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{m-1}}{(m-1)!}\, \xi_{i+j}(s, x(s))\, ds, & \text{якщо } m \text{ — непарне,} \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{m-1}}{(m-1)!}\, \xi_{i+j-1}(s, x(s))\, ds\, + & \\ \displaystyle\quad + \sum_{i=j+1}^{m} \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{m-1}}{(m-1)!}\, \xi_{i+j}(s, x(s))\, ds, & \text{якщо } m \text{ — парне,} \end{cases}$$

$$\Psi_m^k[u(t), v(t)] = \sum_{i=1}^{j} \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(t_i - s)^{m+k-p-1}}{(m+k-p-1)!} Q_p(s) w_{i+j+m+k+p}(s)\, ds +$$
$$+ \sum_{i=j+1}^{m+k} \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(t_i - s)^{m+k-p-1}}{(m+k-p-1)!} Q_p(s) w_{i+j+m+k+p+1}(s)\, ds,$$

де

$$\xi_{i^*} = \begin{cases} \varphi, & \text{якщо } i^* \text{ – парне,} \\ \psi, & \text{якщо } i^* \text{ – непарне,} \end{cases}$$

$$w_{i^*} = \begin{cases} u, & \text{якщо } i^* \text{ — парне,} \\ v, & \text{якщо } i^* \text{ — непарне,} \end{cases} \qquad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$P_{m+k,i} = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{m+k} (t_i - t_j), \qquad x_0(t) = \sum_{i=1}^{m+k} \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} x_i .$$

Крім того, нехай

$$\underline{S}_{m,k}[t, u, v, \eta, \mu] = S_{m,k}[H(t, u, v, \eta, \mu) - W(t, u, v, \eta, \mu); H(t, v, u, \mu, \eta) + + W(t, u, v, \eta, \mu)],$$

$$\overline{S}_{m,k}[t, u, v, \eta, \mu] = S_{m,k}[H(t, v, u, \mu, \eta) + W(t, u, v, \eta, \mu); H(t, u, v, \eta, \mu) - - W(t, u, v, \eta, \mu)],$$

$$S_{m,k}[\varphi(t, x, \lambda); \psi(t, x, \lambda)] =$$

$$= \frac{\xi^{-1}}{(m+k-1)!} \sum_{i=1}^{k+m} \frac{1}{P_{k+m,i}(t_i)} \left(\int_0^{t_i} (t_i - s)^{m+k-1} q_{m+k+i+1}(s) ds + x_i \right),$$

де $q_{i^*} = \begin{cases} \varphi, & \text{якщо } i^* \text{ – парне}, \\ \psi, & \text{якщо } i^* \text{ – непарне}. \end{cases}$

Означимо послідовні наближення до розв'язку задачі (1), (2) за формулами

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \underline{T}_{m,k}(y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= \overline{T}_{m,k}(y_n, z_n), \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned} y_{n^*} &= \begin{pmatrix} u_{n^*} \\ \eta_{n^*} \end{pmatrix}, \quad z_{n^*} = \begin{pmatrix} v_{n^*} \\ \mu_{n^*} \end{pmatrix}, \\ \underline{T}_{m,k}[y, z] &= \begin{pmatrix} \underline{F}_{m,k} \\ \underline{S}_{m,k} \end{pmatrix}, \quad \overline{T}_{m,k}[y, z] = \begin{pmatrix} \overline{F}_{m,k} \\ \overline{S}_{m,k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай справджуються припущення* 1 – 3 *і задача* (1), (2) *має в області* $D_0 = [a; b] \times [c; d]$ *хоча б один розв'язок* $w^* = \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix}$. *Тоді для послідовних наближень* (4), (5) *з нерівностей*

$$y_0 \le y_1 \le w^* \le z_1 \le z_0$$

випливають співвідношення

$$y_{n-1} \le y_n \le w^* \le z_n \le z_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Доведення. Зазначимо, що умови 1 – 3 та специфіка побудови операторів L_{m+k}, Ψ_m^k, $S_{m,k}$ забезпечують те, що з припущення про виконання нерівностей (6) при $n = \tilde{n} - 1$ випливає їх виконання при $n = \tilde{n}$. А оскільки виконання нерівностей (6) при $n = 0$ постулюється умовами теореми, то доведення можна провести, використовуючи принцип математичної індукції.

Щодо умови 3 слід зауважити, що нерівності (3) виконуються, наприклад, якщо функція $H(t, u, v, \eta, \mu)$ не спадає щодо u, η і не зростає щодо v, μ. В цьому випадку за A_1, B_2, K_1, N_2 достатньо взяти довільні невід'ємні сталі, зокрема при $A_1 = B_2 = 0$, $B_1 = N_2 = 0$ отримаємо двосторонній алгоритм із [6].

Нехай

4) функція $H(t, u, v, \eta, \mu)$ в області D обмежена,

$$\left| H(t, u, v, \eta, \mu) \right| \leq M,$$

і при цьому

$$a + \max_{t \in [0;T]} \sum_{i=1}^{m+k} \left| \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \left(\frac{(t_i - t)^{m+k}}{(m+k)!} M + \sum_{p=0}^{m-1} M_{p,i}(t) b_0 \right) \right| \leq x_0(t) \leq$$

$$\leq b - \max_{t \in [0;T]} \sum_{i=1}^{m+k} \left| \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \left(\frac{(t_i - t)^{m+k}}{(m+k)!} M + \sum_{p=0}^{m-1} M_{p,i}(t) b_0 \right) \right|, \tag{7}$$

$$c + \frac{MP\xi^{-1}}{(m+k-1)(m+k-1)} \leq d - \frac{MP\xi^{-1}}{(m+k-1)(m+k-1)}, \tag{8}$$

де

$$P = \sum_{i=1}^{m+k} \left| \frac{t_i^{m+k-1}}{P_{k+m,i}(t_i)} \right|, \quad b_0 = \max\left(|a|, |b| \right), \quad M_{p,i}(t) = \frac{(t_i - t)^{m-p}}{(m-p)!} m_p.$$

В цьому випадку, позначивши

$$\underline{x}_0(t) = \begin{cases} x_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{j} (-1)^{i+j-1} P_i(t) M_0(t) + \sum\limits_{i=j+1}^{m+k} (-1)^{i+j-1} P_i(t) M_1(t), \\ \text{якщо } m+k - \text{парне}, \\ x_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{j} (-1)^{i+j-1} P_i(t) M_0(t) + \sum\limits_{i=j+1}^{m+k} (-1)^{i+j} P_i(t) M_1(t), \\ \text{якщо } m+k - \text{непарне}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\bar{x}_0(t) = 2x_0(t) - \underline{x}_0(t),$$

де

$$t \in [t_j; t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \ldots, m+k, \quad P_i(t) = \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)},$$

$$M_0(t) = \frac{(t_i - t)^{m+k}}{(m+k)!} M + \sum_{p=0}^{m-1} M_{p,i}(t) b_0,$$

$$M_1(t) = \frac{(t_i - t)^{m+k}}{(m+k)!} M + \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p M_{p,i}(t) b_0,$$

за початкові наближення можемо взяти

$$y_0 = \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ c \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ d \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Для дослідження збіжності алгоритму (4), (5) припускаємо, що

5) задано неперервні за сукупністю аргументів додатні при $t \in [0; T]$, $u, v \in \in [a; b]$, $\eta, \mu \in [c; d]$ функції $A_2(t, u, v)$, $B_1(t, u, v)$, $K_2(t, \eta, \mu)$, $N_1(t, \eta, \mu)$, для яких із співвідношень $u \leq v$, $\eta \leq \mu$ $\left(t \in [0; T],\ x, u, v \in [a; b],\ \lambda, \eta, \mu \in [c; d] \right)$ випливають нерівності

$$H(t, x, v, \lambda, \mu) - H(t, x, u, \lambda, \eta) \leq A_2(t, u, v)(v - u) + K_2(t, \eta, \mu)(\mu - \eta),$$

$$-B_1(t,u,v)(v-u)-N_1(t,\eta,\mu)(\mu-\eta) \le H(t,v,x,\mu,\lambda)-H(t,u,x,\eta,\lambda).$$

Позначимо

$$M_{AB} = \max_{\substack{t\in[0;T]\\ u,v\in[a;b]}} \big(2\big(A_1(t,u,v)+B_2(t,u,v)\big)+A_2(t,u,v)+B_1(t,u,v)\big),$$

$$M_{KN}^{l_2} = \max_{\substack{t\in[0;T]\\ \eta^{l_2},\mu^{l_2}\in[c^{l_2};d^{l_2}]}} (2(K_1^{(l_2)}(t,\eta^{(l_2)},\mu^{(l_2)})+N_2^{(l_2)}(t,\eta^{(l_2)},\mu^{(l_2)}))+$$

$$+\,K_2^{(l_2)}(t,\eta^{(l_2)},\mu^{(l_2)})+N_1^{(l_2)}(t,\eta^{(l_2)},\mu^{(l_2)})),$$

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{P_0M_{AB}T^{m+k}}{(m+k)!}+\displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\dfrac{T^{m+k-p}}{(m+k-p)!}m_p & \dfrac{M_{KN}^{(1)}T^{m+k}P_0}{(m+k)!} & \ldots & \dfrac{M_{KN}^{(k)}T^{m+k}P_0}{(m+k)!} \\ \dfrac{P_1M_{AB}T^{m+k}}{(m+k)!\xi_1k} & \dfrac{M_{KN}^{(1)}T^{m+k}P_1}{(m+k)!\xi_1k} & \ldots & \dfrac{M_{KN}^{(k)}T^{m+k}P_1}{(m+k)!\xi_1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{P_1M_{AB}T^{m+k}}{(m+k)!\xi_kk} & \dfrac{M_{KN}^{(1)}T^{m+k}P_1}{(m+k)!\xi_kk} & \ldots & \dfrac{M_{KN}^{(k)}T^{m+k}P_1}{(m+k)!\xi_kk} \end{pmatrix},$$

де

$$P_0 = \max_{t\in[0;T]}\sum_{i=1}^{m+k}\left|\frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)}\right|, \qquad P_1 = \sum_{i=1}^{m+k}\frac{1}{P_{m+k,i}(t_i)}.$$

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* 1 – 5 *та нерівність*

$$\|Q\| \le Q_0 < 1. \tag{11}$$

Тоді існує єдиний в D_0 *розв'язок* w^* *задачі* (1), (2), *до якого рівномірно щодо* $t\in[0;T]$ *збігаються послідовності* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *визначені за формулами* (4), (5), (9), (10), *і при цьому справджуються співвідношення* (6).

Доведення. При виконанні в області D умови 5 отримаємо оцінки

$$\|v_{n+1}(t)-u_{n+1}(t)\| \le$$

$$\le \frac{T^{m+k}}{(m+k)!}P_0\left(M_{AB}\|v_{n+1}(t)-u_{n+1}(t)\|+\sum_{l_2=1}^{k}M_{KN}^{l_2}(\mu_n^{(l_2)}-\eta_n^{(l_2)})\right)+$$

$$+\sum_{p=0}^{m-1}\frac{T^{m+k-p}}{(m+k-p)!}m_P\|v_{n+1}(t)-u_{n+1}(t)\| =$$

$$=\left(\frac{P_0M_{AB}T^{m+k}}{(m+k)!}+\sum_{p=0}^{m-1}\frac{T^{m+k-p}}{(m+k-p)!}m_P\right)\times$$

$$\times\|v_{n+1}(t)-u_{n+1}(t)\|+\sum_{l_2=0}^{k}\frac{M_{KN}^{l_2}T^{m+k}P_0}{(m+k)!}(\mu_n^{(l_2)}-\eta_n^{(l_2)}),$$

$$\mu_{n+1}^{(l_2)}-\eta_{n+1}^{(l_2)} \le$$

$$\le \frac{P_1T^{m+k}}{(m+k)!\xi_{l_2}k}\left(M_{AB}\|v_{n+1}(t)-u_{n+1}(t)\|+\sum_{l_2=1}^{k}M_{KN}^{l_2}(\mu_n^{(l_2)}-\eta_n^{(l_2)})\right) =$$

$$= \frac{P_1 T^{m+k} M_{AB}}{(m+k)!\xi_{l_2} k} \left\| v_{n+1}(t) - u_{n+1}(t) \right\| + \sum_{l_2=1}^{k} \frac{P_1 T^{m+k} M_{KN}^{l_2}}{(m+k)!\xi_{l_2} k} (\mu_n^{(l_2)} - \eta_n^{(l_2)}),$$

де

$$P_0 = \max_{t\in[0;T]} \sum_{i=1}^{m+k} \left| \frac{P_{m+k,i}(t)}{P_{m+k,i}(t_i)} \right|, \qquad P_1 = \sum_{i=1}^{k+m} \frac{1}{P_{m+k,i}(t_i)}.$$

Отже,

$$\| z_{n+1} - y_{n+1} \| \leq \| Q \| \| z_n - y_n \|, \tag{12}$$

$$\| z_{n+1} - y_{n+1} \| \leq Q_0^{n+1} \| z_0 - y_0 \|. \tag{13}$$

Співвідношення (6) та (11) – (13) забезпечують існування спільної границі для послідовностей $\{ y_n \}$ та $\{ z_n \}$: $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = w^*$. Переходячи до границі в (8) і диференціюючи отриману рівність по t m разів, переконуємося, що $w^* = \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix}$ є розв'язком рівняння (1), який задовольняє крайові умови (2). Скориставшись методом від супротивного, можна довести єдиність цього розв'язку.

Теорему доведено.

Зазначимо, що у випадку нульових операторів $A_1(t, u, v)$, $B_2(t, u, v)$ та $K_1(t, \eta, \mu)$, $N_2(t, \eta, \mu)$, взявши за $A_2(t, u, v)$, $B_1(t, u, v)$, $K_2(t, \eta, \mu)$, $N_1(t, \eta, \mu)$ сталі Ліпшиця функції $H(t, u, v, \eta, \mu)$ зі змінними u, v, η, μ відповідно, з наведених вище результатів отримаємо результати із [6]. Отримані результати є близькими також до відповідних результатів із [8]. Відмітимо також, що алгоритм (4), (5) є зручним для практичної реалізації з огляду на певну довільність вибору A_1, B_2 та K_1, N_2, яка дозволяє, наприклад, враховувати вплив похибок заокруглень на двосторонність та монотонність отримуваних послідовних наближень і т. п.

Подібні результати можна встановити і при застосуванні до інших крайових задач для рівнянь з параметрами. Тому перспективними у цьому напрямку можна вважати розширення класів задач, для апроксимації розв'язків яких можна застосовувати досліджений двосторонній алгоритм, а також побудову схем дискретизації, придатних для його реалізації за допомогою сучасних обчислювальних засобів.

1. *Кибенко А. В., Перов А. И.* О двухточечной краевой задаче с параметром // Докл. АН УССР. – 1961. – № 10. – С. 1259 – 1261.
2. *Марусяк А. Г.* Об одном двустороннем методе решения краевой задачи с параметром // Мат. физика. – 1980. – Вып. 27. – С. 39 – 45.
3. *Собкович Р. И.* Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения первого порядка с несколькими параметрами // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 6. – С. 796 – 802.
4. *Курпель Н. С., Марусяк А. Г.* Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения с параметром // Там же. – 1980. – **32**, № 2. – С. 223 – 226.
5. *Король І. І.* Про один підхід до інтегрування параметризованих крайових задач // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 70 – 78.
6. *Собкович Р. И.* Двусторонний метод исследования некоторых краевых задач с параметрами. – Киев, 1981. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.52).
7. *Шувар Б. А.* Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симп. по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. – Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1981. – **1**. – С. 68 – 73.
8. *Rabczuk R.* Elementz nierownosci rozniczkowzh. – Warshawa: PWN, 1976. – 276 p.

Одержано 18.03.2004