УДК 517.5

В. И. Рукасов, Е. С. Силин (Славян. пед. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

For $\sigma \to \infty$, we study the asymptotic behavior of upper bounds of deviations of functions blonding to the classes $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ and $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ from the so-called Vallée Poussin operators. We find asymptotic equalities that, in some important cases, guarantee the solution of the Kolmogorov – Nikol's'kyi problem for the Vallée Poussin operators on the classes $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ and $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$.

Вивчається асимптотична поведінка при $\sigma \to \infty$ верхніх меж відхилень функцій класів $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ і $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ від так званих операторів Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні рівності, які в деяких важливих випадках забезпечують розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для операторів Валле Пуссена на класах $\hat{C}_{\infty}^{\overline{\psi}}$ та $\hat{C}^{\overline{\psi}}H_{\omega}$.

В настоящей статье изучаются вопросы, связанные с приближением непрерывных функций целыми функциями экспоненциального типа. А. И. Степанец [1] ввел классы $\hat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ следующим образом. Обозначим через $\hat{L}$ множество функций f, заданных на действительной оси R и имеющих конечную норму

$$\|f\| = \sup_{a \in R} \int_a^{a+2\pi} |f(t)|\,dt,$$

а через $\mathfrak{M}$ множество функций $\psi(t)$, выпуклых вниз при всех $t \geq 1$ и исчезающих на бесконечности. Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ продолжим на промежуток $[0, 1)$ таким образом, чтобы полученная функция (которую, по-прежнему, будем обозначать через $\psi(\cdot)$) была непрерывна при всех $t \geq 0$, $\psi(0) = 0$ и ее производная $\psi'(t) = \psi'(t+0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0, \infty)$. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{A}$. Подмножество функций ψ, для которых

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty,$$

обозначим через $\mathfrak{A}'$.

Пусть, далее, $\psi_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2$, и под ψ_{k+} и ψ_{k-} будем понимать четное и нечетное продолжение функции ψ_k, $k = 1, 2$. Для пары (ψ_1, ψ_2) определим функцию $\overline{\psi}$:

$$\overline{\psi} \overset{\text{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}. \tag{1}$$

При этом соответствующее преобразование Фурье функции $\overline{\psi}$ имеет вид

$$\hat{\overline{\psi}} = \hat{\psi}_{1+} + i\hat{\psi}_{2-}, \tag{2}$$

где преобразование Фурье понимается в обычном смысле:

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_R h(x)e^{-ixt}\,dx.$$

Тогда через $\hat{L}^{\overline{\psi}}$ обозначим множество функций $f \in \hat{L}$, представимых равенством

$$f(x) = A_0 + \int_R \varphi(x+t)\hat{\overline{\psi}}(t)\,dt \overset{\text{df}}{=} A_0 + \varphi * \hat{\overline{\psi}}, \tag{3}$$

© В. И. РУКАСОВ, Е. С. СИЛИН, 2005

в котором A_0 — некоторая постоянная; интеграл понимается как предел по расширяющимся симметричным промежуткам; $\varphi \in \hat{L}$.

Следуя А. И. Степанцу [2], функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (3) называют $\overline{\psi}$-производной функции $f(\cdot)$ и полагают $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Если $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}$ и при этом $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\hat{L}$, то полагают $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Подмножество непрерывных функций из $\hat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ обозначается через $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

В качестве множества $\mathfrak{N}$ будем рассматривать единичный шар S_∞ пространства существенно ограниченных функций M:

$$S_\infty = \{\varphi\colon \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \le 1\}$$

и классы H_ω:

$$H_\omega = \{\varphi \in C\colon |\varphi(t) - \varphi(t')| \le \omega(|t - t'|) \ \forall\, t, t' \in R\},$$

где C — подмножество непрерывных функций из $\hat{L}$, $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности. При этом $\hat{C}^{\overline{\psi}} S_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$.

Из предложения 10 (см. [3]) видим, что $\hat{\psi}_{1+}$ и $\hat{\psi}_{2-}$ суммируемы на R, причем

$$\hat{\psi}_{1+}(t) = O(t^{-2}) \quad \text{и} \quad \hat{\psi}_{2-}(t) = O(t^{-2}) \quad \text{при} \quad |t| \to \infty,$$

откуда на основании (2)

$$\int_R \left|\hat{\overline{\psi}}(t)\right| dt < \infty$$

и, следовательно, классы $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ состоят из функций $f(x)$, непрерывных для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Следуя [2], для всех $0 \le c \le \sigma$ определим семейство функций $\Lambda_{\sigma,c} = \{\lambda_{\sigma,c}(t)\}$, где

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le c, \\ \dfrac{\sigma - |t|}{\sigma - c}, & c \le |t| \le \sigma, \\ 0, & \sigma \le |t|, \end{cases} \tag{4}$$

и для функций $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}$ определим семейство функций $\Lambda^*_{\sigma,c} = \{\lambda^*_{\sigma,c}(t)\}$, где

$$\lambda^*_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}, & |t| \in [0,c] \cup [\sigma,\infty], \\ 1 - \dfrac{|t| - c}{\sigma - c}\dfrac{\psi(\sigma \operatorname{sign}(t))}{\psi(t)}, & c \le |t| \le \sigma. \end{cases} \tag{5}$$

Каждой функции $f \in \hat{L}^{\overline{\psi}}$ сопоставим операторы

$$V_{\sigma,c}(f) = V_{\sigma,c}(f, x, \Lambda_{\sigma,c}) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}, \tag{6}$$

$$V^*_{\sigma,c}(f) = V^*_{\sigma,c}(f, x, \Lambda^*_{\sigma,c}) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda^*_{\sigma,c}\overline{\psi}}. \tag{7}$$

В работе [5] показано, что при достаточно общих предположениях операторы $V_{\sigma,c}(f)$ и $V^*_{\sigma,c}(f)$ принадлежат множеству ε_σ, где под ε_σ понимается множество целых функций экспоненциального типа σ, $\sigma \ge 0$. В периодическом случае, при $\sigma = n \in N$ и $c = n-p$, $p \in N$, $p < n$, операторы $V_{\sigma,c}$ совпадают с известными суммами Валле Пуссена:

$$V_{n,p}(f,x) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x),$$

где $S_k(f,x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. Поэтому в дальнейшем будем называть $V_{\sigma,c}$ операторами Валле Пуссена.

В настоящей статье изучается асимптотическое поведение при $\sigma \to \infty$ верхних граней

$$\mathscr{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}, V_{\sigma,c}) = \sup_{f\in\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \left\| f(x) - V_{\sigma,c}(x)\right\|_C,$$

где под $\mathfrak{N}$ понимается множество S_∞ либо H_ω.

Исследуем интегральные представления уклонений

$$\rho_{\sigma,c}(f,x) \overset{\text{df}}{=} f(x) - V_{\sigma,c}(x).$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\psi_i \in \mathfrak{A}'$, $i = 1, 2$, $\overline{\psi} = \psi_{1+} + i\psi_{2-}$ *и* $a_i = a_i(\sigma)$, $i = 1, 2$, — *две произвольные непрерывные при всех* $\sigma \geq 1$ *функции, для которых* $\sigma a_i(\sigma) \geq a_i(0) > 0$. *Тогда если* $f \in \hat{C}_\infty^{\overline{\psi}}$, *то для любых* σ *и* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \geq 1$, *в каждой точке* $x \in R$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = -\nu_1\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{a_1}\leq|t|\leq M_{a_1}} \delta(x;t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt +$$

$$+\nu_2\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{a_2}\leq|t|\leq M_{a_2}} \delta(x;t)\frac{\cos\sigma t}{t}dt + b_{\sigma,h}^{\psi_1}(a_1;f;x) + b_{\sigma,h}^{\psi_2}(a_2;f;x), \tag{8}$$

где

$$\left|b_{\sigma,h}^{\psi_i}(a_i;f;x)\right| = O(1)\left(\psi_i(\sigma-h) + \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi_i(t+\sigma)}{t}dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a_i(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi_i(\sigma)-\psi_i(\sigma-1/t)}{t}dt\right), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Если же $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}H\omega$, *то для любых* σ *и* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \geq 1$, *в каждой точке* $x \in R$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = -\nu_1\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{a_1}\leq|t|\leq M_{a_1}} \delta(x;t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt +$$

$$+\nu_2\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{a_2}\leq|t|\leq M_{a_2}} \delta(x;t)\frac{\cos\sigma t}{t}dt + d_{\sigma,h}^{\psi_1}(a_1;f;x) + d_{\sigma,h}^{\psi_2}(a_2;f;x), \tag{10}$$

где

$$\left|d_{\sigma,h}^{\psi_i}(a_i;f;x)\right| = O(1)\left(\psi_i(\sigma-h) + \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi_i(t+\sigma)}{t}dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a_i(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi_i(\sigma)-\psi_i(\sigma-1/t)}{t}dt\right)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

$$\delta(x;t) = \begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x+t), & \textit{если} \quad f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}, \\ f^{\overline{\psi}}(x) - f^{\overline{\psi}}(x+t), & \textit{если} \quad f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_{\omega}, \end{cases}$$

$$m_{a_i} = \min\left\{a_i(\sigma);\ \frac{\pi}{h}\right\}, \qquad M_{a_i} = \max\left\{a_i(\sigma);\ \frac{\pi}{h}\right\},$$

$$\nu_i = \operatorname{sign}\left\{a_i(\sigma) - \frac{\pi}{h}\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$\rho^*_{\sigma,c}(f,x) \overset{\text{df}}{=} f(x) - V^*_{\sigma,c}(f,x), \tag{12}$$

$$\tau_{\sigma,c}(t) = (1 - \lambda_{\sigma,c}(t))\overline{\psi}(t), \qquad \tau^*_{\sigma,c}(t) = (1 - \lambda^*_{\sigma,c}(t))\overline{\psi}(t). \tag{13}$$

Из определения $\overline{\psi}$-производной и операторов $V_{\sigma,c}(f,x)$, $V^*_{\sigma,c}(f,x)$ следует

$$\rho_{\sigma,c}(f,x) = f^{\overline{\psi}} * \hat{\tau}_{\sigma,c}(f,x), \qquad \rho^*_{\sigma,c}(f,x) = f^{\overline{\psi}} * \hat{\tau}^*_{\sigma,c}(f,x).$$

С другой стороны,

$$\rho_{\sigma,c}(f,x) = \rho^*_{\sigma,c}(f,x) + \Delta_{\sigma,c}(f,x), \tag{14}$$

где

$$\Delta_{\sigma,c}(f,x) = V_{\sigma,c}(f,x) - V^*_{\sigma,c}(f,x). \tag{15}$$

Исследуем вначале величину $\rho^*_{\sigma,c}(f,x)$. Согласно теореме 1 из работы [2], для любого $u \in W^2_p$ и $0 \le p \le c < \sigma$, где

$$W^2_\sigma \overset{\text{df}}{=} \left\{\varphi \in \varepsilon_\sigma :\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi^2(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty\right\},$$

имеем $u * \hat{\tau}_{\sigma,c} = 0$, поэтому

$$\rho^*_{\sigma,c}(f,x) = (f^{\overline{\psi}} - u) * \hat{\tau}^*_{\sigma,c}. \tag{16}$$

Из определения преобразования Фурье и (5) следует

$$\hat{\tau}^*_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \tau^*_{\sigma,c}(s)e^{-ist}ds = \frac{1}{2\pi}\int_c^\sigma \frac{s-c}{\sigma-c}(\overline{\psi}(\sigma)e^{-ist} + \overline{\psi}(-\sigma)e^{ist})ds \ +$$

$$+ \ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^\infty (\overline{\psi}(s)e^{-ist} + \overline{\psi}(-s)e^{ist})ds.$$

Из соотношения (1) имеем

$$\overline{\psi}(s)e^{-ist} + \overline{\psi}(-s)e^{ist} = 2(\psi_1(s)\cos st + \psi_2(s)\sin st), \tag{17}$$

и поэтому далее находим

$$\hat{\tau}^*_{\sigma,c}(t) = \left[\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int_c^\sigma \frac{s-c}{\sigma-c}\cos st\,ds + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \psi_1(s)\cos st\,ds\right] +$$

$$+ \left[\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int_c^\sigma \frac{s-c}{\sigma-c}\sin st\,ds + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\,ds\right] \overset{\text{df}}{=} R_1(t) + R_2(t). \tag{18}$$

Полагая $c = \sigma - h$ и интегрируя по частям, получаем

$$R_1(t) = \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\left(\frac{\sin\sigma t}{t} + \frac{2\sin(2\sigma t - ht)/2\,\sin ht/2}{ht^2}\right) -$$

$$- \frac{\psi_1(\sigma)\sin\sigma t}{\pi t} - \frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi_1(s)\sin st\,ds, \tag{19}$$

$$R_2(t) = \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\left(\frac{-\cos\sigma t}{t} + \frac{2\cos(2\sigma t - ht)/2\,\sin ht/2}{ht^2}\right) +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)\cos\sigma t}{\pi t} + \frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi_2(s)\cos st\,ds. \tag{20}$$

Выполняя преобразования, имеем

$$R_1(t) = \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\left(\frac{ht - \sin ht}{ht^2}\sin\sigma t + \frac{1-\cos ht}{ht^2}\cos\sigma t\right) -$$

$$- \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi t}\sin\sigma t - \frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi_1'(s)\sin st\,ds, \tag{21}$$

$$R_2(t) = \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\left(-\frac{ht - \sin ht}{ht^2}\cos\sigma t + \frac{1-\cos ht}{ht^2}\sin\sigma t\right) +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi t}\cos\sigma t - \frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi_2'(s)\cos st\,ds. \tag{22}$$

Пусть, далее, $a_i = a_i(\sigma)$ — произвольные функции, непрерывные при всех $\sigma > 0$ и такие, что $\sigma a_i(\sigma) > a_i(0) > 0$, $i = 1, 2$. Пусть $m_{a_i} = \min\{a_i(\sigma); \pi/h\}$, $M_{a_i} = \max\{a_i(\sigma); \pi/h\}$. Тогда, исходя из соотношений (16) – (22), записываем

$$\rho^*_{\sigma,c}(f, x) = -\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{a_1}\le|t|\le M_{a_1}} \delta(x;t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a_1(\sigma)} \delta(x;t)\int_\sigma^\infty \psi_1(s)\cos st\,ds\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a_1(\sigma)} \delta(x;t)\int_\sigma^\infty \psi_1'(s)\frac{\sin st}{t}ds\,dt +$$

$$+ \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \delta(x;t)\left(\frac{ht-\sin ht}{ht^2}\sin\sigma t + \frac{1-\cos ht}{ht^2}\cos\sigma t\right)dt -$$

$$- \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\pi/h} \delta(x;t)\frac{2\sin(2\sigma t - ht)/2\,\sin ht/2}{ht^2}dt + \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{a_2}\le|t|\le M_{a_2}} \delta(x;t)\frac{\cos\sigma t}{t}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a_2(\sigma)} \delta(x;t)\int_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\,ds\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a_2(\sigma)} \delta(x;t)\int_\sigma^\infty \psi_2'(s)\frac{\cos st}{t}ds\,dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \delta(x;t)\left(-\frac{ht-\sin ht}{ht^2}\cos\sigma t + \frac{1-\cos ht}{ht^2}\sin\sigma t\right)dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\pi/h} \delta(x;t)\frac{2\cos(2\sigma t - ht)/2\,\sin ht/2}{ht^2}dt \overset{\mathrm{df}}{=} B^{\psi_1}_{\sigma,h}(a_1;f;x) + P^{\psi_1}_\sigma(a_1;f;x) -$$

$$- R^{\psi_1}_\sigma(a_1;f;x) + \gamma^{\psi_1}_{\sigma,h}(a_1;f;x) - \mu^{\psi_1}_{\sigma,h}(a_1;f;x) + B^{\psi_2}_{\sigma,h}(a_2;f;x) + P^{\psi_2}_\sigma(a_2;f;x) +$$

$$+ R^{\psi_2}_\sigma(a_2;f;x) + \gamma^{\psi_2}_{\sigma,h}(a_2;f;x) + \mu^{\psi_2}_{\sigma,h}(a_2;f;x). \tag{23}$$

В работе [6] для любой функции $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$ получены оценки

$$\left|P^{\psi_i}_{\sigma}(a_i; f; x)\right| \leq K\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(t+\sigma)}{t} dt\right), \tag{24}$$

$$\left|R^{\psi_i}_{\sigma}(a_i; f; x)\right| \leq K\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{a_i(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(\sigma) - \psi_i(\sigma - 1/t)}{t} dt\right), \tag{25}$$

$$i = 1, 2,$$

если же $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_{\omega}$, то

$$\left|P^{\psi_i}_{\sigma}(a_i; f; x)\right| \leq K\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{1/a_i(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(t+\sigma)}{t} dt\right) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{26}$$

$$\left|R^{\psi_i}_{\sigma}(a_i; f; x)\right| \leq K\left(\psi_i(\sigma) + \int\limits_{a_i(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(\sigma) - \psi_i(\sigma - 1/t)}{t} dt\right) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{27}$$

$$i = 1, 2.$$

Оценки оставшихся интегралов найдены в работе [7]. Так, для любой функции $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$

$$\left|\gamma^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i; f; x)\right| \leq K \psi_i(\sigma), \tag{28}$$

$$\left|\mu^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i; f; x)\right| \leq K \psi_i(\sigma), \tag{29}$$

$$i = 1, 2,$$

а для $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_{\omega}$

$$\left|\gamma^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i; f; x)\right| \leq K \psi_i(\sigma)\, \omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right), \tag{30}$$

$$\left|\mu^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i; f; x)\right| \leq K \psi_i(\sigma)\, \omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right), \tag{31}$$

$$i = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь величину $\Delta_{\sigma,c}(f; x)$, определенную соотношением (15) при $c = \sigma - h$. В периодическом случае при $\sigma = n \in N$ и $h = p \in N$ для величины $\Delta_{n,p}(f; x)$ в работе [8] получена оценка (26). Анализируя ее доказательство, видим, что если функция $f(\cdot)$ задана на всей действительной оси, будет иметь место аналогичное соотношение

$$\left\|\Delta_{\sigma,h}(f; x)\right\|_C \leq \omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right) \sum_{i=1}^{2} (\psi_i(\sigma - h) - \psi_i(\sigma)) \quad \forall f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_{\omega}. \tag{32}$$

Если $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$, то справедлива оценка

$$\left\|\Delta_{\sigma,h}(f; x)\right\|_C \leq \sum_{i=1}^{2} (\psi_i(\sigma - h) - \psi_i(\sigma)). \tag{33}$$

Объединяя соотношения (14), (23) – (33), приходим к утверждению леммы.

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{A}$, следуя А. И. Степанцу [9], поставим в соответствие две функции:

$$\eta(t) = \eta(\psi, t) \overset{\text{df}}{=} \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right) \quad \text{и} \quad \mu(t) = \mu(\psi, t) \overset{\text{df}}{=} \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1,$$

с помощью которых из $\mathfrak{A}$ выделим подмножество

$$\overline{F} \stackrel{\text{df}}{=} \{\psi \in \mathfrak{A}: \ \eta'(t) \le K\}, \quad t \ge 1, \quad \eta'(t) = \eta'(t+0),$$

где K — постоянная (возможно, зависящая от функции ψ).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1, 2$, $\overline{\psi} = \psi_{1+} + i\psi_{2-}$ *и существуют константы* K *и* K' *такие, что*

$$0 < K \le \frac{\eta(\psi_1;\sigma)-\sigma}{\eta(\psi_2;\sigma)-\sigma} \le K' < \infty. \tag{34}$$

Тогда для любых чисел σ *и* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \ge 1$, *при* $\sigma \to \infty$ *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{4|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right| + O(1)|\overline{\psi}(\sigma-h)|, \tag{35}$$

$$\mathscr{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{2\theta_\omega|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right| \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt + $$

$$+ O(1)|\overline{\psi}(\sigma-h)|\,\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), \tag{36}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* σ *и* h, $\eta(\sigma)$ *есть либо* $\eta(\psi_1;\sigma)$, *либо* $\eta(\psi_2;\sigma)$, $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности.*

Доказательство. Выберем в качестве $a_i(\sigma)$ величину

$$a_i^*(\sigma) = \frac{1}{\eta(\psi_i;\sigma)-\sigma}, \quad i = 1, 2,$$

для которой на основании условия (34) выполняется соотношение

$$\left|\int\limits_{a_1(\sigma)}^{a_2(\sigma)} \frac{dt}{t}\right| = \left|\ln\frac{a_2(\sigma)}{a_1(\sigma)}\right| = O(1),$$

которое позволяет заменить интегралы в равенствах (8) и (10) интегралами, которые берутся по одинаковым промежуткам $m_{a_1} \le |t| \le M_{a_1}$ или $m_{a_2} \le |t| \le M_{a_2}$. Погрешности при таких заменах не превысят величин остаточных членов. Используя формулу

$$a\sin\alpha - b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha-\gamma),$$

где $\gamma = \operatorname{arctg} b/a$, из леммы 1 получаем

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = \nu_a\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}\delta(x;t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}dt + $$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{2} b^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i;f;x)\right) \quad \forall f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty, \tag{37}$$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = \nu_a\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}\delta(x;t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}dt + $$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{2} d^{\psi_i}_{\sigma,h}(a_i;f;x)\right) \quad \forall f \in \hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega. \tag{38}$$

Здесь величины $b_{\sigma,h}^{\psi_i}(a_i; f; x)$ и $d_{\sigma,h}^{\psi_i}(a_i; f; x)$ определены равенствами (9) и (11) соответственно, $\gamma_\sigma = \operatorname{arctg}\dfrac{\psi_2}{\psi_1}$, а в качестве функции $a(\sigma)$ может быть любая из функций $a_i^*(\sigma)$, $i = 1, 2$, $\nu_a = \operatorname{sign}\{a(\sigma) - \pi/h\}$.

Классы $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ есть S_∞ или H_ω, инвариантны относительно сдвига по аргументу, следовательно,

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}, V_{\sigma,c}) = \sup_{f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \left|\rho_{\sigma,c}(f; 0)\right|.$$

Если $f \in \hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, то $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$. С другой стороны, для любого $\varphi \in \mathfrak{N}$ в классе $\hat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ существует функция $f(\cdot)$ такая, что почти везде $f^{\overline{\psi}}(\cdot) = \varphi(\cdot)$. Поэтому из равенств (37) и (38) получаем

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; V_{\sigma,\sigma-h}) = \sup_{\varphi \in S_\infty} \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \varphi(t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt \right| + $$
$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{2} b_{\sigma,h}^{\psi_i}(a_i; f; x) \right), \tag{39}$$

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega; V_{\sigma,\sigma-h}) = \sup_{\varphi \in H_\omega} \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt \right| + $$
$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{2} d_{\sigma,h}^{\psi_i}(a_i; f; x) \right). \tag{40}$$

В работе [7] получены равенства

$$\sup_{\varphi \in S_\infty} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \varphi(t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt \right| = \frac{4}{\pi} \left| \ln \frac{\pi}{a(\sigma) h} \right| + O(1), \tag{41}$$

$$\sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} dt \right| =$$
$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi} \left| \ln \frac{\pi}{a(\sigma) h} \right| \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t \, dt + O(1), \qquad \theta_\omega \in [2/3; 1]. \tag{42}$$

В работе [10] показано, что при $\sigma \in N$ и $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1, 2$,

$$\int\limits_{1/a^*(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(t + \sigma)}{t} dt + \int\limits_{a^*(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi_i(\sigma) - \psi_i(\sigma - 1/t)}{t} dt \le K \psi_i(\sigma), \qquad i = 1, 2. \tag{43}$$

Включение $\sigma \in N$ не принципиально, так как эта оценка верна для любого $\sigma \ge$ ≥ 1. Объединяя соотношения (39), (40), (41) – (43), получаем утверждение теоремы.

Обозначим через $\overline{F}_\infty$ множество функций $\psi \in \overline{F}$, для которых

$$\lim_{\sigma \to \infty} (\eta(\psi; \sigma) - \sigma) = \infty.$$

Пусть $\psi_i \in \overline{F}_\infty$, $i = 1, 2$, и числа $h = h(\sigma)$ выбраны так, что

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\eta(\psi_i; \sigma) - \sigma}{h} = \infty, \qquad i = 1, 2.$$

Тогда (см. [8])

$$\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right) = O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma \to \infty,$$

$$\psi_i(\sigma - h) = O(1)\,\psi_i(\sigma), \quad i = 1, 2, \quad \sigma \to \infty,$$

и из теоремы 1 получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть* $\psi_i \in \overline{F}_\infty$, $i = 1, 2$, $\overline{\psi} = \psi_{1+} + i\psi_{2-}$ *и выполнено условие* (34). *Тогда для любых чисел* σ *и* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \geq 1$, *при* $\sigma \to \infty$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{4\,|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right| + O(1)\,|\overline{\psi}(\sigma)|, \tag{44}$$

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\overline{\psi}} H_{\omega}; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{2\theta_{\omega}|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt \; +$$

$$+\; O(1)\,|\overline{\psi}(\sigma)|\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{45}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* σ *и* h, $\eta(\sigma)$ *есть либо* $\eta(\psi_1; \sigma)$, *либо* $\eta(\psi_2; \sigma)$, $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности.*

Равенства (44) и (45) дают решение задачи Колмогорова – Никольского для операторов Валле Пуссена на классах $\hat{C}^{\overline{\psi}}_{\infty}$ и $\hat{C}^{\overline{\psi}} H_{\omega}$.

1. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198–209.
2. *Stepanets A. I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the real line // Там же. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1549–1561.
3. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102–112.
4. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210–222.
5. *Степанец А. И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597–625.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
7. *Рукасов В. И.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 414–424.
8. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение классов $C^{\psi}H_{\omega}$ суммами Валле Пуссена // Там же. – 2002. – **54**, № 5. – С. 681–691.
9. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 426 с.
10. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 2. – С. 101–136.

Получено 11.11.2003