УДК 517.5

А. А. Кореновский (Одес. нац. ун-т, Ин-т математики, экономики и механики)

ОЦЕНКА ПЕРЕСТАНОВКИ ФУНКЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ „ОБРАТНОМУ НЕРАВЕНСТВУ ЙЕНСЕНА”*

We consider the functions satisfying the “reverse Jensen inequality” with respect to various multidimensional segment. We show that the equimeasurable rearrangement of every function of this sort also satisfies the “reverse Jensen inequality” with the same constant.

Показано, що для будь-якої функції, що задовольняє „обернену нерівність Єнсена” по всіляких багатовимірних сегментах, її рівновимірне переставлення також задовольняє „обернену нерівність Єнсена” з тією самою сталою.

1. Введение. Пусть Φ — класс положительных на $(0, +\infty)$, выпуклых вниз функций φ таких, что $\varphi(0) = \varphi(0+)$ (равное, быть может, нулю или бесконечности); μ — абсолютно непрерывная мера, $d\mu(x) = w(x)dx$, где w — локально суммируемая, неотрицательная весовая функция. Для измеримой на сегменте $R_0 \equiv \prod_{j=1}^{d}[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^d$ функции f невозрастающей равноизмеримой перестановкой по отношению к мере μ называется функция

$$f_\mu^{[\downarrow]}(t) = \sup_{e\subset R_0, \mu(e)=t} \inf_{x\in e} f(x), \quad 0 \le t \le \mu(R_0).$$

Функция $f_\mu^{[\downarrow]}$ равноизмерима с f в том смысле, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mu(\{x \in R_0 : f(x) > \lambda\}) = \left|\left\{t \in (0, \mu(R_0)] : f_\mu^{[\downarrow]}(t) > \lambda\right\}\right|,$$

где символом $|\cdot|$ обозначена мера Лебега. Аналогично, неубывающая равноизмеримая перестановка измеримой на R_0 функции f определяется равенством

$$f_\mu^{[\uparrow]}(t) = \inf_{e\subset R_0, \mu(e)=t} \sup_{x\in e} f(x), \quad 0 \le t \le \mu(R_0).$$

Фундаментальное свойство перестановок $f_\mu^{[\downarrow]}$ и $f_\mu^{[\uparrow]}$, следующее непосредственно из определения, состоит в том, что для любого $t \in [0, \mu(R_0)]$ справедливы равенства

$$\sup_{e\subset R_0, \mu(e)=t} \int_e f(x)d\mu(x) = \int_0^t f_\mu^{[\downarrow]}(\tau)d\tau,$$

$$\inf_{e\subset R_0, \mu(e)=t} \int_e f(x)d\mu(x) = \int_0^t f_\mu^{[\uparrow]}(\tau)d\tau,$$

причем нетрудно показать, что верхняя и нижняя грани в левых частях достигаются. Кроме того, для неотрицательной на R_0 функции f из равноизмеримости $f_\mu^{[\downarrow]}$, $f_\mu^{[\uparrow]}$ и f следует, что для любой $\varphi \in \Phi$

$$\int_0^{\mu(R_0)} \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt = \int_0^{\mu(R_0)} \varphi\left(f_\mu^{[\uparrow]}(t)\right)dt = \int_{R_0} \varphi(f(x))d\mu x.$$

Пусть $\varphi \in \Phi$, функция f неотрицательна на сегменте $R_0 \subset \mathbb{R}^d$. Тогда для

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (грант № Ф7/329-2001).

любого сегмента $R \subset R_0$ имеет место неравенство Йенсена [1, с. 182 – 184]

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(R)}\int_R f(x)\,d\mu(x)\right) \le \frac{1}{\mu(R)}\int_R \varphi(f(x))\,d\mu(x). \tag{1}$$

В данной работе изучаются свойства функций f, удовлетворяющих „обратному неравенству Йенсена”

$$\frac{1}{\mu(R)}\int_R \varphi(f(x))\,d\mu(x) \le B\varphi\left(\frac{1}{\mu(R)}\int_R f(x)\,d\mu(x)\right), \quad R \subset R_0, \tag{2}$$

где постоянная $B > 1$ не зависит от сегмента R.

В случае $\varphi(u) = u^p$, $p > 1$, неравенство (2) называют неравенством Геринга [2], или „обратным неравенством Гельдера”, а при $\varphi(u) = u^{-1/(p-1)}$, $p > 1$ — A_p-условием Макенхаупта [3]. Классы функций, удовлетворяющих условиям Геринга, Макенхаупта и близким условиям, широко применяются в теории квазиконформных отображений, дифференциальных уравнений с частными производными, в теории весовых пространств и др. При изучении свойств функций из этих классов часто оказываются полезными оценки равноизмеримых перестановок. Так, в работе [4] с помощью оценки невозрастающей перестановки дано более простое (по сравнению с известными ранее) доказательство основного свойства функции из класса Геринга — повышения показателя суммируемости. В работах [5, 6] аналогичное свойство для функции, удовлетворяющей условию Макенхаупта, также получено с помощью оценки равноизмеримой перестановки. При некоторых дополнительных предположениях на функцию $\varphi \in \Phi$ в работе [7] получена оценка перестановки функции, удовлетворяющей „обратному неравенству Йенсена” (2), в котором вместо сегментов рассматриваются всевозможные кубы. В этом случае вопрос о точности подобных оценок, как правило, трудный. Автору неизвестны работы, в которых были бы получены точные оценки равноизмеримых перестановок функций, удовлетворяющих условию (2) „по многомерным кубам” даже для каких-либо специального вида функций φ. В пространстве размерности $d = 1$ точная оценка равноизмеримой перестановки функции, удовлетворяющей „обратному неравенству Йенсена” (2), получена в [8, 9]. С помощью этой оценки в [8, 9] найдены предельные показатели суммируемости функций, удовлетворяющих условию Геринга и Макенхаупта, а в работах [10, 11] установлена точная связь этих классов между собой. Для монотонной функции из класса Геринга ранее точный показатель суммируемости был найден в [12, 13]. Точный показатель суммируемости функции, удовлетворяющей условию Геринга „по многомерным сегментам”, вычислен в работе [14].

Итак, описание экстремальных свойств функций, удовлетворяющих „обратному неравенству Йенсена” (2), можно упростить при наличии точных оценок равноизмеримых перестановок функций из соответствующих классов. В свою очередь, оценки перестановок базируются, как правило, на применении так называемых лемм „о покрытии”. Традиционно для получения таких оценок использовалась лемма Кальдерона – Зигмунда [15], но в одномерном случае оценки, основанные на применении этой леммы, оказываются завышенными. При $d = 1$ более точным вариантом леммы Кальдерона – Зигмунда является лемма Ф. Рисса „о восходящем солнце” [16; 1, с. 352; 17]. Именно применение этой леммы в [8] дало возможность при $d = 1$ получить точную оценку перестановки функции, удовлетворяющей условию (2). В многомерном случае аналог леммы „о восходящем солнце” не имеет места, если вместо одномерных отрезков рассматривать многомерные кубы (см. [18]). Если же вместо кубов использовать всевозможные многомерные сегменты, то соответствующий аналог леммы Ф. Рисса „о восходящем солнце” остается справедливым (см. ниже леммы 1 и 2) и, таким образом, модифицируя рассуждения из [8], приходим к следующей теореме, которая составляет основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, *неотрицательная на сегменте* $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ *функция* f *удовлетворяет условию* (2). *Тогда для любого отрезка* $I \subset [0, \mu(R_0)]$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{|I|}\int_I \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt \leq B\varphi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\downarrow]}(t)\,dt\right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{|I|}\int_I \varphi\left(f_\mu^{[\uparrow]}(t)\right)dt \leq B\varphi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\uparrow]}(t)\,dt\right). \tag{4}$$

Замечание. Доказательство теоремы, приведенное ниже, более подробное и более простое, нежели доказательство соответствующей оценки в работе [8] для $d = 1$. Кроме того, в отличие от [8] теорема 1 будет доказана в более общем весовом случае. Это сделано не с целью простого обобщения, а потому, что для весовых классов функций, удовлетворяющих условию Геринга и Макенхаупта, легко можно устанавливать связь между этими классами (см. [19]).

2. Вспомогательные утверждения и доказательство теоремы 1. Как отмечено выше, ключевую роль при доказательстве теоремы 1 играют следующие две леммы, которые являются многомерными аналогами известной леммы Ф. Рисса „о восходящем солнце".

Лемма 1 [20, 21]. *Пусть функция* f *суммируема по мере* μ *на сегменте* R_0 *и число* $A \geq (\mu(R_0))^{-1}\int_{R_0} f(x)d\mu(x)$. *Тогда существует не более чем счетный набор сегментов* $R_j \subset R_0$, $j = 1, 2, \ldots$, *внутренности которых попарно не пересекаются, таких, что*

$$\frac{1}{\mu(R_j)}\int_{R_j} f(x)d\mu(x) = A, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$f(x) \leq A \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{j\geq 1} R_j\right).$$

Легко видеть, что лемму 1 можно сформулировать в следующем эквивалентном виде.

Лемма 2. *Пусть функция* f *суммируема по мере* μ *на сегменте* R_0 *и число* $A \leq (\mu(R_0))^{-1}\int_{R_0} f(x)d\mu(x)$. *Тогда существует не более чем счетный набор сегментов* $R_j \subset R_0$, $j = 1, 2, \ldots$, *внутренности которых попарно не пересекаются, таких, что*

$$\frac{1}{\mu(R_j)}\int_{R_j} f(x)d\mu(x) = A, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$f(x) \geq A \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{j\geq 1} R_j\right).$$

Лемма 3 [8]. *Пусть неотрицательная, суммируемая функция* g *монотонна на отрезке* $[a, b]$ *и отрезок* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ *такой, что*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(t)dt.$$

Тогда для любой $\varphi \in \Phi$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(g(t))dt \;\le\; \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\varphi(g(t))dt.$$

Следующая лемма отражает простое свойство выпуклой функции, которое нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 4 [8]. *Пусть числа* $0 \le \gamma_1, \gamma_2 \le 1$, $a \ge b \ge c \ge d > 0$ *таковы, что* $\gamma_1 a + (1-\gamma_1)d = \gamma_2 b + (1-\gamma_2)c$. *Тогда для любой* $\varphi \in \Phi$ *выполняется неравенство*

$$\gamma_1\varphi(b) + (1-\gamma_1)\varphi(c) \;\le\; \gamma_2\varphi(a) + (1-\gamma_2)\varphi(d).$$

Основу доказательства теоремы 1 составляют две следующие леммы.

Лемма 5. *Пусть неотрицательная на множестве* $E \cup \hat{E}$ *функция* f *имеет следующие свойства*:

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)d\mu(x) \;=\; \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int_{\hat{E}} f(x)d\mu(x) \;\equiv\; A, \tag{5}$$

$$f(x) \le A, \qquad x \notin E \cap \hat{E}, \tag{6}$$

$$f(x) \le f(y), \qquad x \in \hat{E}\setminus E, \qquad y \in E. \tag{7}$$

Тогда для любой $\varphi \in \Phi$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) \;\le\; \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int_{\hat{E}} \varphi\big(f(x)\big)d\mu(x). \tag{8}$$

Доказательство. Рассматриваем нетривиальный случай, когда f не является μ-эквивалентной тождественной постоянной A. Покажем сначала, что

$$\mu(\hat{E}) \;\le\; \mu(E). \tag{9}$$

Действительно, из (5) и (6) следует

$$\int_{E\setminus\hat{E}} (A - f(x))d\mu(x) \;=\; \int_{\hat{E}\setminus E} (A - f(x))d\mu(x). \tag{10}$$

Используя условие (7), находим c такое, что

$$f(x) \le c \le f(y), \quad x \in \hat{E}\setminus E, \quad y \in E.$$

Тогда получаем

$$\int_{E\setminus\hat{E}} (A - f(x))d\mu(x) \;\le\; (A-c)\mu(E\setminus\hat{E}),$$

$$\int_{\hat{E}\setminus E} (A - f(x))d\mu(x) \;\ge\; (A-c)\mu(\hat{E}\setminus E).$$

Поскольку, очевидно, $c < A$, из этих двух неравенств и из (10) следует

$$\mu(\hat{E}\setminus E) \;\le\; \mu(E\setminus\hat{E}),$$

а это равносильно (9).

Построим множества E' и E'' такие, что

$$E' \bigcup E'' = E \backslash \hat{E}, \quad E' \bigcap E'' = \varnothing, \quad \mu(E') = \mu(\hat{E} \backslash E)$$

и $f(x) \le f(y)$ при любых $x \in E''$, $y \in E'$. Зададим натуральное k и разобьем множества E', E'' и $\hat{E} \backslash E$ на попарно непересекающиеся подмножества следующим образом. Обозначим

$$g^{(1)}(t) = (f|E')_{\mu}^{[\downarrow]}(t), \quad 0 \le t \le \mu(E'),$$

$$g^{(2)}(t) = (f|E'')_{\mu}^{[\downarrow]}(t), \quad 0 \le t \le \mu(E''),$$

$$g^{(3)}(t) = \left(f|(\hat{E} \backslash E)\right)_{\mu}^{[\downarrow]}(t), \quad 0 \le t \le \mu(\hat{E} \backslash E),$$

и положим $\alpha_{0,k}^{(j)} = g^{(j)}(0)$, $j = 1, 2, 3$, $\tau_{0,k}^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$. Предположим, что уже построены числа

$$\tau_{0,k}^{(1)} < \tau_{1,k}^{(1)} < \ldots < \tau_{s,k}^{(1)}, \quad \tau_{0,k}^{(2)} < \tau_{1,k}^{(2)} < \ldots < \tau_{s,k}^{(2)},$$

$$\alpha_{0,k}^{(1)} \ge \alpha_{1,k}^{(1)} \ge \ldots \ge \alpha_{s,k}^{(1)} \ge \alpha_{0,k}^{(2)} \ge \alpha_{1,k}^{(2)} \ge \ldots \ge \alpha_{s,k}^{(2)} \ge \alpha_{0,k}^{(3)} \ge \alpha_{1,k}^{(3)} \ge \ldots \ge \alpha_{s,k}^{(3)}$$

и попарно непересекающиеся множества

$$E'_{l,k} \subset E', \quad E''_{l,k} \subset E'', \quad \hat{E}_{l,k} \subset \hat{E} \backslash E, \quad l = 1, 2, \ldots, s,$$

такие, что

$$\max\left(\alpha_{l,k}^{(1)}, \alpha_{l-1,k}^{(1)} - \frac{1}{k}\right) \le f(x) \le \alpha_{l-1,k}^{(1)}, \quad x \in E'_{l,k},$$

$$\max\left(\alpha_{l,k}^{(2)}, \alpha_{l-1,k}^{(2)} - \frac{1}{k}\right) \le f(x) \le \alpha_{l-1,k}^{(2)}, \quad x \in E''_{l,k},$$

$$\alpha_{l,k}^{(3)} \le f(x) \le \alpha_{l-1,k}^{(3)} \quad x \in \hat{E}_{l,k},$$

$$\mu(E'_{l,k}) = \mu(\hat{E}_{l,k}) = \tau_{l,k}^{(1)} - \tau_{l-1,k}^{(1)}, \tag{11}$$

$$\mu(E''_{l,k}) = \tau_{l,k}^{(2)} - \tau_{l-1,k}^{(2)},$$

$$\int_{E'_{l,k}} f(x)d\mu(x) - \int_{\hat{E}_{l,k}} f(x)d\mu(x) = \int_{E''_{l,k}} (A - f(x))d\mu(x). \tag{12}$$

Если

$$\mu(E') = \sum_{l=1}^{s} \mu(E'_{l,k}),$$

то процесс разбиения множеств E', E'' и $\hat{E} \backslash E$ на этом заканчивается. В противном случае будем строить $\alpha_{s+1,k}^{(j)}$, $\tau_{s+1,k}^{(j)}$, $E'_{s+1,k}$, $E''_{s+1,k}$ и $\hat{E}_{s+1,k}$ по такой схеме. Рассматриваем строго возрастающие непрерывные функции

$$\eta(\tau) = \int_{\tau_{s,k}^{(1)}}^{\tau} \left(g^{(1)}(t) - g^{(3)}(t)\right)dt, \quad \tau_{s,k}^{(1)} \le \tau \le \mu(E'),$$

и

$$\zeta(\xi) = \int_{\tau_{s,k}^{(2)}}^{\xi} \left(A - g^{(2)}(t)\right)dt, \qquad \tau_{s,k}^{(2)} \le \xi \le \mu(E'').$$

Ясно, что $\eta(\tau_{s,k}^{(1)}) = \zeta(\tau_{s,k}^{(2)}) = 0$ и $\eta(\mu(E')) = \zeta(\mu(E''))$. В силу строгой монотонности функции $\zeta(\xi)$ для каждого $\tau \in [\tau_{s,k}^{(1)}, \mu(E')]$ найдется единственное значение $\xi = \xi(\tau)$ такое, что

$$\zeta(\xi(\tau)) = \eta(\tau), \tag{13}$$

причем функция $\xi(\tau)$ непрерывна. Обозначим

$$\tau_{s+1,k}^{(1)} = \sup\left\{\tau \in \left(\tau_{s,k}^{(1)}, \mu(E')\right]:\ \max\left[g^{(1)}(\tau_{s,k}^{(1)}) - g^{(1)}(\tau),\ g^{(2)}(\tau_{s,k}^{(2)}) - g^{(2)}(\xi(\tau))\right] < \frac{1}{k}\right\},$$

$$\tau_{s+1,k}^{(2)} = \xi(\tau_{s+1,k}^{(1)}).$$

Отметим, что верхняя грань берется по непустому множеству, поскольку невозрастающая перестановка непрерывна справа. Положим

$$\alpha_{s+1,k}^{(1)} = g^{(1)}(\tau_{s+1,k}^{(1)}), \qquad \alpha_{s+1,k}^{(2)} = g^{(2)}(\tau_{s+1,k}^{(2)}), \qquad \alpha_{s+1,k}^{(3)} = g^{(3)}(\tau_{s+1,k}^{(1)}).$$

Тогда можно построить такие множества

$$E'_{s+1,k} \subset E' \backslash \left(\bigcup_{l=1}^{s} E'_{l,k}\right), \quad E''_{s+1,k} \subset E'' \backslash \left(\bigcup_{l=1}^{s} E''_{l,k}\right), \quad \hat{E}_{s+1,k} \subset (\hat{E} \backslash E) \backslash \left(\bigcup_{l=1}^{s} \hat{E}_{l,k}\right),$$

что

$$\max\left(\alpha_{s+1,k}^{(1)},\ \alpha_{s,k}^{(1)} - \frac{1}{k}\right) \le f(x) \le \alpha_{s,k}^{(1)}, \quad x \in E'_{s+1,k}, \tag{14}$$

$$\max\left(\alpha_{s+1,k}^{(2)},\ \alpha_{s,k}^{(2)} - \frac{1}{k}\right) \le f(x) \le \alpha_{s,k}^{(2)}, \quad x \in E''_{s+1,k}, \tag{15}$$

$$\alpha_{s+1,k}^{(3)} \le f(x) \le \alpha_{s,k}^{(3)}, \quad x \in \hat{E}_{s+1,k}.$$

При этом равенство (13) означает, что

$$\int_{E'_{s+1,k}} f(x)\,d\mu(x) - \int_{\hat{E}_{s+1,k}} f(x)\,d\mu(x) = \int_{E''_{s+1,k}} (A - f(x))\,d\mu(x).$$

Если окажется, что

$$\mu(E') = \sum_{l=1}^{s+1} \mu(E'_{l,k}),$$

то из (10) получим, что и

$$\mu(E'') = \sum_{l=1}^{s+1} \mu(E''_{l,k}), \qquad \mu(\hat{E} \backslash E) = \sum_{l=1}^{s+1} \mu(\hat{E}_{l,k}),$$

и поэтому процесс разбиения множеств E', E'' и $\hat{E} \backslash E$ на этом завершится. В противном случае выполняется неравенство

$$\max_{j=1,2}\left(\alpha_{s,k}^{(j)} - \alpha_{s+1,k}^{(j)}\right) \ge \frac{1}{k},$$

из которого следует, что количество шагов s не может возрастать неограниченно, т. е. найдется такое s_k, для которого

$$E' = \sum_{l=1}^{s_k} E'_{l,k}, \qquad E'' = \sum_{l=1}^{s_k} E''_{l,k}, \qquad \hat{E} \setminus E = \sum_{l=1}^{s_k} \hat{E}_{l,k}.$$

Обозначим

$$b_{l,k} = \frac{1}{\mu(E'_{l,k})} \int\limits_{E'_{l,k}} f(x)\,d\mu(x), \qquad c_{l,k} = \frac{1}{\mu(E''_{l,k})} \int\limits_{E''_{l,k}} f(x)\,d\mu(x),$$

$$d_{l,k} = \frac{1}{\mu(\hat{E}_{l,k})} \int\limits_{\hat{E}_{l,k}} f(x)\,d\mu(x), \quad l = 1, \ldots, s_k.$$

Тогда равенство (12) принимает вид

$$b_{l,k}\mu(E'_{l,k}) + c_{l,k}\mu(E''_{l,k}) = d_{l,k}\mu(\hat{E}_{l,k}) + A\mu(E''_{l,k}),$$

а с учетом (11) отсюда имеем

$$\frac{\mu(E'_{l,k})}{\mu(E'_{l,k})+\mu(E''_{l,k})} b_{l,k} + \frac{\mu(E''_{l,k})}{\mu(E'_{l,k})+\mu(E''_{l,k})} c_{l,k} =$$

$$= \frac{\mu(\hat{E}_{l,k})}{\mu(\hat{E}_{l,k})+\mu(E''_{l,k})} d_{l,k} + \frac{\mu(E''_{l,k})}{\mu(\hat{E}_{l,k})+\mu(E''_{l,k})} A.$$

Поскольку $A \geq b_{l,k} \geq c_{l,k} \geq d_{l,k}$, применяя лемму 4 с $a = A$, $b = b_{l,k}$, $c = c_{l,k}$, $d = d_{l,k}$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \mu(\hat{E}_{l,k})/(\mu(\hat{E}_{l,k})+\mu(E''_{l,k}))$, получаем

$$\mu(E'_{l,k})\varphi(b_{l,k}) + \mu(E''_{l,k})\varphi(c_{l,k}) \leq \mu(\hat{E}_{l,k})\varphi(d_{l,k}) + \mu(E''_{l,k})\varphi(A).$$

Применяя ко второму слагаемому справа неравенство Йенсена (1), имеем

$$\mu(E'_{l,k})\varphi(b_{l,k}) + \mu(E''_{l,k})\varphi(c_{l,k}) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\hat{E}_{l,k}} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \mu(E''_{l,k})\varphi(A), \qquad l = 1, \ldots, s_k.$$

Поэтому

$$\int\limits_{E \cap \hat{E}} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \sum_{l=1}^{s_k} \Big(\mu(E'_{l,k})\varphi(b_{l,k}) + \mu(E''_{l,k})\varphi(c_{l,k})\Big) \leq$$

$$\leq \int\limits_{E \cap \hat{E}} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \int\limits_{\hat{E} \setminus E} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \mu(E'')\varphi(A) =$$

$$= \int\limits_{\hat{E}} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \mu(E'')\varphi(A) =$$

$$= \frac{\mu(E)}{\mu(\hat{E})} \int\limits_{\hat{E}} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \left(1 - \frac{\mu(E)}{\mu(\hat{E})}\right) \int\limits_{\hat{E}} \varphi\big(f(x)\big)\,d\mu(x) + \mu(E'')\varphi(A). \qquad (16)$$

Но поскольку

$$\mu(E) - \mu(\hat{E}) = \mu(E') + \mu(E'') - \mu(\hat{E}\setminus E) = \mu(E''),$$

из неравенства Йенсена (1) и из (5) следует

$$\left(1-\frac{\mu(E)}{\mu(\hat{E})}\right)\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) + \mu(E'')\varphi(A) \le$$

$$\le \big(\mu(\hat{E})-\mu(E)\big)\frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) + \mu(E'')\frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x)\big(\mu(\hat{E})-\mu(E)+\mu(E'')\big) = 0.$$

Поэтому из (16) имеем

$$\frac{1}{\mu(E)}\left[\int\limits_{E\cap\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) + \sum_{l=1}^{s_k}\Big(\mu(E'_{l,k})\varphi(b_{l,k})+\mu(E''_{l,k})\varphi(c_{l,k})\Big)\right] \le$$

$$\le \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x). \tag{17}$$

Обозначим

$$f_k(x) = f(x)\chi_{E\cap\hat{E}}(x) + \sum_{l=1}^{s_k}\Big(b_{l,k}\,\chi_{E'_{l,k}}(x)+c_{l,k}\,\chi_{E''_{l,k}}(x)\Big), \quad x\in E.$$

Тогда неравенство (17) можем переписать так:

$$\frac{1}{\mu(E)}\int\limits_{E}\varphi\big(f_k(x)\big)d\mu(x) \le \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x). \tag{18}$$

Поскольку из (14) и (15) следует, что для μ-почти всех $x\in E$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f_k(x)| \le \frac{1}{k},$$

в силу непрерывности выпуклой функции φ получаем, что последовательность функций $\varphi(f_k)$ сходится к $\varphi(f)$ μ-почти всюду. Поэтому, применяя к (18) теорему Фату, получаем (8).

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть неотрицательная на множестве* $E\cup\hat{E}$ *функция* f *имеет следующие свойства*:

$$\frac{1}{\mu(E)}\int\limits_{E}f(x)d\mu(x) = \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}f(x)d\mu(x) \equiv A,$$

$$f(x) \ge A, \quad x\notin E\cap\hat{E},$$

$$f(x) \ge f(y), \quad x\in \hat{E}\setminus E, \quad y\in E.$$

Тогда для любой $\varphi\in\Phi$ *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int\limits_{E}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) \le \frac{1}{\mu(\hat{E})}\int\limits_{\hat{E}}\varphi\big(f(x)\big)d\mu(x).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5, и мы его опускаем.

***Доказательство теоремы* 1.** Поскольку неравенство

$$f_\mu^{[\downarrow]}(t) = f_\mu^{[\uparrow]}(\mu(R_0)-t)$$

справедливо во всех точках непрерывности перестановок, т. е. почти всюду на $[0,\mu(R_0)]$, неравенства (3) и (4) равносильны.

Зафиксируем отрезок $I \subset [0,\mu(R_0)]$. Если

$$\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt \geq \frac{1}{\mu(R_0)}\int_{R_0} f(x)d\mu(x),$$

то найдется такое $T \in [0,\mu(R_0)]$, что

$$\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt.$$

В этом случае обозначим $J = [0,T]$. Если же

$$\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt < \frac{1}{\mu(R_0)}\int_{R_0} f(x)d\mu(x),$$

то найдем такое $T \in [0,\mu(R_0)]$, для которого

$$\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt = \frac{1}{T}\int_{\mu(R_0)-T}^{\mu(R_0)} f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt.$$

Тогда обозначим $J = [\mu(R_0)-T,\mu(R_0)]$. В любом случае имеем

$$\frac{1}{|I|}\int_I f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt = \frac{1}{|J|}\int_J f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt,$$

а из монотонности перестановки $f_\mu^{[\downarrow]}$ следует, что $J \supset I$. Полагая в лемме 3 $[a,b] = J$, $[\alpha,\beta] = I$, $g = f_\mu^{[\downarrow]}$, получаем неравенство

$$\frac{1}{|I|}\int_I \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt \leq \frac{1}{|J|}\int_J \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt.$$

Таким образом, неравенство (3) достаточно доказать лишь для отрезка J. Иными словами, (3) и (4) являются следствиями таких двух неравенств:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt \leq B\varphi\left(\frac{1}{T}\int_0^T f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt\right), \qquad 0 \leq T \leq \mu(R_0), \tag{19}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(f_\mu^{[\uparrow]}(t)\right)dt \leq B\varphi\left(\frac{1}{T}\int_0^T f_\mu^{[\uparrow]}(t)dt\right), \qquad 0 \leq T \leq \mu(R_0). \tag{20}$$

Для доказательства (19) и (20) зафиксируем $T \in [0,\mu(R_0)]$ и обозначим

$$A^{[\downarrow]} = \frac{1}{T}\int_0^T f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt \geq \frac{1}{\mu(R_0)}\int_{R_0} f(x)d\mu(x), \tag{21}$$

$$A^{[\uparrow]} = \frac{1}{T}\int_0^T f_\mu^{[\uparrow]}(t)\,dt \le \frac{1}{\mu(R_0)}\int_{R_0} f(x)\,d\mu(x).$$

Использовав леммы 1 и 2, построим два набора сегментов $R_j^{[\downarrow]} \subset R_0$ и $R_k^{[\uparrow]} \subset$ $\subset R_0$ таких, что внутренности сегментов $R_j^{[\downarrow]}$ попарно не пересекаются и внутренности сегментов $R_k^{[\uparrow]}$ попарно не пересекаются,

$$\frac{1}{\mu(R_j^{[\downarrow]})}\int_{R_j^{[\downarrow]}} f(x)\,d\mu(x) = A^{[\downarrow]}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

$$f(x) \le A^{[\downarrow]} \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{j\ge 1} R_j^{[\downarrow]}\right),$$

$$\frac{1}{\mu(R_k^{[\uparrow]})}\int_{R_k^{[\uparrow]}} f(x)\,d\mu(x) = A^{[\uparrow]}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$f(x) \ge A^{[\uparrow]} \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{k\ge 1} R_k^{[\uparrow]}\right).$$

Обозначим $\hat{E}^{[\downarrow]} = \bigcup_{j\ge 1} R_j^{[\downarrow]}$, $\hat{E}^{[\uparrow]} = \bigcap_{k\ge 1} R_k^{[\uparrow]}$. Тогда

$$\mu\left(\left\{x \in R_0 : f(x) > A^{[\downarrow]}\right\}\setminus \hat{E}^{[\downarrow]}\right) = 0, \tag{24}$$

$$\mu\left(\left\{x \in R_0 : f(x) < A^{[\uparrow]}\right\}\setminus \hat{E}^{[\uparrow]}\right) = 0.$$

Если мы докажем неравенства

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt \le \frac{1}{\mu(\hat{E}^{[\downarrow]})}\int_{\hat{E}^{[\downarrow]}} \varphi(f(x))\,d\mu(x), \tag{25}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(f_\mu^{[\uparrow]}(t)\right)dt \le \frac{1}{\mu(\hat{E}^{[\uparrow]})}\int_{\hat{E}^{[\uparrow]}} \varphi(f(x))\,d\mu(x), \tag{26}$$

то из них сразу же получим (19) и (20). В самом деле, из (25), (2) и (22) следует

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(f_\mu^{[\downarrow]}(t)\right)dt \le \left(\sum_{j\ge 1}\mu\left(R_j^{[\downarrow]}\right)\right)^{-1}\sum_{j\ge 1}\int_{R_j^{[\downarrow]}} \varphi(f(x))\,d\mu(x) \le$$

$$\le \sup_{j\ge 1}\frac{1}{\mu(R_j^{[\downarrow]})}\int_{R_j^{[\downarrow]}} \varphi(f(x))\,d\mu(x) \le$$

$$\le B\sup_{j\ge 1}\varphi\left(\frac{1}{\mu(R_j^{[\downarrow]})}\int_{R_j^{[\downarrow]}} f(x)\,d\mu(x)\right) = B\varphi(A^{[\downarrow]}),$$

т. е. (19). Аналогично, неравенство (20) следует из (26), (2) и (23). Таким образом, остается доказать (25) и (26). Для этого построим множества $E^{[\downarrow]}$ и $E^{[\uparrow]}$ такие, что

$$\mu(E^{[\downarrow]}) = \mu(E^{[\uparrow]}) = T$$

и

$$f(x) \geq f_\mu^{[\downarrow]}(T), \quad x \in E^{[\downarrow]},$$

$$f(x) \leq f_\mu^{[\uparrow]}(T), \quad x \in E^{[\uparrow]}.$$

Покажем, что множества $E = E^{[\downarrow]}$ и $\hat{E} = \hat{E}^{[\downarrow]}$ удовлетворяют условиям леммы 5. Действительно, из (21) и (22) следует равенство

$$\frac{1}{\mu(E^{[\downarrow]})} \int\limits_{E^{[\downarrow]}} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_\mu^{[\downarrow]}(t)dt = A^{[\downarrow]} =$$

$$= \left(\sum_{j \geq 1} \mu\left(R_j^{[\downarrow]}\right)\right)^{-1} \sum_{j \geq 1} \int\limits_{R_j^{[\downarrow]}} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{\mu(\hat{E}^{[\downarrow]})} \int\limits_{\hat{E}^{[\downarrow]}} f(x)d\mu(x),$$

т. е. (5) при $A = A^{[\downarrow]}$. Далее, из (24) имеем, что включение

$$\left\{x \in R_0 : f(x) > A^{[\downarrow]}\right\} \subset \hat{E}^{[\downarrow]}$$

справедливо с точностью до множества μ-меры нуль, а включение

$$\left\{x \in R_0 : f(x) > A^{[\downarrow]}\right\} \subset E^{[\downarrow]}$$

следует из определения равноизмеримой перестановки $f_\mu^{[\downarrow]}$. Ясно, что (6) следует из этих двух включений. Наконец, неравенство (7) является простым свойством перестановки $f_\mu^{[\downarrow]}$. Аналогично показываем, что множества $E = E^{[\uparrow]}$ и $\hat{E} = \hat{E}^{[\uparrow]}$ удовлетворяют условиям леммы 6. Применяя леммы 5 и 6, получаем

$$\frac{1}{\mu(E^{[\downarrow]})} \int\limits_{E^{[\downarrow]}} \varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(\hat{E}^{[\downarrow]})} \int\limits_{\hat{E}^{[\downarrow]}} \varphi\big(f(x)\big)d\mu(x),$$

$$\frac{1}{\mu(E^{[\uparrow]})} \int\limits_{E^{[\uparrow]}} \varphi\big(f(x)\big)d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(\hat{E}^{[\uparrow]})} \int\limits_{\hat{E}^{[\uparrow]}} \varphi\big(f(x)\big)d\mu(x),$$

а эти два неравенства равносильны (25) и (26) соответственно.

Теорема доказана.

1. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
2. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta math. – 1973. – **130**. – P. 265 – 277.
3. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 207 – 226.
4. *Franciosi M., Moscariello G.* Higher integrability results // Manuscr. math. – 1985. – **52**, № 1-3. – P. 151 – 170.
5. *Wik I.* On Muckenhoupt classes of weight functions // Dep. Math. Univ. Umea [publ.]. – 1987. – № 3. – P. 1 – 13.
6. *Wik I.* On Muckenhoupt classes of weight functions // Stud. Math. – 1989. – **94**, № 3. – P. 245 – 255.

7. *Sbordone C.* Rearrangement of functions and reverse Jensen inequalities // Proc. Symp. Pure Math. – 1986. – **45**, № 2. – P. 325 – 329.
8. *Кореновский А. А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта // Мат. заметки. – 1992. – **52**, вып. 6. – С. 32 – 44.
9. *Кореновский А. А.* Обратное неравенство Гельдера, условие Макенхаупта и равноизмеримые перестановки функций // Докл. АН СССР. – 1992. – **323**, № 2. – С. 229 – 232.
10. *Малаксиано Н. А.* О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта // Мат. заметки. – 2001. – **70**, вып. 5. – С. 742 – 750.
11. *Malaksiano N. A.* The precise embeddings of the one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2002. – **68**. – P. 237 – 248.
12. *Sbordone C.* Rearrangement of functions and reverse Hölder inequalities // Res. Notes Math. – 1983. – **125**. – P. 139 – 148.
13. *D'Apuzzo L., Sbordone C.* Reverse Hölder inequalities. A sharp result // Rend. mat. – 1990. – **10**, Ser. VII. – P. 357 – 366.
14. *Kinnunen J.* Sharp result on reverse Hölder inequalities // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. Math. Diss. – 1994. – **95**. – P. 1 – 34.
15. *Calderón A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta math. – 1952. – **88**. – P. 85 – 139.
16. *Riesz F.* Sur un téorème de maximum de Mm Hardy et Littlewood // J. London Math. Soc. – 1932. – **7**. – P. 10 – 13.
17. *Klemes I.* A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – **93**, № 3. – P. 497 – 500.
18. *Кореновский А. А.* Лемма Рисса „о восходящем солнце” для многих переменных и неравенство Джона – Ниренберга // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 1. – С. 53 – 66.
19. *Popoli A.* Weighted reverse Holder inequalities // Rend. Accad. sci. fis. e mat. – 1995. – **62**. – P. 187 – 212.
20. *Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.* On multidimensional F. Reisz's "rising sun" lemma. – 2003. – 3 p. – (Preprint / arxiv: math. CA; № 0308211).
21. *Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.* On a multidimensional form of F. Reisz's "rising sun" lemma // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – **133**, № 5. – P. 1437 – 1440.

Получено 03.10.2003