УДК 519.21

А. А. Имомов (Каршин. ун-т, Узбекистан)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

We obtain a differential analog of the main lemma in the theory of Markov brancling processes $\mu(t)$, $t \geq 0$, of continuous time. We show that the results obtained can be applied in the proofs of limit theorems in the theory of branching processes by the well-known Stein – Tikhomirov method. In contrast to the classical condition of nondegeneracy of the branching process $\{\mu(t) > 0\}$, we consider the condition of nondegeneracy of the process in distant $\{\mu(\infty) > 0\}$ and justify in terms of generating functions. Under this condition, we study the asymptotic behavior of trajectory of the considered process.

Отримано диференціальний аналог основної леми теорії марковських гіллястих процесів $\mu(t)$, $t \geq 0$, неперервного часу. Показано можливість застосування отриманих результатів при доведенні граничних теорем теорії гіллястих процесів відомим методом Стейна – Тихомирова. Крім цього, на відміну від класичної умови невиродження гіллястого процесу $\{\mu(t) > 0\}$ розглянуто і обґрунтовано мовою твірних функцій умову невиродження процесу в далекому майбутньому $\{\mu(\infty) > 0\}$. За цієї умови вивчено асимптотичну поведінку траєкторії розглядуваного процесу.

Рассмотрим марковский ветвящийся случайный процесс $\mu(t)$, $t \geq 0$, непрерывного времени. Пусть $\mathrm{P}\{\mu(0) = 1\} = 1$ и

$$\mathrm{P}_{ij}(t) = \mathrm{P}\{\mu(t+\tau) = j \,|\, \mu(\tau) = i\}, \qquad \tau \geq 0.$$

Из условия ветвления следует, что для изучения изменения состояний процесса $\mu(t)$ достаточно задать вероятности $\mathrm{P}_{1j}(t)$, для которых предполагается выполнение условия

$$\mathrm{P}_{1j}(t) = \delta_{1j} + a_j t + o(t), \qquad t \to 0,$$

где δ_{1j} — знак Кронекера, плотности вероятностей перехода $a_j \geq 0$ при $j \neq 1$ и $a_1 < 0$, а также

$$\sum_{j \geq 0} a_j = 0.$$

Введем в рассмотрение производящие функции (п. ф.)

$$\Phi(t; x) = \sum_{j \geq 0} \mathrm{P}_{1j}(t) x^j, \qquad f(x) = \sum_{j \geq 0} a_j x^j, \qquad |x| \leq 1.$$

Эти п. ф. связаны дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \Phi(t; x)}{\partial t} = f(\Phi(t; x)) \tag{1}$$

с начальным условием $\Phi(0; x) = x$, которое соответствует обратному уравнению Колмогорова для переходных вероятностей марковских ветвящихся процессов непрерывного времени (см. [1]).

Введем следующие обозначения:

$$a = f'(1), \qquad b = f''(1).$$

Будем рассматривать случаи, когда $a < 0$, $a = 0$; в этих случаях процесс $\mu(t)$ называется докритическим и критическим соответственно. Известно, что в исследованиях предельных свойств процесса $\mu(t)$ в рассматриваемых случаях особое значение имеют асимптотические свойства функции $R(t;x) = 1 - \Phi(t;x)$. В частности, для вероятности продолжения процесса $Q(t) \equiv R(t;0) = \mathrm{P}\{\mu(t) > 0\}$ справедливы следующие утверждения (см. [1]):

1. Пусть $a < 0$. Для того чтобы имела место формула

$$Q(t) = Ke^{at}(1 + o(1)), \qquad t \to \infty, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^1 \frac{au + f(1-u)}{uf(1-u)}\, du. \tag{3}$$

Интеграл (3) равен $-\ln K$.

2. Пусть $a = 0$, $b < \infty$. Тогда

$$Q(t) = \frac{2}{bt}(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{4}$$

Для функции $R(t;x)$ справедлива следующая лемма.

Лемма [1]. 1. *Пусть* $a < 0$. *Тогда при конечности интеграла* (3)

$$R(t;x) = Ke^{at} \exp\left\{a \int_0^x \frac{du}{f(u)}\right\}(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{5}$$

Здесь и далее постоянная K *та же, что и в разложении* (2).

2. *Пусть* $a = 0$, $b < \infty$. *Тогда*

$$R(t;x) = \frac{1-x}{1 + \frac{bt}{2}(1-x)}(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{6}$$

Последняя лемма, по своей значимости, называется основной леммой теории марковских ветвящихся процессов непрерывного времени.

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение функции $\dfrac{\partial R(t;x)}{\partial x}$, т. е. доказывается дифференциальный аналог основной леммы и предлагаются некоторые его приложения.

Лемма А. 1. *Пусть* $a < 0$. *Тогда при конечности интеграла* (3)

$$\frac{\partial R(t;x)}{\partial x} = \frac{aKe^{at}}{f(x)}\left\{\exp a \int_0^x \frac{du}{f(u)}\right\}(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{7}$$

2. *Пусть* $a = 0$, $b < \infty$. *Тогда*

$$\frac{\partial R(t;x)}{\partial x} = \frac{-b(1-x)^2}{2f(x)\left[1 + \frac{bt}{2}(1-x)\right]^2}(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Перепишем дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial R(t;x)}{\partial t} = -f(1 - R(t;x)) \tag{9}$$

с начальным условием $R(0;x) = 1 - x$.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (9) с учетом начального условия допускает неявное решение в виде

$$\int\limits_{R(t;\,x)}^{1-x} \frac{du}{f(1-u)} \;=\; t. \tag{10}$$

Используя формулу дифференцирования интегралов с переменными пределами, из (10) получаем

$$\frac{\partial R(t;\,x)}{\partial x} \;=\; -\,\frac{f\big(1-R(t;\,x)\big)}{f(x)}. \tag{11}$$

Далее, воспользуемся разложением Тейлора для п. ф. $f\big(1-R(t;\,x)\big)$ в равенстве (11). Тогда в силу того, что $R(t;\,x)\to 0,\ t\to\infty,$ при $a<0$

$$\frac{\partial R(t;\,x)}{\partial x} \;=\; \frac{a}{f(x)}\,R(t;\,x)\,\big(1+o(1)\big), \qquad t\to\infty, \tag{12}$$

а при $a=0,\ b<\infty$

$$\frac{\partial R(t;\,x)}{\partial x} \;=\; -\,\frac{bR^2(t;\,x)}{2f(x)}\big(1+o(1)\big), \qquad t\to\infty. \tag{13}$$

Подставляя равенство (5) в (12), получаем (7), а подставляя (6) в (13) — (8).

Лемма А доказана.

Известно, что $\Phi'_x(t;\,0) = \mathrm{P}_{11}(t)$ представляет собой вероятность возврата процесса к начальному состоянию $\{\mu(0)=1\}$ за время $t.$ Полагая в лемме А $x=0,$ непосредственно получаем следующие две локальные предельные теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $a<0.$ *Тогда при конечности интеграла* (3)

$$e^{|a|t}\,\mathrm{P}_{11}(t) \;=\; \frac{|a|K}{a_0}\big(1+o(1)\big), \qquad t\to\infty.$$

Теорема 2. *Пусть* $a=0,\ b<\infty.$ *Тогда*

$$t^2\mathrm{P}_{11}(t) \;=\; \frac{2}{ba_0} + O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad t\to\infty.$$

Дифференциальный аналог основной леммы будет полезен также при применении метода Стейна – Тихомирова (С-Т) при доказательстве предельных теорем теории ветвящихся случайных процессов. Известно, что метод С-Т основывается на дифференциальном уравнении для соответствующих характеристических функций или преобразовании Лапласа (а также для п. ф.). В случае нормальной аппроксимации этот метод впервые использован в работе [2] (см. также [3]).

Далее в сочетании с методом С-Т нам удобно использовать следующий вариант леммы А.

Лемма В. 1. *Пусть* $a<0.$ *Тогда*

$$\frac{\partial R(t;\,x)}{\partial x} \;=\; \frac{a}{f(x)}\,R(t;\,x)\,\big(1+o(1)\big), \qquad t\to\infty. \tag{14}$$

2. *Пусть* $a=0,\ b<\infty.$ *Тогда при* $x\to 1$

$$\frac{\partial R(t;\,x)}{\partial x} \;=\; -\left[1-\frac{R(t;\,x)}{Q(t)}\right]^2\big(1+o(1)\big), \qquad t\to\infty. \tag{15}$$

Продемонстрируем применение метода С-Т на примере двух классических предельных теорем.

Теорема 3 [1]. *Пусть* $a < 0$. *Тогда существуют пределы*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mu(t) = k \,|\, \mu(t) > 0\} = \mathrm{P}_k^*.$$

П. ф. $F(x) = \sum_{k\ge 1} \mathrm{P}_k^* x^k$ *имеет вид*

$$F(x) = 1 - \exp a \int_0^x \frac{du}{f(u)}.$$

Доказательство. Условную п. ф. $F(t;x) \equiv \mathrm{E}\{x^{\mu(t)} \,|\, \mu(t) > 0\}$ запишем в виде

$$F(t;x) = 1 - \frac{R(t;x)}{Q(t)}. \tag{16}$$

Дифференцируя (16) с использованием соотношения (14), имеем

$$\frac{\partial F(t;x)}{\partial x} = -\frac{a}{f(x)}\frac{R(t;x)}{Q(t)}(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{a}{f(x)}[F(t;x) - 1](1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{17}$$

Поскольку п. ф. $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{a}{f(x)}[F(x) - 1]$$

с условием $F(0) = 0$, уравнение (17) свидетельствует о сходимости п. ф. $F(t;x)$ к п. ф. $F(x)$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 [1]. *Пусть* $a = 0$, $b < \infty$. *Тогда для любого* $u > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathrm{E}(\mu(t) \,|\, \mu(t) > 0)} \le u \,\middle|\, \mu(t) > 0\right\} = 1 - e^{-u}.$$

Доказательство. Почти очевидно, что условное математическое ожидание $\mathrm{E}\{\mu(t) \,|\, \mu(t) > 0\} = 1/Q(t)$. Поскольку преобразование Лапласа показательного закона есть решение дифференциального уравнения $\psi'(\theta) + \psi^2(\theta) = 0$ с начальным условием $\psi(0) = 1$, нам необходимо доказать, что преобразование Лапласа

$$\psi_t(\theta) \equiv \mathrm{E}(e^{-\theta Q(t)\mu(t)} \,|\, \mu(t) > 0), \qquad \theta \ge 0,$$

асимптотически удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi_t(\theta)}{\partial \theta} = -\psi_t^2(\theta)(1 + o(1)), \qquad t \to \infty, \tag{18}$$

с начальным условием $\psi_t(0) = 1$.

Полагая $\theta_t = \exp\{-\theta Q(t)\}$, преобразования Лапласа $\psi_t(\theta)$ записываем в виде

$$\psi_t(\theta) = 1 - \frac{R(t;\theta_t)}{Q(t)}. \tag{19}$$

В силу (4) $\theta_t \to 1,\ t \to \infty$. Тогда, учитывая (15), непосредственным дифференцированием из (19) получаем

$$\frac{\partial \psi_t(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial R(t;\theta_t)}{\partial \theta}\,\theta_t =$$

$$= -\left[1 - \frac{R(t;\theta_t)}{Q(t)}\right]^2 \theta_t\big(1 + o(1)\big) = -\psi_t^2(\theta)\big(1 + o(1)\big), \qquad t \to \infty,$$

т. е. уравнение (18), что и доказывает теорему 4.

Обратимся теперь к условию невырождения процесса в далеком будущем $\{\mu(\infty) > 0\}$. Введем условную п. ф.

$$M(t;x) \equiv \mathrm{E}\big(x^{\mu(t)} \,|\, \mu(\infty) > 0\big) = \lim_{\tau\to\infty} \mathrm{E}\big(x^{\mu(t)} \,|\, \mu(t+\tau) > 0\big).$$

Из определения $M(t;x)$ (для дискретного случая см. [4]) легко получаем выполнение равенства

$$M(t;x) = -e^{-at} x \frac{\partial R(t;x)}{\partial x}. \tag{20}$$

Сначала вычислим $\mathrm{E}\{\mu(t) \,\big|\, \mu(\infty) > 0\}$. Для этого, логарифмируя уравнение (11) с учетом (1), имеем

$$\ln\left(-\frac{\partial R(t;x)}{\partial x}\right) = \ln \frac{f\big(\Phi(t;x)\big)}{f(x)} = \int_0^t \frac{\partial \ln f\big(\Phi(\tau;x)\big)}{\partial \tau}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{f'\big(\Phi(\tau;x)\big)}{f\big(\Phi(\tau;x)\big)} \frac{\partial \Phi(\tau;x)}{\partial \tau}\, d\tau = \int_0^t f'\big(\Phi(\tau;x)\big)\, d\tau,$$

откуда получаем

$$-\frac{\partial R(t;x)}{\partial x} = \exp \int_0^t f'\big(\Phi(\tau;x)\big)\, d\tau. \tag{21}$$

Подставим равенство (21) в (20):

$$M(t;x) = e^{-at} x \exp \int_0^t f'\big(\Phi(\tau;x)\big)\, d\tau. \tag{22}$$

Итак, мы получили явный вид условной п. ф. $M(t;x)$. Очевидно, что при таком неклассическом условии изучения процесса $\mu(t),\ t \ge 0$, удачно используется представление функции $\dfrac{\partial R(t;x)}{\partial x}$.

Прямым дифференцированием в точке $x = 1$ из (22) находим

$$E(t) \equiv \mathrm{E}\{\mu(t) \,\big|\, \mu(\infty) > 0\} = \begin{cases} 1 + \dfrac{b(1 - e^{at})}{|a|}, & a < 0, \\ bt + 1, & a = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Из (23) непосредственно получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $a < 0,\ b < \infty$. *Тогда условное математическое ожидание*

$$E(t) \to 1 + \frac{b}{|a|}, \qquad t \to \infty.$$

Докажем теперь предельные теоремы, аналогичные теоремам 3, 4, при условии невырождения процесса в далеком будущем $\{\mu(\infty) > 0\}$.

Теорема 6. *Пусть* $a < 0$. *Тогда существуют пределы*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mu(t) = n \,|\, \mu(\infty) > 0\} = \mathrm{P}_n.$$

П. ф. $M(x) = \sum_{n\ge 1} \mathrm{P}_n x^n$ *имеет вид*

$$M(x) = |a| K \frac{x}{f(x)} \exp a \int_0^x \frac{du}{f(u)}.$$

Доказательство. Из (14), (20) имеем

$$M(t; x) = -a e^{-at} \frac{x}{f(x)} R(t; x). \tag{24}$$

Ввиду (2), (16) равенство (24) преобразуем к виду

$$M(t; x) = aK \frac{x}{f(x)} [F(t; x) - 1](1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{25}$$

В свою очередь, согласно теореме 3 $F(t; x) \to F(x)$, $t \to \infty$. Тогда из (25) имеем

$$M(t; x) \to aK \frac{x}{f(x)} [F(x) - 1], \qquad t \to \infty,$$

что равносильно утверждению теоремы 6.

Легко убедиться в том, что $M(1) = 1$, а также

$$M'(1) = 1 + \frac{b}{|a|}.$$

Теорема 7. *Пусть* $a = 0$, $b < \infty$. *Тогда для любого* $u > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathrm{E}(\mu(t) \,|\, \mu(\infty) > 0)} \le u \,\Big|\, \mu(\infty) > 0\right\} = 1 - e^{-2u} - 2ue^{-2u}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение преобразование Лапласа

$$\varphi_t(\theta) \equiv M(t; e^{-\theta/E(t)}), \qquad \theta \ge 0.$$

В силу (23) $e^{-\theta/E(t)} \to 1$, $t \to \infty$, и при $x = e^{-\theta/E(t)}$ имеет место разложение (15). Так, при $a = 0$ из (15), (20) имеем

$$\varphi_t(\theta) = e^{-\theta/E(t)} \left[1 - \frac{R(t; e^{-\theta/E(t)})}{Q(t)}\right]^2 (1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{26}$$

Поскольку $Q(t) \sim 2/E(t)$, $t \to \infty$, с учетом (19) равенство (26) преобразуется к виду

$$\varphi_t(\theta) = \psi_t^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(1 + o(1)), \qquad t \to \infty. \tag{27}$$

Из теоремы 4 известно, что преобразование Лапласа $\psi_t(\theta)$ асимптотически удовлетворяет уравнению (18), решением которого есть функция $1/(1+\theta)$. Таким образом, равенство (27) означает, что

$$\varphi_t(\theta) \to \frac{1}{\left[1+\frac{\theta}{2}\right]^2}, \qquad t \to \infty,$$

и это соответствует закону Эрланга 1-го порядка, получаемому из композиций двух показательных законов с одинаковым параметром $\lambda = 2$:

$$p(x) = 4xe^{-2x}, \qquad x > 0.$$

Последнее равносильно утверждению теоремы 7.

Аналог теоремы 7 для процесса Гальтона – Ватсона дискретного времени доказан в работе [4].

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
2. *Тихомиров А. Н.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – **25**, № 4. – С. 800 – 818.
3. *Formanov Sh. K.* On non-classical variant of central limit theorem // Abstrs Commun. 7th Vilnius Int. Conf. Probab. Theory and Math. Statist. (1998, August 12 – 18, Vilnius, Lithuania). – P. 208.
4. *Имомов А. А.* Об одном виде условия невырождения ветвящихся процессов // Узбек. мат. журн. – 2001. – № 2. – С. 46 – 51.

Получено 20.11.2003