УДК 519.21

І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ЕКСТРЕМУМУ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

We prove a theorem on the convergence of integral functionals of the extremum of independent stochastic processes to the degenerate law of distributions.

Доводиться теорема про збіжність до виродженого закону розподілів інтегральних функціоналів від екстремуму незалежних випадкових процесів.

Розглянемо випадкові процеси (в. п.) $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ та $Y_n = \{Y_n(t),\ t \in T\}$, $n \geq 1$, визначені на ймовірнісному просторі (Ω, A, P), T — вимірна множина дійсної прямої R.

Визначимо інтегральний функціонал від вимірної функції $x(t)$ формулою

$$f_h(x) = \int_T h(t, x(t))\mu(dt), \tag{1}$$

де $h(t, s)$ — неперервна функція на $T \times R$, μ — міра Лебега. Нехай $H(s)$ — деяка фіксована неперервна функція, $H(s) > 0$. Позначимо через $\mathfrak{F}_H$ клас інтегральних функціоналів вигляду (1), для яких

$$\sup_{t \in T} |h(t, s)| = O(H(s)) \quad \text{при} \quad |s| \to \infty.$$

Припустимо, що скінченновимірні розподіли в. п. $Y_n(t)$ збігаються до скінченновимірних розподілів в. п. $Y(t)$. Природно постає питання про умови збіжності розподілів випадкових величин (в. в.) $f_h(Y_n)$ до розподілу $f_h(Y)$ для функціоналів $f_h \in \mathfrak{F}_H$.

У такій загальній постановці задача про збіжність інтегральних функціоналів від випадкових процесів вивчалася досить докладно (див. [1 – 3]). Слід зазначити, що існують важливі приклади інтегральних функціоналів, які не охоплюються наведеною вище схемою. Такими є, наприклад, інтегральні функціонали від екстремуму незалежних випадкових функцій за умови (6). Специфіка даного випадку полягає в тому, що граничний процес має незалежні в кожній точці значення і не є вимірним у відповідному просторі. Ця обставина не дозволяє скористатися традиційним підходом — дослідженням умов слабкої збіжності мір у функціональних просторах [1].

Відомо, що теорія екстремальних значень в одновимірному випадку — це систематично розроблений розділ теорії ймовірностей (див., наприклад, [4 – 6]). Водночас число публікацій, пов'язаних з багатовимірними екстремумами, є незрівнянно меншим [5], а нескінченновимірний випадок систематично взагалі не розглядався.

Враховуючи важливість максимум-схеми, здається актуальним дослідження граничних теорем для екстремальних значень послідовності незалежних випадкових функцій.

Одна з перших небагатьох відомих авторові робіт, в яких розглядаються екстремуми в нескінченновимірному випадку, — це робота [7]. У цій роботі встановлено слабку збіжність у просторі $C_{[0,1]}$ максимуму спеціальним чином нормованих процесів броунівського руху до екстремального процесу.

Здається, вперше інтегральні функціонали від екстремуму незалежних випадкових функцій досліджувались у роботі [8]. При виконанні умови (6), яка забезпечує асимптотичну незалежність екстремальних значень компонент процесу, граничними тут виявилися вироджені закони. При цьому в [8] застосовувався метод моментів, який привів до необхідності існування усіх моментів у випадкових функцій.

У роботі автора [9] значно послаблюються моментні умови з роботи [8]. Окрім того, досліджується загальна задача про умови збіжності в. в. $f_h(Y_n)$ у випадку, коли скінченновимірні розподіли в. п. $Y_n(t)$ збігаються до скінченновимірних розподілів в. п. $Y(t)$, який має незалежні в кожній точці значення.

При доведенні основної теореми про інтегральні функціонали від екстремуму незалежних випадкових функцій в [9] серед інших використовувалась наступна умова на швидкість спадання функцій розподілу на від'ємній півосі:

існує $\delta > 0$ таке, що

$$F(s) = O\left(|s|^{-\delta}\right) \quad \text{при} \quad s \to -\infty. \tag{2}$$

На відміну від інших умов роботи [9] ця умова має технічний характер.

У даній статті буде показано, що умовою (2) можна знехтувати. Щоправда, при цьому ми отримаємо лише збіжність за ймовірністю, в той час як у [9] було встановлено збіжність у середньому степеня k.

Можна припустити, що умова асимптотичної незалежності екстремальних значень (6) у багатьох випадках виконується (для нормального розподілу вона записується у вигляді умови на кореляційну функцію, яка для всіх основних прикладів нормальних випадкових функцій є вірною, див. [8, 9]).

Введемо ряд необхідних позначень та умов. Розглянемо послідовність (ξ_i) незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.) з функцією розподілу $F(x) = \mathrm{P}(\xi_i < x)$, $z_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$. Припустимо, що для деяких числових послідовностей a_n, $b_n > 0$ при $n \to \infty$

$$b_n (z_n - a_n) \xrightarrow{D} \zeta, \tag{3}$$

і ζ має невироджену функцію розподілу $G(x) = \mathrm{P}(\zeta < x)$.

Тут і далі позначення $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$ означають відповідно збіжність за розподілом та збіжність за ймовірністю.

Якщо співвідношення (3) виконується, то будемо говорити, що функція розподілу F належить області притягання закону G, і писати $F \in D(G)$. Згідно з відомою теоремою про екстремальні типи [4 – 6] можна вважати, що F належить області притягання одного з наступних трьох типів розподілів:

$$\begin{aligned}
&\text{I:} \quad G_1(x) = \exp\left(-e^{-x}\right) \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty,\\
&\text{II:} \quad G_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right) & \text{при } \alpha > 0,\ x > 0, \end{cases}\\
&\text{III:} \quad G_3(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^{\alpha}\right) & \text{при } \alpha > 0,\ x \le 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}$$

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ — випадковий процес, який зображується у вигляді

$$X(t) = \sigma(t)\tilde{X}(t), \quad t \in T, \tag{5}$$
$$\forall\, t \in T \quad \mathrm{P}\left(\tilde{X}(t) < x\right) = F(x),$$

функції $X(t)$, $\tilde{X}(t)$ та $\sigma(t)$ вважаємо вимірними. Для послідовності $X_k = \{X_k(t),\ t \in T\}$, $k \ge 1$, незалежних копій X покладемо

$$Z_n = \left\{ Z_n(t) = \max_{1 \le k \le n} X_k(t),\ t \in T \right\},$$

$$U_n = \{U_n(t) = b_n(Z_n(t) - a_n\sigma(t)),\ t \in T\}.$$

Будемо припускати, що $F \in D(G)$, $G(x)$ задається рівністю (4), а послідовності (b_n) та (a_n) задовольняють співвідношення (3).

Нас цікавитимуть умови збіжності інтегральних функціоналів $f_h(U_n)$ у випадку асимптотичної незалежності компонент екстремальних випадкових функцій $U_n(t)$. Для цього на компоненти випадкового вектора $(X(t_i))_1^k$ буде накладатися умова

$$\lim_{t \in x(F_1),\, s \to x(F_2)} \frac{\mathrm{P}(\xi_1 > t,\ \xi_2 > s)}{\mathrm{P}(\xi_1 > t) + \mathrm{P}(\xi_2 > s)} = 0, \tag{6}$$

де $x(F) = \sup(s\colon\ F(s) < 1)$, $F_i(s)$ — функція розподілу випадкової величини ξ_i, $i = 1, 2$ (умова (6) є добре відомою, див. [9] та наведену в ній бібліографію).

Окрім того, для додатної скрізь скінченної функції $g(s)$, $s > 0$, введемо умову

$$\sup_{s>0} \frac{g(2s)}{g(s)} < \infty. \tag{7}$$

Умову (7) у теорії просторів Орліча називають Δ_2-умовою (у точці 0 і на ∞, див. [10, с. 120]).

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для вимірного випадкового процесу* $X = \{X(t),\ t \in T\}$, *який зображується у вигляді* (5), *виконуються умови:*

a) $F \in D(G_i)$, $i = 1, 3$;

b) *для майже всіх* $(t, s) \in T \times T$ *в. в.* $X(t)$, $X(s)$ *задовольняють рівність* (6);

c) $\int_T H(\sigma(t))\mu(dt) < \infty$;

d) $\int_T H(X(t))\mu(dt) < \infty$ *майже напевно.*

Якщо, крім того, парна неспадна при $t > 0$ *функція* $H(t)$ *задовольняє умову* (7), *то для кожного інтегрального функціонала* $f_h \in \mathfrak{F}_H$

$$f_h(U_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} \int_T \chi_h(t)\mu(dt) < \infty, \tag{8}$$

де $\chi_h(t) = \mathrm{E}h(t, \zeta\sigma(t))$, ζ *має функцію розподілу* $G_i(x)$.

***Зауваження* 1.** Типова функція, яка задовольняє умову (7), — це функція $H(s) = |s|^p$ для $0 < p < \infty$.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку наведемо два допоміжних результати.

Нехай $g(s)$, $s > 0$, — додатна скрізь скінченна функція. Введемо функцію

$$M_g(s) = \sup_{t>0} \frac{g(st)}{g(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

$M_g(s)$ називають функцією розтягу функції $g(s)$ [11]. Очевидно, що для будь-яких $t > 0$, $s > 0$

$$g(st) \le M_g(s)\, g(t). \tag{9}$$

Лема 1. *Якщо додатна неспадна функція* $g(s)$, $s > 0$, *задовольняє умову* (7), *то*

$$\beta = \inf_{t>1} \frac{\ln M_g(t)}{\ln(t)} < \infty, \tag{10}$$

при досить великих s

$$s^{\beta} \leq M_g(s) \leq s^{\beta+\varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Окрім того, для $x \geq 0,\ y \geq 0$

$$g(x+y) \leq M_g(2)\big(g(x)+g(y)\big). \tag{12}$$

Доведення. Оцінки (10), (11) наведено в [9, 11].

Нерівність (12) безпосередньо випливає з (7). Дійсно, при $0 \leq x \leq y$

$$g(x+y) \leq g(2y) \leq M_g(2)\,g(y) \leq M_g(2)\big(g(x)+g(y)\big).$$

Лема 2. *Нехай* (b_n) *— послідовність додатних чисел, яка задовольняє рівність* (3). *Тоді існують такі сталі* C *і* p, *що для* $n \geq 1$

$$b_n \leq Cn^p.$$

Лема 2 випливає з теореми 2.2.1 [5] та оцінок росту функцій, які правильно змінюються на нескінченності (див. [12]).

Теорему 1 ми виведемо із лем 1, 2 та наслідку 1 роботи [9]. При цьому обмежимося лише випадком, коли F належить області притягання розподілу екстремальних значень I типу, $F \in D(G_1)$. Випадок $F \in D(G_3)$ розглядається так само.

Нехай $\zeta(t)$ — в. п. з незалежними в кожній точці значеннями, для якого $\mathrm{P}(\zeta(t) < s) = G_1(s)$ при $t \in T$. Покладемо

$$Y(t) = \sigma(t)\zeta(t), \qquad Y_n(t) = U_n(t), \qquad m(t) = \mathrm{E}\,h(t, Y(t)) = \chi_h(t). \tag{13}$$

Згідно з наслідком 1 із [9] для доведення теореми 1 достатньо встановити, що для $Y(t)$, $Y_n(t)$, $m(t)$, заданих рівностями (13), виконуються умови:

i) існує вимірна й інтегровна на T функція $c(t) > 0$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathrm{P}\left(\int_T H(Y_n(t))\, I\big(H(Y_n(t)) > \lambda c(t)\big)\mu(dt) > \varepsilon \right) = 0; \tag{14}$$

ii) майже для всіх пар $(t, s) \in (T \times T)$ виконується умова:

$$\big(Y_n(t), Y_n(s)\big) \xrightarrow{D} \big(Y(t), Y(s)\big) \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

iii) для $\lambda > 0$ функції

$$m^{(\lambda)}(t) = \mathrm{E}\,h(t, Y(t))\, I\big(H(Y(t)) \leq \lambda c(t)\big),$$

$$m(t) = \mathrm{E}\,h(t, Y(t)), \qquad \tilde{m}(t) = \mathrm{E}\,|h(t, Y(t))|$$

вимірні та інтегровні на T.

Основна трудність тут пов'язана з умовою i), тобто з доведенням рівності (14). Перевірка умов ii), iii) фактично міститься в [9], і ми її тут не наводимо.

Покажемо, що існує вимірна й інтегровна на T функція $c(t) > 0$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathrm{P}\left(\int_T H(U_n(t))\, I\big(H(U_n(t)) > \lambda c(t)\big)\mu(dt) > \varepsilon \right) = 0. \tag{15}$$

Позначимо $\tilde{Z}_n(t) = \max\limits_{1\leq k\leq n} \tilde{X}_k(t)$. Тоді з (9) та леми 1 маємо

$$J(n, \lambda) = \int_T H(U_n(t))\, I\big(H(U_n(t)) > \lambda c(t)\big)\mu(dt) \leq$$

$$\leq \int_T H(U_n(t))\, I\Big(M_H\Big(b_n\big(\tilde{Z}_n(t) - a_n\big)\Big) H(\sigma(t)) > \lambda c(t)\Big)\mu(dt) \leq$$

$$\leq \int_T H(U_n(t))\, I\Big(C\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big|^{\beta+\varepsilon} H(\sigma(t)) > \lambda\, c(t)\Big)\mu(dt), \tag{16}$$

де $\varepsilon > 0$, $C = C(\beta, \varepsilon)$, β визначається рівністю (10). Покладемо

$$J_1(n,\lambda) = \int_T H\Big(b_n\Big(\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_+ - a_n\Big)\sigma(t)\Big) I\Big(\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt),$$

$$J_2(n,\lambda) = \int_T H\Big(b_n\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_- \times \sigma(t)\Big) I\Big(\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt).$$

Підставляючи в (16) $c(t) = H(\sigma(t))$ і враховуючи нерівність

$$\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big| \leq \Big|b_n\Big(\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_+ - a_n\Big)\Big| + \Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_-\Big|$$

та останню нерівність леми 1, одержуємо

$$J(n,\lambda) \leq C_1(J_1(n,\lambda) + J_2(n,\lambda)).$$

Таким чином, достатньо показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathrm{P}(J_1(n,\lambda) > \varepsilon) = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathrm{P}(J_2(n,\lambda) > \varepsilon) = 0. \tag{18}$$

Почнемо з рівності (17). Застосовуючи лему 1 та (9), маємо

$$J_1(n,\lambda) \leq$$

$$\leq \int_T M_H\Big(b_n\Big(\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_+ - a_n\Big)\Big) H(\sigma(t))\, I\Big(\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt) \leq$$

$$\leq C\int_T \Big|b_n\Big(\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_+ - a_n\Big)\Big|^{\beta+\varepsilon} H(\sigma(t))\, I\Big(\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt).$$

Звідси

$$\mathrm{E}\, J_1(n,\lambda) \leq C\Big(\mathrm{E}\Big|b_n\Big(\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_+ - a_n\Big)\Big|^{2(\beta+\varepsilon)}\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\mathrm{P}\Big(\Big|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\Big|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\Big)^{1/2} \int_T H(\sigma(t))\mu(dt). \tag{19}$$

Не обмежуючи загальності можна вважати, що

$$x(F) > 0, \qquad F_+ \in D(G_1), \quad \text{де} \quad F_+(s) = \mathrm{P}\Big(\big(\tilde{X}(t)\big)_+ < s\Big)$$

(у противному разі слід перейти до в. п. вигляду $X(t) = \sigma(t)\,(\tilde{X}(t) + C)$). Відомо, що в рівності (3) при $F \in D(G_1)$, $x(F) > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}|b_n((z_n)_+ - a_n)|^m = \mathrm{E}|\zeta|^m < \infty \quad \forall\, m > 0$$

(див. [9]). Звідси маємо

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\Big|b_n\Big(\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_+ - a_n\Big)\Big|^{2(\beta+\varepsilon)} < \infty. \tag{20}$$

Зазначимо, що за цих умов

$$\mathrm{P}\Big(b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big) < x\Big) \to G_1(x), \quad n\to\infty,$$

причому збіжність є рівномірною по x ($G_k(x)$ — неперервна функція розподілу, див. [5, с. 101]). Тому для будь-якого $t \in T$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathrm{P}\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big) = 0. \tag{21}$$

З нерівностей (19), (20) та рівності (21) маємо

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathrm{E}\,J_1(n,\lambda) = 0,$$

звідки і випливає (17).

Залишилося перевірити рівність (18). Покладемо

$$I_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \min\limits_{2\leq k\leq n}\big(\tilde{\mathrm{X}}_k(t)\big)_- > 0, \\ 0 & \text{— у противному разі.} \end{cases}$$

Беручи до уваги рівність

$$-\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_- = \max_{1\leq k\leq n}\Big(-\big(\tilde{\mathrm{X}}_k(t)\big)_-\Big),$$

можна записати

$$\big(\tilde{Z}_n(t)\big)_- \leq I_n(t)\left|\big(\tilde{\mathrm{X}}_1(t)\big)\right| \quad \text{м. н.} \tag{22}$$

При цьому для $r > 0$

$$\mathrm{E}|I_n(t)|^r = p^{n-1}, \tag{23}$$

де $p = F(0)$ (оскільки вважаємо, що $x(F) > 0$, то $0 \leq p < 1$).

За допомогою нерівностей (9), (22) (а також леми 1) оцінимо зверху інтеграл $J_2(n,\lambda)$:

$$J_2(n,\lambda) \leq \int_T H\big(b_n I_n(t)\tilde{\mathrm{X}}_1(t)\sigma(t)\big) I\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt) \leq$$

$$\leq \int_T M_H(b_n I_n(t)) H\big(\tilde{\mathrm{X}}_1(t)\sigma(t)\big) I\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt) \leq$$

$$\leq C\int_T |b_n I_n(t)|^{\beta+\varepsilon} H(X_1(t)) I\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt). \tag{24}$$

Оскільки для будь-якого фіксованого n, $t \in T$ при $\lambda \to \infty$

$$I\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big) \to 0 \quad \text{м. н.},$$

а $\int_T H(X_1(t))\mu(dt) < \infty$, то за теоремою Лебега м. н. при $\lambda \to \infty$

$$\int_T H(X_1(t)) I\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt) \to 0.$$

Тому для $1 < n_0 < \infty$ із (24) отримуємо

$$\sup_{1\leq n\leq n_0} J_2(n,\lambda) \leq$$

$$\leq C_2 \sup_{1\leq n\leq n_0}\left(|b_n|^{\beta+\varepsilon}\int_T H(X_1(t)) I\Big(\left|b_n\big(\tilde{Z}_n(t)-a_n\big)\right|^{\beta+\varepsilon} > C^{-1}\lambda\Big)\mu(dt)\right) \to 0, \tag{25}$$

$$\lambda \to \infty, \quad \text{м. н.}$$

Розглянемо випадок великих n у (18). Нехай $\delta > 0$ — довільне мале число. Тоді, враховуючи співвідношення (23), (24) і незалежність процесів $I_n(t)$ та $X_1(t)$, маємо

$$\mathrm{P}\big(J_2(n,\lambda)>\varepsilon\big) \le \mathrm{P}\left(\int_T |b_n I_n(t)|^{\beta+\varepsilon} H(X_1(t))\mu(dt) > C^{-1}\varepsilon\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\int_T |b_n I_n(t)|^{\beta+\varepsilon} H(X_1(t))\mu(dt) > \delta^{-1} b_n^{\beta+\varepsilon} p^{n-1} \int_T H(X_1(t))\mu(dt)\right) +$$

$$+ \mathrm{P}\left(\delta^{-1} b_n^{\beta+\varepsilon} p^{n-1} \int_T H(X_1(t))\mu(dt) > C^{-1}\varepsilon\right) \le$$

$$\le \delta + \mathrm{P}\left(\int_T H(X_1(t))\mu(dt) > \frac{\varepsilon\delta}{C b_n^{\beta+\varepsilon} p^{n-1}}\right). \tag{26}$$

За лемою 2 $b_n^{\beta+\varepsilon} p^{n-1} \to 0$ при $n\to\infty$. Тому існує число $n_0 = n_0(\delta,\varepsilon)$ таке, що при $n > n_0$

$$\mathrm{P}\left(\int_T H(X_1(t))\mu(dt) > \frac{\varepsilon\delta}{C b_n^{\beta+\varepsilon} p^{n-1}}\right) \le \delta.$$

Звідси та з (26) одержуємо

$$\sup_{n\ge n_0} \mathrm{P}\big(J_2(n,\lambda)>\varepsilon\big) \le 2\delta.$$

Оскільки $\delta > 0$ — довільне число, то з урахуванням (25) маємо рівність (18). Таким чином, рівність (15), а разом з нею і (14), встановлено.

У наступному твердженні розглядається випадок, коли функція розподілу F належить області притягання розподілу екстремальних значень II типу.

Твердження 1. *Нехай виконуються умови теореми* 1, *але умову* а) *замінено на*

ã) $F\in D(G_2)$.

Якщо $M_H(s)$ — *функція розтягу функції* $H(s)$, β *обчислюється за формулою* (10) *і* $\beta<\alpha$, *то для кожного інтегрального функціонала* $f_h\in\mathfrak{F}_H$ *виконується співвідношення* (8) *із випадковою величиною* ζ, *яка має розподіл* $G_2(s)$.

Доведення твердження 1 в основному повторює доведення теореми 1.

Може виникнути запитання: чи існує випадковий процес, який задовольняє умови теореми 1 і не задовольняє умову (2)?

Позитивну відповідь на це питання дає наступний приклад.

Приклад. Нехай γ_1, γ_2 — незалежні стандартні нормально розподілені в. в. Розглянемо на відрізку $T=[0,1]$ випадковий процес

$$\xi(t) = \gamma_1\cos t + \gamma_2 \sin t.$$

Процес $\xi(t)$ є неперервним, нормально розподіленим і може бути записаний у так званій косинус-формі: $\xi(t) = A\cos(t-\varphi)$, A, φ — випадкові величини [6, с. 190]. Безпосередньо обчислюється його коваріаційна функція $r(t) = \cos t$. Звідси зрозуміло, що при $t, s\in[0,1]$, $t\ne s$, виконується умова

$$|r(\xi(t),\ \xi(s))| < 1,$$

де r — коефіцієнт кореляції Пірсона.

Відомо (див. [9] та наведену в ній бібліографію), що з останньої нерівності випливає (6).

Нехай $\Phi(x)$ — стандартна функція нормального розподілу. Покладемо

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x > -e, \\ \dfrac{\Phi(-e)}{\ln|x|} & \text{при } x \le -e. \end{cases}$$

Тоді $F(x)$ — неперервна строго монотонна функція розподілу. Введемо випадковий процес $X(t) = F^{-1}(\Phi(\xi(t)))$, який у кожній точці $t \in [0, 1]$ має функцію розподілу $F(x)$.

Перевіримо, що процес $X(t)$ задовольняє умови теореми 1 при $T = [0, 1]$, $\sigma(t) \equiv 1$, $H(x) = |x|$. Дійсно, оскільки при $x > -e$ $F(x) = \Phi(x)$, то $F \in D(G_1)$.

Умова c) теореми 1 так само, як і (7), виконується очевидно.

За побудовою

$$|X(t)| \le F^{-1}(\Phi(|A|)) \quad \text{м. н.}$$

і, таким чином, умова d) теореми 1 також виконується.

Із означення процесу $X(t)$ при $s_1 \to \infty$, $s_2 \to \infty$ маємо

$$\frac{\mathrm{P}\big(X(t_1) > s_1,\ X(t_2) > s_2\big)}{\mathrm{P}\big(X(t_1) > s_1\big) + \mathrm{P}\big(X(t_2) > s_2\big)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\Big(\xi(t_1) > \Phi^{-1}\big(F(s_1)\big),\ \xi(t_2) > \Phi^{-1}\big(F(s_2)\big)\Big)}{\mathrm{P}\Big(\xi(t_1) > \Phi^{-1}\big(F(s_1)\big)\Big) + \mathrm{P}\Big(\xi(t_2) > \Phi^{-1}\big(F(s_2)\big)\Big)} \to 0$$

(це так, тому що, як було зазначено вище, процес $\xi(t)$ задовольняє умову (6)). Таким чином, для процесу $X(t)$ умова (6) також виконується, а отже, він задовольняє усі умови теореми 1.

Очевидно, що умова (2) для $X(t)$ не виконується.

Зауваження **2.** Автор навів цей приклад у зв'язку з зауваженнями рецензента. Звичайно, наведений приклад має штучний характер, але цікаві приклади такого типу, мабуть, і не існують.

1. *Боровков А. А., Печерский Е. А.* Сходимость распределений интегральных функционалов // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 5. – С. 899 – 915.
2. *Иванов А. В.* О сходимости распределений функционалов от измеримых случайных полей // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 27 – 34.
3. *Grinblat L. S.* A limit theorem for measurable random processes and its applications // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **61**, № 2. – P. 371 – 376.
4. *Gnedenko B. V.* Sur la distribution limit de terme maximum d'une serie aleatoire // Ann. Math. – 1943. – **44**. – P. 423 – 453.
5. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 303 с.
6. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 391 с.
7. *Brown M. M., Resnick S. I.* Extreme values of independent stochastic processes // J. Appl. Probab. – 1977. – **14**. – P. 732 – 739.
8. *Мацак І. К.* Збіжність розподілів інтегральних функціоналів від екстремальних випадкових функцій // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 9. – С. 1201 – 1209.
9. *Мацак І. К.* Про інтегральні функціонали від екстремальних випадкових функцій // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2001. – Вип. 65. – С. 110 – 120.
10. *Lindenstraus J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces: In 2 vol. – Berlin: Springer, 19 79. – Vol. 2. – 243 p.
11. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
12. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Одержано 18.09.2002,
після доопрацювання — 20.10.2004