УДК 530.1

О. А. Мохонько (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ДЕЯКІ РОЗВ'ЯЗНІ КЛАСИ НЕЛІНІЙНИХ НЕІЗОСПЕКТРАЛЬНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

We investigate different measure transformations of mapping-multiplication type for the cases where corresponding chains of differential equations may be effectively found and integrated.

Досліджуються різні випадки перетворення міри типу відображення-множення для тих ситуацій, коли відповідні ланцюжки диференціальних рівнянь можна ефективно знайти і зінтегрувати.

1. Вступ. Нехай L — ермітів лінійний оператор у просторі l_2, який можна зобразити якобієвою матрицею з числами $b_n \in \mathbb{R}$ на головній діагоналі і $a_n > 0$ на двох суміжних із нею, що покоординатно діє так: $L(u)_n = a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n + a_n u_{n+1}$, де $a_{-1} = 0$, а областю його визначення є множина $D(L) = \{ u : u \in l_2, Lu \in l_2 \}$. Цей оператор буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли послідовності a_n, b_n є обмеженими.

Дискретний аналог задачі Штурма–Ліувілля

$$a_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_n P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad P_{-1}(\lambda) \equiv 0, \quad P_0(\lambda) \equiv 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_{n+1} = \frac{1}{a_n}((\lambda - b_n) P_n - a_{n-1} P_{n-1}) \tag{1}$$

породжує систему поліномів першого роду $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. Для оператора L будується спектральна борелева міра $d\rho(\lambda)$ і доводиться, що ці поліноми утворюють ортонормований базис гільбертового простору $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$. Клас усіх спектральних мір обмежених якобієвих матриць — це скінченні міри на борелевій σ-алгебрі з компактним носієм і нескінченною множиною точок росту. По кожній такій мірі за відомою класичною процедурою будується якобієва матриця, для якої ця міра є спектральною (обернена спектральна задача). Детальний виклад теорії якобієвих матриць можна знайти, наприклад, у [1, 2].

У цій статті розглядається задача Коші:

$$\dot{a}_n(t) = F_n(a(t), b(t)),$$
$$\dot{b}_n(t) = G_n(a(t), b(t)),$$
$$a_n(t)|_{t=0} = a_n(0), \quad b_n(t)|_{t=0} = b_n(0), \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}, \quad t \in [0, T], \ T \leq \infty.$$

Тут $a(t) = (a_n(t))_{n=0}^{\infty}$, $b(t) = (b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ — послідовності шуканих розв'язків, а F_n, G_n — деякі різницеві нелінійні вирази. Розв'язки шукаються серед один раз неперервно диференційовних функцій $a_n(t) > 0$, $b_n(t) \in \mathbb{R}$, що є обмеженими по n при кожному фіксованому t.

У випадку класичного ланцюжка Тоди на півосі [3] для розв'язку цієї задачі Коші в [4, 5] було запропоновано підхід, пов'язаний з роботами [6, 7]. Він полягає у тому, що з шуканим розв'язком $(a(t), b(t))$ асоціюється якобієва матриця (оператор) $L(t)$ з $b(t)$ на головній діагоналі і $a(t)$ на двох суміжних. Залежність $a_n(t)$, $b_n(t)$ від t, що диктується рівняннями Тоди, є складною. Але виявилося, що залежність спектральної міри $d\rho(\cdot, t)$ оператора $L(t)$ від початкової міри $d\rho(\cdot, 0)$ є простою: $d\rho(\lambda, t) = e^{\lambda t} d\rho(\lambda, 0)$. Це дало можливість запропонувати такий спосіб розв'язування задачі Коші: за початковими даними $(a(0), b(0))$ будуємо якобієву матрицю $L(0)$ і знаходимо її спектральну міру $d\rho(\cdot, 0)$. Далі знаходимо вказаним вище способом спектральну міру $d\rho(\cdot, t)$ для $t \in (0, T]$. Розв'язуючи обернену спектральну задачу, за мірою $d\rho(\cdot, t)$ відновлюємо матрицю $L(t)$, коефіцієнти якої і будуть шуканими розв'язками $(a(t), b(t))$. Формули, що дозволяють це зробити, можна знайти, наприклад, у [5, 8, 9].

Пізніше у роботах [8, 9] було запропоновано узагальнення цього підходу до інтегрування деяких класів нелінійних різницевих рівнянь, коли $d\rho(\cdot, t)$ знаходили по $d\rho(\cdot, 0)$ більш складним чином, аніж множення на $e^{\lambda t}$ (воно пов'язане з точкою зору, викладеною у книзі [10]). У цьому узагальненні $\operatorname{supp} d\rho(\cdot, t)$ змінюється з часом, тобто задачі не є „ізоспектральними". Закон зміни $d\rho(\lambda, t)$ по t задається певним чином за допомогою двох функцій Φ, Ψ. У даній роботі розглядаються випадки, коли цей закон можна калькулятивно реалізувати: наводяться ефективні формули для пошуку $d\rho(\lambda, t)$.

2. (Φ, Ψ)-перетворення міри. Як було зазначено у вступі, за початкову умову візьмемо міру $d\rho(\cdot, 0)$. Побудуємо по ній міру $d\rho(\cdot, t)$ у два кроки: через відображення і множення міри.

Відображення міри будується з використанням задачі Коші:

$$\frac{d\lambda(t, \mu)}{dt} = \Phi(\lambda(t, \mu), t),$$
$$\lambda(0, \mu) = \mu; \quad t \in [0, T], \quad \mu \in M, \tag{2}$$

де коефіцієнт $\Phi(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{l} \varphi_i(t)\lambda^i$ є заданим, $M = \operatorname{supp} d\rho(\cdot, 0)$ — носій міри. Для довільного фіксованого $t \in (0, T]$ будуємо відображення: $\omega_t : M \to \mathbb{R}$, $\omega_t(\mu) = \lambda(t, \mu)$. Воно є неперервним, а тому обмеженим на компакті $M \times [0, T]$. Відображення міри будується так:

$$\hat{\rho}(\Delta, t) = \rho(\omega_t^{-1}(\Delta), 0), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad t \in [0, T].$$

Оскільки образ $\omega_t(\mu)$ є обмеженим, то міра, побудована з використанням прообразу і міри з компактним носієм, сама має $\operatorname{supp}\hat{\rho}(\cdot, t)$-компакт.

Множення побудованої міри $\hat{\rho}$ на функцію здійснюється з використанням рівняння з частинними похідними. Нехай $\Psi(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_i(t)\lambda^i$ — інший фіксований коефіцієнт. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial \lambda}\Phi(\lambda, t) + \frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial t} = \Psi(\lambda, t)s(\lambda, t),$$
$$s(\lambda, 0) = 1; \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Нехай $s(\lambda, t)$ — його розв'язок. Будуємо шукану міру остаточно:

$$\rho(\Delta, t) = \int_{\Delta} s(\lambda, t)\, d\hat{\rho}(\lambda, t) = \int_{\omega_t^{-1}(\Delta)} s(\lambda(t, \mu), t)\, d\rho(\mu, 0).$$

Загальний вигляд ланцюжків для побудованої міри буде таким:

$$\dot{a}_n = \{\Phi(L(t), t)\}_{n+1,n} + \frac{a_n}{2}\left(\{\Psi(L(t), t)\}_{n+1,n} - \{\Psi(L(t), t)\}_{n,n}\right) +$$

$$+ a_{n+1}\{\Phi(L(t),t)D_{L(t)}\}_{n+2,n} - a_{n-1}\{\Phi(L(t),t)D_{L(t)}\}_{n+1,n-1} +$$
$$+ (b_{n+1} - b_n)\{\Phi(L(t),t)D_{L(t)}\}_{n+1,n},$$
$$\dot{b}_n = \{\Phi(L(t),t)\}_{n,n} + a_n\{2\Phi(L(t),t)D_{L(t)} + \Psi(L(t),t)\}_{n+1,n} -$$
$$- a_{n-1}\{2\Phi(L(t),t)D_{L(t)} + \Psi(L(t),t)\}_{n,n-1},$$
$$n \in \mathbb{N}_0, \quad a_{-1} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Тут $D_{L(t)}$ — оператор диференціювання по λ у базисі $\{P_i(\lambda,t)\}_{i=0}^{\infty}$ гільбертового простору $L_2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda,t))$.

Основою усіх подальших викладок є такий факт [8, 9]:

Розглянемо задачу Коші для рівнянь (4): *для довільних початкових даних* $(a(0), b(0))$, *де* $a_n(0) > 0$, $b_n(0) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, — *обмежені рівномірно по* n, *знайти їх розв'язок. Тоді існує достатньо мале* $T > 0$ *таке, що розв'язок існує у класі*

$$K[0,T] = \Big\{(a_n(t), b_n(t)) \in C^1_{[0,T]\to\mathbb{R}} \;\Big|\; \forall t \in [0,T],\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$
$$\textit{виконується } a_n(t) > 0, \ \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\max_{t\in[0,T]}\max(a_n(t), b_n(t)) < +\infty\Big\},$$

є єдиним і може бути знайдений за описаною вище процедурою.

Далі будемо досліджувати рівняння, що виникатимуть при різних $\Phi(\lambda, t)$, $\Psi(\lambda, t)$. Як уже зазначалося, перевага описаного підходу до розв'язування ланцюжків диференціальних рівнянь полягає у тому, що складні закономірності для їх розв'язків будуть описуватись відповідними співвідношеннями для мір, які виявляються значно простішими. Тут виникають дві задачі: необхідно вказати ланцюжок і записати відповідне перетворення міри. Ми розглянемо кожну з них окремо.

Значні труднощі при явному записі ланцюжків виникають при розкритті доданків типу $\{\Phi(L(t),t)D_{L(t)}\}_{i,j}$. Тому почнемо з дослідження оператора диференціювання $D_{L(t)}$.

3. Оператор диференціювання $D_{L(t)}$. Оператор $D_{L(t)}$ диференціювання за змінною λ діє на лінійній підмножині неперервно диференційовних функцій простору $L_2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda,t))$, і його можна подати у вигляді матриці $(d_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ у базисі $\{P_n(\lambda,t)\}_{n=0}^{\infty}$ (надалі змінну t для зручності вказувати не будемо). Оскільки $\deg P_n(\lambda) = n$, то $\deg P_n'(\lambda) = n-1$, а тому $P_n'(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} d_{in}P_i(\lambda)$. Тобто матриця оператора D_L є строго верхньо-трикутною.

Легко отримується рекурентність, що дає можливість будувати всю матрицю зліва направо, стовпчик за стовпчиком:

$$\frac{d}{d\lambda}[a_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + b_nP_n(\lambda) + a_nP_{n+1}(\lambda)] = \frac{d}{d\lambda}[\lambda P_n(\lambda)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_{n+1}'(\lambda) = \frac{1}{a_n}[P_n(\lambda) - b_nP_n'(\lambda) - a_{n-1}P_{n-1}'(\lambda) + \lambda P_n'(\lambda)].$$

Оператор L (що параметрично залежить від t) у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda,t))$ є оператором множення на λ. Цей факт дозволяє розкласти доданок $\lambda P_n'(\lambda)$ за вказаним базисом. Остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} d_{0,n+1} \\ d_{1,n+1} \\ \vdots \\ d_{n-3,n+1} \\ d_{n-2,n+1} \\ d_{n-1,n+1} \\ d_{n,n+1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{a_n}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - b_n \begin{pmatrix} d_{0,n} \\ d_{1,n} \\ \vdots \\ d_{n-3,n} \\ d_{n-2,n} \\ d_{n-1,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - a_{n-1}\begin{pmatrix} d_{0,n-1} \\ d_{1,n-1} \\ \vdots \\ d_{n-3,n-1} \\ d_{n-2,n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} d_{0,n} \\ d_{1,n} \\ \vdots \\ d_{n-3,n} \\ d_{n-2,n} \\ d_{n-1,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\right].$$

Позначимо $d^{(n)} = (d_{0,n}; d_{1,n}; \ldots; d_{n-1,n}; 0; 0; \ldots)$. Два стартові вектори знаходяться безпосередньо: $P_0'(\lambda) = 0 \Rightarrow d^{(0)} = (0; 0; \ldots)$, $P_1'(\lambda) = 1/a_0 \Rightarrow d^{(1)} = (1/a_0; 0; \ldots)$. Обчислимо також

$$Ld^{(n)} = (b_0 d_{0,n} + a_0 d_{1,n}; a_0 d_{0,n} + b_1 d_{1,n} + a_1 d_{2,n}; \ldots; a_{n-3} d_{n-3,n} + b_{n-2} d_{n-2,n} + \\ + a_{n-2} d_{n-1,n}; a_{n-2} d_{n-2,n} + b_{n-1} d_{n-1,n}; a_{n-1} d_{n-1,n}; 0; 0; \ldots).$$

Нас буде цікавити не сама матриця оператора D_L, а явні (тобто не рекурентні) вирази для $d_{n,n+1}$, $d_{n-1,n+1}$, $d_{n-2,n+1}$ і т. д.

Лема 1.

$$d_{n,n+1} = \frac{n+1}{a_n}, \qquad d_{n-1,n+1} = \frac{1}{a_n a_{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i - n b_n\right),$$

$$d_{n-2,n+1} = \frac{1}{a_n a_{n-1} a_{n-2}}\left(2\sum_{i=0}^{n-2} a_i^2 - (n-1)a_{n-1}^2 + (n-1)b_n b_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i^2 - (b_{n-1}+b_n)\sum_{i=0}^{n-2} b_i\right),$$

$$d_{n-j,n+1} = \sum_{i=j}^{n} \frac{a_{i-1}\ldots a_{i-j}}{a_n \ldots a_{n-j}}\left(d_{i-j,i}(b_{i-j} - b_i) + a_{i-j} d_{i-j+1,i} - a_{i-1} d_{i-j,i-1}\right), \quad 1 \le j \le n.$$

Доведення цієї леми проводиться за індукцією. Необхідно порядково записати відповідні рівності у векторній рекурентності (саме тому її було наведено у стовпчиковому вигляді).

4. Побудова ланцюжків. Розглянемо спочатку ізоспектральний випадок: $\Phi(\lambda, t) \equiv 0$. Від ланцюжків (4) залишається:

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \frac{a_n}{2}\left(\{\Psi(L(t), t)\}_{n+1,n} - \{\Psi(L(t), t)\}_{n,n}\right), \\ \dot{b}_n &= a_n\{\Psi(L(t), t)\}_{n+1,n} - a_{n-1}\{\Psi(L(t), t)\}_{n,n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут перетворення міри будується до кінця, і ми отримуємо клас задач, які запропонованим методом розв'язуються повністю. Зокрема, при $\Psi(\lambda, t) = \lambda$ одержимо ланцюжок Тоди [3], а при $\Psi(\lambda, t) = \lambda^2$ — ланцюжок Kac – van Moerbeke [7].

Для випадку $\Psi(\lambda, t) = \lambda^3$ відповідний ланцюжок має вигляд

$$\dot{a}_n = \frac{a_n}{2}\Big(\left(a_n^2 + b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2\right)b_{n+1} + (b_{n+1} + b_{n+2})a_{n+1}^2 - \\ - a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - b_n\left(a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right)\Big),$$

$$\dot{b}_n = a_n^2\left(a_{n-1}^2 + b_n(b_n + b_{n+1}) + a_n^2 + a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2\right) -$$
$$- a_{n-1}^2\left(a_{n-2}^2 + b_{n-1}(b_{n-1} + b_n) + a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right).$$

Якщо $\Psi(\lambda, t) = \lambda^4$, то

$$\dot{a}_n = \frac{a_n}{2}\left(a_{n-1}^2 a_n^2 + \left(a_n^2 + b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2\right)^2 + (b_{n+1} + b_{n+2})^2 a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 a_{n+2}^2\right) -$$
$$- \left(a_{n-2}^2 a_{n-1}^2 + \left(a_{n-1}^2 + b_n^2 + a_n^2\right)^2 + (b_{n-1} + b_n)^2 a_{n-1}^2 + a_n^2 a_{n+1}^2\right),$$

$$\dot{b}_n = a_n^2\Big((b_{n-1} + b_n)a_{n-1}^2 + \left(a_{n-1}^2 + b_n^2 + 2a_n^2 + a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2\right)(b_n + b_{n+1}) + a_{n+1}^2(b_{n+1} + b_{n+2})\Big) -$$
$$- a_{n-1}^2\Big((b_{n-2} + b_{n-1})a_{n-2}^2 + \left(a_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right)(b_{n-1} + b_n) + a_n^2(b_n + b_{n+1})\Big).$$

Розглянемо більш загальний неізоспектральний випадок:

$$\Phi(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{3}\varphi_i(t)\lambda^i, \qquad \Psi(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{3}\psi_i(t)\lambda^i.$$

Необхідно порахувати усі доданки в ланцюжку (4). Позначимо

$$\Phi_{i,j} = \{\Phi(L(t), t)\}_{i,j}, \qquad \Omega_{i,j} = \{\Phi(L(t), t)D_{L(t)}\}_{i,j}$$

і отримаємо

$$\Phi_{n+1,n} = a_n\left(\varphi_1 + \varphi_2(b_{n+1} + b_n) + \varphi_3\left(a_{n-1}^2 + (b_{n+1} + b_n)b_n + \left(b_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2\right)\right)\right),$$

$$\Psi_{n,n} = \psi_1 b_n + \psi_2\left(a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right) + \psi_3\Big[\left(a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right)b_n +$$
$$+ (b_{n+1} + b_n)a_n^2 + (b_{n-1} + b_n)a_{n-1}^2\Big] + \psi_0,$$

$$\Phi_{n,n} = \varphi_1 b_n + \varphi_2\left(a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right) + \varphi_3\Big[\left(a_{n-1}^2 + a_n^2 + b_n^2\right)b_n +$$
$$+ (b_{n+1} + b_n)a_n^2 + (b_{n-1} + b_n)a_{n-1}^2\Big] + \varphi_0,$$

$$\Psi_{n+1,n} = a_n\left(\psi_1 + \psi_2(b_{n+1} + b_n) + \psi_3\left(a_{n-1}^2 + (b_{n+1} + b_n)b_n + \left(b_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2\right)\right)\right),$$

$$\Omega_{n+1,n-1} = \varphi_3 a_{n-1} a_n (n-1),$$

$$\Omega_{n+1,n} = a_n n(\varphi_2 + \varphi_3 b_{n+1} + \varphi_3 b_n) + a_n\varphi_3\sum_{j=1}^{n} b_{j-1}.$$

При підрахунку $\Omega_{i,j}$ суттєво використовувалася лема 1. Остаточний ланцюжок має вигляд

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2}\psi_3 b_{n+1}a_n^3 + (b_{n+1} - b_n)\varphi_3 a_n\sum_{j=1}^{n} b_{j-1} + (b_{n+1} - b_n)a_n n\varphi_2 +$$
$$+ \psi_3 a_n n\left(b_{n+1}^2 - b_n^2 - a_{n-1}^2\right) - \frac{a_n}{2}\left(\psi_2 a_{n-1}^2 + \psi_3 b_n^3 + \psi_2 b_n^2 - \psi_1 b_{n+1}\right) +$$
$$+ a_n\psi_3 b_{n+1}a_{n+1}^2 + \frac{a_n}{2}\left(-\psi_3 b_n a_n^2 + \psi_2 b_{n+1}^2 + \psi_2 a_{n+1}^2 + \psi_3 b_{n+1}^3 - \psi_1 b_n\right) +$$
$$+ \varphi_2 a_n b_n + \psi_3 a_n\left(a_n^2 + 2a_{n-1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 + b_{n+1}b_n\right) +$$
$$+ a_n\left(\frac{1}{2}\psi_3 a_{n+1}^2 b_{n+2} - \psi_3 b_n a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}\psi_3 b_{n-1}a_{n-1}^2 + \varphi_2 b_{n+1} + \varphi_1 + a_{n+1}^2\varphi_3 n\right),$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_n \;=\; & b_n\left(-2a_{n-1}^2\psi_3 n - \psi_3 a_{n-1}^2 b_{n-1} + \varphi_1\right) + a_n^2\left(\psi_3 a_{n+1}^2 + \psi_3 b_{n+1}^3 + \psi_3 b_n^2 + \psi_2 b_n \;+\right. \\
& \left. +\; \psi_2 b_{n+1} + 2n\varphi_2\right) + \varphi_3\left(3b_{n-1}a_{n-1}^2 + a_n^2 b_{n+1} + 2b_n a_n^2 + 4b_n a_{n-1}^2 \;-\right. \\
& \left. -\; 2\left(a_{n-1}^2 - a_n^2\right)\sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1}\right) - \psi_3 a_{n-1}^2\left(a_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2\right) - \psi_2 a_{n-1}^2\left(b_{n-1} + b_n\right) + \\
& +\; 2a_n^2 n\varphi_3 b_n + \psi_3 a_n^2 b_{n+1} b_n + 2a_n^2 n\varphi_3 b_{n+1} - \psi_1 a_{n-1}^2 - \psi_3 a_{n-1}^4 + \psi_1 a_n^2 + \\
& +\; \psi_3 a_n^4 - 2a_{n-1}^2\varphi_2 n - 2a_{n-1}^2\varphi_3 b_{n-1} n + \varphi_2 b_n^2 + \varphi_3 b_n^3 + 3\varphi_2 a_{n-1}^2 + \varphi_2 a_n^2 + \varphi_0 .
\end{aligned}
$$

Як частинний випадок, звідси можна одержати ланцюжок для $\Phi(\lambda, t) = \varphi_0 + \varphi_1\lambda + \varphi_2\lambda^2$, $\Psi(\lambda, t) = \psi_0 + \psi_1\lambda$, для якого у [8, 9] є багато прикладів. Лема 1 дає можливість у явному вигляді записувати ланцюжки для довільних Φ, Ψ.

5. Побудова перетворень мір. Основні труднощі у застосуванні запропонованого методу пов'язані з інтегруванням звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними. Наведемо прості випадки, коли це інтегрування можна здійснити повністю. Проаналізуємо спочатку випадок, коли є лише відображення міри, тобто $\Psi(\lambda, t) \equiv 0$:

1. $\Phi(\lambda, t) \equiv 0 \Rightarrow \hat{\rho}(\Delta, t) = \rho(\Delta, 0)$. Це є випадок, коли початкова міра не деформується зовсім. Маємо

$$
\begin{cases} \dfrac{d\lambda(t,\mu)}{dt} = 0 \\ \lambda(0,\mu) = \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda(t,\mu) = \mu \Rightarrow \omega_t = \mathbb{1}_M \Rightarrow \omega_t^{-1} = \mathbb{1}_M \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \hat{\rho}(\Delta, t) = \rho\left(\omega_t^{-1}(\Delta), 0\right) = \rho(\Delta, 0).
$$

2. $\Phi(\lambda, t) \equiv 1 \Rightarrow \hat{\rho}(\Delta, t) = \rho(\Delta - t, 0)$. Тут носій початкової міри з часом зсувається. Маємо

$$
\begin{cases} \dfrac{d\lambda(t,\mu)}{dt} = 1 \\ \lambda(0,\mu) = \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda(t,\mu) = t + \mu = \omega_t(\mu) \Rightarrow \omega_t^{-1}(\lambda) = \lambda - t \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \hat{\rho}(\Delta, t) = \rho\left(\omega_t^{-1}(\Delta), 0\right) = \rho(\Delta - t, 0).
$$

3. $\Phi(\lambda, t) = a(t)\lambda + b(t) \Rightarrow$

$$
\Rightarrow \hat{\rho}(\Delta, t) = \rho\left(\omega_t^{-1}(\Delta), 0\right) = \rho\left(\Delta \cdot e^{-\int_0^t a(u)\,du} - \int_0^t b(u) e^{-\int_0^u a(\tau)\,d\tau} du;\; 0\right).
$$

Задача Коші розв'язується методом варіації довільної сталої:

$$
\begin{cases} \dfrac{d\lambda(t,\mu)}{dt} = a(t)\lambda + b(t) \\ \lambda(0,\mu) = \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda(t,\mu) = \left(\int_0^t b(u) e^{-\int_0^u a(\tau)\,d\tau} du + \mu\right) e^{\int_0^t a(u)\,du} = \omega_t(\mu) \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \omega_t^{-1}(\lambda) = \lambda e^{-\int_0^t a(u)\,du} - \int_0^t b(u) e^{-\int_0^u a(\tau)\,d\tau} du.
$$

Наприклад, при $\Phi(\lambda, t) = \lambda$ одержуємо $\hat{\rho}(\Delta, t) = \rho(\Delta \cdot e^{-t}, 0)$.

4. $\Phi(\lambda, t) = a(t)\lambda^n$, $n \geq 2 \Rightarrow \hat{\rho}(\Delta, t) = \rho\left(\left(\Delta^{1-n} + (n-1)\int_0^t a(u)\,du\right)^{1/(1-n)};\; 0\right).$

Диференціальне рівняння розв'язується методом відокремлення змінних:

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda(t,\mu)}{dt} = a(t)\lambda^n \\ \lambda(0,\mu) = \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda(t,\mu) = \left(\mu^{1-n} + (1-n)\int_0^t a(u)\,du\right)^{1/(1-n)} = \omega_t(\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_t^{-1}(\lambda) = \left(\lambda^{1-n} + (n-1)\int_0^t a(u)\,du\right)^{1/(1-n)}.$$

Наприклад, при $\Phi(\lambda, t) = \lambda^2$ одержуємо $\hat{\rho}(\Delta, t) = \rho\left(\left(\Delta^{-1} + \int_0^t a(u)\,du\right)^{-1}; 0\right)$. Необхідно зазначити, що при великих значеннях n запис відповідного ланцюжка стає дуже складною задачею, хоча перетворення міри описується просто.

Тепер розглянемо другий етап перетворення міри (при різних варіантах першого): коли є множення.

1. $\Phi(\lambda, t) \equiv 0 \;\; \forall \Psi(\lambda, t) \Rightarrow d\rho(\lambda, t) = e^{\int_0^t \Psi(\lambda,\tau)d\tau} d\rho(\lambda, 0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s(\lambda, t)}{\partial \lambda}\cdot 0 + \dfrac{\partial s(\lambda, t)}{\partial t} = \Psi(\lambda, t)s(\lambda, t) \\ s(\lambda, 0) = 1 \end{cases} \Rightarrow s(\lambda, t) = e^{\int_0^t \Psi(\lambda,\tau)d\tau},$$

$$\rho(\Delta, t) = \int_\Delta s(\lambda, t)\,d\hat{\rho}(\lambda, t) = \int_\Delta e^{\int_0^t \Psi(\lambda,\tau)d\tau} d\rho(\lambda, 0).$$

Наприклад, при $\Psi(\lambda, t) \equiv 0$ міра не змінюється: $\rho(\Delta, t) = \rho(\Delta, 0)$. При $\Psi(\lambda, t) = \lambda$ одержуємо перетворення міри для ланцюжка Тоди: $d\rho(\lambda, t) = e^{\lambda t} d\rho(\lambda, 0)$. Взагалі, для $\Psi(\lambda, t) = \lambda^n$, $n \geq 0$, зокрема, і для тих випадків, для яких у статті було наведено відповідні ланцюжки $(n = 1, 2, 3, 4)$, діє таке перетворення міри: $d\rho(\lambda, t) = e^{\lambda^n t} d\rho(\lambda, 0)$.

2. $\Phi(\lambda, t) \equiv 1 \;\; \forall \Psi(\lambda, t) \Rightarrow d\rho(\lambda, t) = e^{\int_0^t \Psi(u-t+\lambda, u)du} d\rho(\lambda - t, 0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s(\lambda, t)}{\partial \lambda}\cdot 1 + \dfrac{\partial s(\lambda, t)}{\partial t} = \Psi(\lambda, t)s(\lambda, t) \\ s(\lambda, 0) = 1 \end{cases} \Rightarrow s(\lambda, t) = f(t-\lambda)e^{\int_0^\lambda \Psi(\tau, \tau+t-\lambda)d\tau},$$

$$1 = f(-\lambda)e^{\int\limits_0^\lambda \Psi(\tau, \tau-\lambda)d\tau} \Rightarrow f(\lambda) = e^{-\int\limits_0^{-\lambda} \Psi(\tau, \tau+\lambda)d\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(\lambda, t) = e^{-\int\limits_0^{-t+\lambda} \Psi(\tau, \tau+t-\lambda)d\tau} e^{\int\limits_0^\lambda \Psi(\tau, \tau+t-\lambda)d\tau} = e^{\int\limits_0^t \Psi(u-t+\lambda, u)du},$$

$$\rho(\Delta, t) = \int_\Delta s(\lambda, t)\,d\hat{\rho}(\lambda, t) = \int_\Delta e^{\int\limits_0^t \Psi(u-t+\lambda, u)du} d\rho(\lambda, 0).$$

У цьому випадку можна отримувати у показнику експоненти поліноми по t. Припустимо, нам необхідно отримати міру $e^{a_0(\lambda)+a_1(\lambda)t+\ldots+a_n(\lambda)t^n} d\rho(\lambda - t, 0)$. Для цього необхідно розв'язати інтегральне рівняння $\int_0^t \Psi(u - t + \lambda, u)\,du = a_0(\lambda) + a_1(\lambda)t + \ldots + a_n(\lambda)t^n$ відносно Ψ (якщо цей розв'язок існує). Зворотна задача є легкою: наприклад, $\Phi(\lambda, t) \equiv 1$, $\Psi(\lambda, t) = \lambda - t \Rightarrow d\rho(\lambda, t) = e^{-t^2 + t\lambda} d\rho(\lambda - t, 0)$.

$$3.\ \Phi(\lambda, t) = a(t)\lambda + b(t)\ \ \forall \Psi(\lambda, t) \Rightarrow d\rho(\lambda, t) = \exp\left\{ \int_0^t \Psi\left(e^{\int_t^\eta a(\xi)d\xi} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\lambda + \int_t^\eta b(\tau) e^{\int_\tau^t a(\xi)d\xi} d\tau \right], \eta \right) d\eta \right\} d\rho\left(\lambda e^{-\int_0^t a(u)du} - \int_0^t b(u) e^{-\int_0^u a(\tau)d\tau} du,\ 0 \right).$$

На цьому випадку продемонструємо метод інтегрування рівнянь з частинними похідними, що застосовувався для отримання усіх подальших результатів. Диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial \lambda}(a(t)\lambda + b(t)) + \frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial t} = \Psi(\lambda, t)s(\lambda, t),$$

$$s(\lambda, 0) = 1.$$

Застосуємо метод характеристик. Необхідно знайти поверхню $s = s(\lambda, t)$, що проходить через криву $\ell: s(\lambda, 0) = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Криву ℓ подамо у параметризованому вигляді: $\ell = \{ (\lambda, t, s) : \lambda = v,\ t = 0, s = 1,\ v \in \mathbb{R} \}$. Розглянемо три характеристичні рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{du} = 1 \\ t(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow t(u) = u,$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{du} = a(t(u))\lambda(u) + b(t(u)) \\ \lambda(0) = v \end{cases} \Rightarrow \lambda(u) = e^{\int_0^u a(\xi)d\xi} \left(\int_0^u b(\tau) e^{-\int_0^\tau a(\xi)d\xi} d\tau + v \right),$$

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{du} = \Psi(\lambda(u), t(u))s(u) \\ s(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow s(u) = e^{\int_0^u \Psi(\lambda(\eta), t(\eta))d\eta}.$$

Із перших двох виражаємо u та v через t і λ:

$$u = t, \qquad v = \lambda e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - \int_0^t b(\tau) e^{-\int_0^\tau a(\xi)d\xi} d\tau$$

і підставляємо їх у вираз для $\lambda(u)$, замінюючи u змінною η:

$$\lambda(\eta) = e^{\int_0^\eta a(\xi)d\xi} \left(\int_0^\eta b(\tau) e^{-\int_0^\tau a(\xi)d\xi} d\tau + \left[\lambda e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - \int_0^t b(\tau) e^{-\int_0^\tau a(\xi)d\xi} d\tau \right] \right).$$

Тепер для отримання розв'язку залишилося підставити отримані зображення $\lambda(\eta)$ та $t(\eta) = \eta$ у $s(\lambda, t) = s(u(\lambda, t), v(\lambda, t)) = e^{\int_0^u \Psi(\lambda(\eta), t(\eta))d\eta}$.

Аналогічно розглядається наступний випадок:

$$4.\ \Phi(\lambda, t) = a(t)\lambda^n,\ n \ge 2,\ \forall \Psi(\lambda, t) \Rightarrow d\rho(\lambda, t) = \exp\left\{ \int_0^t \Psi\left(\left[(n-1) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \int_\tau^t a(\xi)d\xi + \lambda^{1-n} \right]^{1/(1-n)} ;\ \tau \right) d\tau \right\} d\rho\left(\left(\lambda^{1-n} + (n-1)\int_0^t a(u)du \right)^{1/(1-n)} ;\ 0 \right).$$

Певний інтерес має випадок, коли коефіцієнти Φ не залежать від t. Можна здійснити відокремлення змінних і зінтегрувати рівняння до кінця (тобто не виникає ситуація типу рівняння Ріккаті), але це все одно не дозволяє знайти явну формулу для перетворення міри:

$$\Phi(\lambda, t) = \varphi_0 + \varphi_1\lambda + \ldots + \varphi_n\lambda^n, \ \deg\Phi \ge 2, \ \varphi_i \in \mathbb{R}, \ \forall\Psi(\lambda, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\lambda(t,\mu)}{dt} = \Phi(\lambda, t) = \Phi(\lambda) \\ \lambda(0,\mu) = \mu \end{cases} \Rightarrow \int\limits_0^{\lambda(t,\mu)} \frac{d\xi}{\Phi(\xi)} = t + \int\limits_0^{\mu} \frac{d\xi}{\Phi(\xi)}.$$

Так з'являються певні проблеми з однозначним виразом для $\lambda(t,\mu)$. Наведемо загальний розв'язок для множення міри:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s(\lambda,t)}{\partial\lambda}\Phi(\lambda) + \dfrac{\partial s(\lambda,t)}{\partial t} = \Psi(\lambda,t)s(\lambda,t) \\ s(\lambda, 0) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(\lambda, t) = f\left(t - \int\limits_0^{\lambda} \frac{d\tau}{\Phi(\tau)}\right) e^{\int_0^{\lambda} \frac{\Psi\left(\tau,\, t + \int_{\lambda}^{\tau} \frac{1}{\Phi(\xi)} d\xi\right)}{\Phi(\tau)} d\tau}.$$

Отже, при спробі знайти множення міри виникають ті самі труднощі.

Запишемо ще перетворення міри для випадку $\Phi(\lambda, t) = \lambda^n$, $\Psi(\lambda, t) = \lambda^m$:

а) $\Phi(\lambda, t) = \lambda^n$, $\Psi(\lambda, t) = \lambda^m$, $n \ge 2$, $m - n + 1 \ne 0 \Rightarrow d\rho(\lambda, t) =$

$$= \exp\left\{\frac{1}{m-n+1}\left(\lambda^{m+1-n} - \left((n-1)t + \lambda^{1-n}\right)^{m/(1-n)+1}\right)\right\} d\rho\left(\left[\lambda^{1-n} + (n-1)t\right]^{1/(1-n)};\ 0\right);$$

б) $\Phi(\lambda, t) = \lambda^n$, $\Psi(\lambda, t) = \lambda^m$, $n \ge 2$, $m - n + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d\rho(\lambda, t) = \frac{\lambda}{\left(t(n-1) + \lambda^{1-n}\right)^{1/(1-n)}} d\rho\left(\left[\lambda^{1-n} + (n-1)t\right]^{1/(1-n)};\ 0\right);$$

в) $\Phi(\lambda, t) = \lambda$, $\Psi(\lambda, t) = \lambda^m$, $m \ne 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d\rho(\lambda, t) = \exp\left\{\frac{\lambda^m(1 - e^{-mt})}{m}\right\} d\rho\left(e^{-t}\lambda; 0\right);$$

г) $\Phi(\lambda, t) = \lambda$, $\Psi(\lambda, t) = \lambda^m$, $m = 0 \Rightarrow d\rho(\lambda, t) = e^t d\rho(e^{-t}\lambda; 0)$.

6. Додаткові зауваження. 1. У разі, якщо необхідно проаналізувати ситуацію, коли є лише одне перетворення міри, достатньо у всі попередні результати підставити $\Psi(\lambda, t) \equiv 0$ для випадку, коли відбувається лише відображення міри, і $\Phi(\lambda, t) \equiv 0$, коли відбувається лише множення.

2. Вище було розглянуто випадок $\Phi(\lambda, t) \equiv 0$ $\forall\Psi(\lambda, t)$ і отримано відповідне перетворення міри: $d\rho(\lambda, t) = e^{\int_0^t \Psi(\lambda,\tau)d\tau} d\rho(\lambda, 0)$. Тут відбувається лише множення міри. Оскільки носій міри не змінюється з часом, то це перетворення є ізоспектральним.

Якщо у початкових даних $b(t)|_{t=0} = 0$, то міра $d\rho(\lambda, 0)$ є парною. Якщо покласти $\Phi(\lambda, t) = \lambda^n$, де n — парне, то міра $d\rho(\lambda, t)$ також буде парною. Перетворення міри матиме вигляд $d\rho(\lambda, t) = e^{\lambda^n t} d\rho(\lambda, 0)$. Для ланцюжків виникає ще одна закономірність: якщо n — парне, то усі $b_n(t) \equiv 0$, і ланцюжок для $\dot{b}_n(t)$ зникає, а для $\dot{a}_n(t)$ сильно спрощується; якщо ж n — непарне, то міра парною вже не буде, і сказати щось про $b_n(t)$ вже не можна. Для доведення цієї властивості необхідно акуратно проаналізувати (5). Наведемо декілька прикладів. Отже, скрізь $\Phi(\lambda, t) \equiv 0$:

$$\Psi(\lambda, t) = \lambda^2 \Rightarrow \dot{a}_n = \frac{1}{2} a_n \left(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2\right),$$

$$\Psi(\lambda, t) = \lambda^4 \Rightarrow \dot{a}_n =$$

$$= \frac{a_n}{2}\left(\left(a_{n+1}^2 + a_n^2\right)^2 + a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 + a_{n-1}^2 a_n^2 - \left(a_{n-1}^2 + a_n^2\right)^2 - a_n^2 a_{n+1}^2 - a_{n-2}^2 a_{n-1}^2\right).$$

Цей результат можна ще узагальнити: усі попередні висновки залишаються вірними, коли $\Psi(\lambda, t)$ — будь-яка парна по λ функція. Крім того, можна спеціально сконструювати $\Phi(\lambda, t) \not\equiv 0$ так, щоб $\omega_t^{-1}(\lambda)$ була парною функцією. Тоді $\hat{\rho}(\Delta, t) = \rho(\omega_t^{-1}(\Delta), 0)$ теж буде парною, і якщо додатково $\Psi(\lambda, t)$ є парною по λ, то $d\rho(\lambda, t)$ — парна міра, і знову з'являється можливість використати наведений результат.

Візьмемо, наприклад, $\mu = \omega_t^{-1}(\lambda) = \sqrt{\dfrac{\lambda^2}{1+t\lambda^2}}$. Тоді $\lambda(t, \mu) = \sqrt{\dfrac{\mu^2}{1-t\mu^2}}$, $\lambda(0, \mu) = \mu$, $\dfrac{d\lambda(t, \mu)}{dt} = \dfrac{1}{2}\lambda^3(t, \mu)$. Отже, слід взяти $\Phi(\lambda, t) = \dfrac{1}{2}\lambda^3$. Покладемо, наприклад, $\Psi(\lambda, t) = t^2 + t\lambda^2$. Міра у цьому випадку не є ізоспектральною і є парною: $d\rho(\lambda, t) = e^{t^3/3 + t^2\lambda^2/2}\, d\rho\left(\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{1+t\lambda^2}};\, 0\right)$. Ланцюжок у цьому випадку має вигляд

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2}\left[a_{n-1}^2 a_n + \left(a_n^2 + a_{n+1}^2\right) a_n + a_n t\left(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2\right) + n a_{n+1}^2 a_n - a_{n-1}^2 a_n (n-1)\right].$$

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. (Англ. ред.: *Akhiezer N. I.* The classical moment problem and some related questions in analysis. – New York: Hafner, 1965.)
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с. (Англ. ред.: *Berezansky Yu. M.* Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1968.)
3. *Toda M.* Theory of nonlinear lattices // Springer Ser. Solid-State Sci. – 1981. – № 20. – 205 p.
4. *Berezansky Yu. M.* Integration of nonlinear difference equations by the inverse spectral problem method // Sov. Math. Dokl. – 1985. – **21**. – P. 264–267.
5. *Berezansky Yu. M.* The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem // Repts Math. Phys. – 1986. – **24**. – P. 21–47.
6. *Moser J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Adv. Math. – 1975. – **16**, № 2. – P. 197–220.
7. *Kac M., van Moerbeke P.* On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices // Ibid. – 1975. – **16**, № 2. – P. 160–169.
8. *Berezansky Yu., Shmoish M.* Nonisospectral flows on semi-infinite Jacobi matrices // Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 116–146.
9. *Berezansky Yu. M.* Integration of nonlinear nonisospectral difference-differential equations by means of the inverse spectral problem // Proc. First Workshop on Nonlinear Phys. – 1995. – P. 11–20.
10. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 472 с. (Англ. ред.: *Calogero F., Degasperis A.* Spectral transform and solitons: tools to solve and investigate nonlinear evolution equations. – Amsterdam etc.: North Holland, 1982. – Vol. 1.)

Одержано 26.01.2004,
після доопрацювання – 05.04.2004