УДК 517.36

С. К. Персидский (Таврич. нац. ун-т, Симферополь)

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

By using Lyapunov functions, we obtain for the first time necessary and sufficient conditions of the exponential stability of some nonlinear systems of differential and difference equations.

За допомогою функцій Ляпунова вперше отримано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості деяких нелінійних систем диференціальних і різницевих рівнянь.

В настоящей работе для одного класса нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в целом и экспоненциальной неустойчивости. Исследуется экспоненциальная устойчивость возмущенных систем с нелинейным первым приближением.

Заметим, что проблема экспоненциальной устойчивости нелинейных систем связана с работой Л. Груйича [1], в которой приведены достаточные условия экспоненциальной устойчивости в целом одной нелинейной сложной системы с нелинейными изолированными подсистемами, которые предполагаются либо экспоненциально устойчивыми, либо экспоненциально неустойчивыми.

1. Об экспоненциальной устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений. Пусть $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n): x_s\alpha_s \geq 0$, где $s = 1, \ldots, n$, — выпуклый конус пространства R^n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — параметры конуса [2]. Например, положительный октант K_n^+ пространства R^n имеет параметры, равные единице.

Определение 1. *Матрицу P размерности $n \times n$ будем называть квазипозитивной, если элементы P_{sk} матрицы P и параметры некоторого конуса $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ связаны соотношениями*

$$p_{sk}\alpha_s\alpha_k \geq 0 \quad \textit{при} \quad s \neq k, \quad \textit{где} \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с квазипозитивной матрицей P

$$x' = P\varphi(x), \tag{2}$$

$$\varphi(x) = \operatorname{col}(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)),$$

где $\varphi_s(x_s)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\varphi_s(x_s)x_s > 0 \quad \text{при} \quad x_s \neq 0, \qquad s = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть правые части системы дифференциальных уравнений* (2) *удовлетворяют сформулированным выше условиям, а функции $\varphi_s(x_s)$ — соотношению* (3) *и неравенствам*

$$k_1|x_s| \leq |\varphi_s(x_s)| \leq k_2|x_s|, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $k_2 > k_1$ — некоторые положительные числа.

Тогда для абсолютной экспоненциальной устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни „характеристического” уравнения

$$\det(P - \lambda E) = 0 \tag{5}$$

имели отрицательные вещественные части.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (2) экспоненциально устойчива при любых непрерывных функциях $\varphi_s(x_s)$, удовлетворяющих условиям (1) и (3). В частности, она экспоненциально устойчива при $\varphi_s(x_s) = x_s$, $s = 1, \ldots, n$, но тогда все корни характеристического уравнения (5) должны иметь отрицательные вещественные части.

Достаточность. В рассматриваемом случае все корни характеристического уравнения (5) лежат в левой полуплоскости. В силу этого все определяемые из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} p_{ks} b_k \alpha_k + p_{ss} b_s = -\alpha_s, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

числа $b_1, \ldots, b_n$ будут положительные [2].

Умножая правые части системы (6) на соответствующие параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ конуса $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получаем систему

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{ks}| b_k + p_{ss} b_s = -1, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Положим

$$\nu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s| = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s \operatorname{sign} x_s .$$

Тогда ν' в силу системы (2) приводится к виду

$$\nu'_{(2)} \le \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{ks}| b_k + p_{ss} b_s \right) |\varphi_s(x_s)| = -\sum_{s=1}^{n} |\varphi_s(x_s)|.$$

Согласно (4) окончательно получаем неравенства

$$d_1 \|x\| \le \nu(x) \le d_2 \|x\|, \qquad \nu'_{(2)} \le -k_1 \|x\| \le -\frac{k_1}{d_2} \nu(x),$$

где $d_1 = \min_s \{b_s\}$, $d_2 = \max_s \{b_s\}$ и $\|x\| = \sum_{s=1}^{n} |x_s|$.

Следовательно, на решениях системы (2) выполнены неравенства

$$\|x(t)\| \le \frac{d_2}{d_1} \|x(t_0)\| \exp\left(-\frac{k_1}{d_2}(t - t_0) \right),$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что система вида (2) впервые была рассмотрена Е. А. Барбашиным [3].

Рассмотрим далее нелинейную систему дифференциальных уравнений с квазипозитивной матрицей P, рассмотренную в работе [4]:

$$x' = P\varphi(x) + R(\varphi(x)), \tag{8}$$

где вектор-функция $R(\varphi(x))$ удовлетворяет соотношению

$$\|R(\varphi)\| = o\|\varphi\| \quad \text{при} \quad \|\varphi\| \to 0.$$

Соответствующую систему вида (2), содержащуюся в (8), будем называть „нелинейным первым приближением” системы (8).

Теорема 2. *Пусть непрерывные функции* $\varphi_s(x_s)$ *удовлетворяют соотношениям* (3) *и неравенствам* (4). *Тогда для экспоненциальной устойчивости решения системы* (8) *в некоторой достаточно малой окрестности начала координат необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения* (5) *имели отрицательные вещественные части.*

Доказательство. *Необходимость.* При $\varphi_s(x_s) = x_s$, $s = 1, \ldots, n$, нелинейная возмущенная система (8) переходит в линейную возмущенную систему Ляпунова вида

$$x' = Px + R(x),$$

где $\| R(x) \| = o \| x \|$ при $\| x \| \to 0$. Отсюда следует выполнение необходимых условий теоремы.

Для доказательства *достаточности* определим числа $b_1, \ldots, b_n$ из соответствующей системы (7) и положим

$$\nu(x) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s|.$$

Эта функция будет удовлетворять неравенству

$$d_1 \| x \| \le \nu(x) \le d_2 \| x \|,$$

где $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

В силу полной системы (8) полная производная функции $\nu(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\nu'_{(8)} \le -\frac{k_1}{2} \| x \| - \left(\frac{k_1}{2} \| x \| - d_2 \| R(\varphi) \| \right).$$

Из последнего неравенства следует, что в достаточно малой окрестности начала координат $\| x \| < \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, решения системы (8) будут удовлетворять неравенству вида

$$\| x(t) \| \le \frac{d_2}{d_1} \| x(t_0) \| \exp\left(-\frac{k_1}{2d_1}(t - t_0) \right),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Пусть дана система дифференциальных уравнений (2) с квазипозитивной матрицей P, причем все функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют неравенствам (3). Тогда нетрудно видеть [2], что соответствующий конус $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для системы (2) является замкнутым сектором. Отсюда легко получить следующую теорему об экспоненциальной неустойчивости в конусе.

Теорема 3. *Пусть система* (2) *с квазипозитивной матрицей* P *такова, что функции* $\varphi_s(x_s)$ *удовлетворяют условиям* (4) *и в соответствующем конусе* $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — *неравенствам*

$$\alpha_s \varphi_s(x_s) \ge \alpha_s x_s, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Тогда для экспоненциальной неустойчивости решений этой системы в рассматриваемом конусе необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (5) *имели положительные вещественные части.*

Доказательство. *Необходимость* условий теоремы очевидна.

Для доказательства *достаточности* заметим, что из условия квазипозитивности матрицы P следует, что соответствующий конус $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является закрытым сектором [2]. Определим числа $b_1, \ldots, b_n$ из системы уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{ks}| b_k + p_{ss} b_s = 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Нетрудно видеть, что все b_s положительные. Затем в рассматриваемом конусе положим

$$\nu(x) = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s \alpha_s = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s|.$$

В силу системы (2) и условия (9) в рассматриваемом конусе имеем

$$d_1 \|x\| \leq \nu(x) \leq d_2 \|x\|, \qquad \nu'_{(2)} = \sum_{s=1}^{n} |\varphi_s(x_s)| \geq \|x\|.$$

Следовательно, $\nu'_{(2)} \geq \nu(x)/d_2$ или

$$\|x(t)\| \geq \frac{d_1}{d_2} \|x(t_0)\| \exp\left(\frac{1}{d_2}(t - t_0)\right).$$

Теорема доказана.

2. Экспоненциальная устойчивость решений нелинейных разностных систем. Пусть P — вещественная постоянная невырожденная матрица размерности $n \times n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — параметры некоторого конуса $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset R^n$.

Определение 2. *Будем называть указанную матрицу „квазиположительной", если ее элементы* p_{sk} *и параметры некоторого конуса* $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *связаны соотношениями*

$$p_{ks} \alpha_k \alpha_s \geq 0, \quad s, k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим систему разностных уравнений с „квазиположительной" матрицей P вида

$$x(m+1) = P\varphi(x(m)), \tag{10}$$

где $m \in J = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$, $\varphi(x(m)) = \mathrm{col}(\varphi_1(x_1(m)), \ldots, \varphi_n(x_n(m)))$. В дальнейшем будем предполагать, что все функции $\varphi_s(x_s(m))$ являются однозначными, принимающими в каждой точке множества J конечные значения и сохраняющими знаки своих аргументов $(\varphi_s(0) = 0)$.

Теорема 4. *Пусть правые части системы разностных уравнений* (10) *удовлетворяют сформулированным выше условиям, а функции* $\varphi_s(x_s(m))$ *удовлетворяют, кроме того, при любом* $m \in J$ *неравенствам вида*

$$|\varphi_s(x_s(m))| \leq |x_s(m)|, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Тогда для абсолютной экспоненциальной устойчивости решений системы уравнений (10) *необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения*

$$\det(P - \mu E) = 0 \tag{11}$$

лежали внутри единичного круга.

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Докажем *достаточность* условий теоремы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s}}^{n} |p_{ks}| b_k + (p_{ss}-1) b_s = -1, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Нетрудно видеть [5], что все определяемые из системы (12) числа $b_1, \ldots, b_n$ будут положительными.

Положим

$$\nu(x(m)) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s(m)|.$$

Очевидно, что функции $\nu(x)$ удовлетворяют неравенству $a\|x\| \leq \nu(x) \leq \leq b\|x\|$, где $a > 0$, $b > 0$. Не нарушая общности, будем считать, что $b > 1$. Отсюда следует, что на решениях системы (10) выполняется неравенство

$$\nu(x(m+1)) \leq \left(1 - \frac{1}{b}\right)\nu(x(m)) = \lambda\nu(x(m)), \tag{13}$$

где $0 < \lambda < 1$.

На основании (13) заключаем, что при всех $m \geq m_0 \geq 0$ должно выполняться соотношение

$$\|x(m)\| \leq \frac{b}{a}\lambda^{(m-m_0)}\|x(m_0)\| = Be^{-\beta(m-m_0)}\|x(m_0)\|,$$

где $B = b/a \geq 1$, $\beta = -\ln\lambda > 0$. Это доказывает достаточность условий теоремы.

Замечание. Если правые части системы (10) заданы в некоторой ограниченной области $h: m \in I$, $\|x\| \leq R$, и при этом выполнены все условия теоремы 4, то решение системы (10) будет экспоненциально устойчиво в области h.

Справедливы также следующие теоремы.

Теорема 5. *Если нелинейное первое приближение системы*

$$x(m+1) = P\varphi(x(m)) + R\varphi(x(m)) \tag{14}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 4, *а* $\|R(\varphi)\| = o(\|\varphi\|)$ *при* $\|\varphi\| \to 0$, *то в некоторой достаточно малой окрестности начала координат решения системы* (14) *экспоненциально устойчивы.*

Теорема 6. *Пусть конечно-разностная система* (10) *с квазиположительной матрицей* P *такова, что в соответствующем конусе* $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *выполнены неравенства*

$$\alpha_s\varphi_s(x_s(m)) \geq \alpha_s x_s(m), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Тогда, если все корни характеристического уравнения (11) *лежат вне круга единичного радиуса, в указанном конусе решения рассматриваемой системы уравнений экспоненциально неустойчивы.*

В качестве примера применения теоремы 4 для случая ограниченной области рассмотрим в области $h: m \in I$, $\|x\| \leq 1$ разностную систему

$$x_1(m+1) = 0{,}5\sin^3 x_1(m) + 0{,}1\,x_2^5(m),$$

$$x_2(m+1) = 0{,}1\sin^3 x_1(m) + 0{,}5\,x_2^5(m).$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет корни μ_1 и μ_2, лежащие внутри единичного круга, а соответствующий конус $K(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет параметры α_1 и α_2, равные единице, кроме того, в h $|\sin^3 x_1| \leq |x_1|$, $|x_2^5| \leq |x_2|$.

Найдем числа b_1 и b_2 из системы уравнений

$$\begin{aligned} (0{,}5-1)b_1 + 0{,}1b_2 &= -1, \\ 0{,}1b_1 + (0{,}5-1)b_2 &= -1 \end{aligned} \tag{15}$$

и положим $\nu(x_1, x_2) = b_1|x_1| + b_2|x_2|$.

Применим к функции $\nu(x_1, x_2)$ довольно грубую оценку:

$$2\|x\| \le \nu(x_1, x_2) \le 3\|x\|.$$

Тогда в силу системы

$$\nu(x(m+1)) \le \left(1 - \frac{1}{3}\right)\nu(x(m)).$$

Отсюда получаем оценку решений системы (15)

$$\|x(m)\| \le \frac{3}{2}\|x(m_0)\| e^{\ln(2/3)(m-m_0)},$$

которая справедлива для всей области h при $m \ge m_0 \ge 0$.

В заключение заметим, что невозмущенные системы дифференциальных и разностных уравнений (2) и (10) допускают существование закрытого сектора в виде некоторого выпуклого конуса $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что, в конечном итоге, и позволило доказать все теоремы, приведенные в настоящей работе.

В теории устойчивости понятие сектора было введено К. П. Персидским [6]. Это понятие оказалось очень плодотворным и широко применяется в методе функций Ляпунова.

1. *Grujic L. T.* Stability analysis of large-scale systems with stable and unstable subsystems // Int. J. Contr. – 1974. – **2**. – P. 453–463.
2. *Персидский С. К.* К исследованию устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**. – С. 219–226.
3. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 239 с.
4. *Персидский С. К.* Применение однородных многочленов в качестве функций Ляпунова // Динам. системы. – 2000. – Вып. 16. – С. 15–21.
5. *Персидский С. К.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем уравнений в конечных разностях // Дифференц. уравнения и их применения. – Алма-Ата: Изд-во Казах. ун-та, 1979. – С. 114–116.
6. *Персидский К. П.* Ко второй методе Ляпунова // Изв. АН Каз ССР. Сер. мат. – 1947. – № 42, вып. 1. – С. 48–53.

Получено 29.08.2003