УДК 517.977.56

Д. А. Номировский (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

РАЗРЕШИМОСТЬ И ТРАЕКТОРНО-ФИНАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We investigate problems of the solvability and optimization for pseudo-hyperbolic operator of the general form. For different classes of right-hand side of an equation, we prove theorems on the existence and uniqueness. We apply the results obtained to the problem of trajectory-final controllability.

Розглядаються проблеми розв'язності та оптимізації для псевдогіперболічного оператора загального вигляду. Для різних класів правих частин рівняння доведено теореми існування та єдиності. Одержані результати застосовано до задачі траєкторно-фінальної керованості.

В настоящей статье изучается задача оптимизации псевдогиперболической системы

$$\mathcal{L}\, u \;\equiv\; u_{tt} + A(u_t) + B(u) \;=\; f(t, x; h), \tag{1}$$

$$\mathcal{J}(h) \;=\; \Phi(u(h), h) \underset{h}{\rightarrow} \min, \tag{2}$$

где $u(t, x; h)$ — решение уравнения (1), $(t, x) \in (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, A, B — операторы второго порядка по пространственным переменным, h — управление системой, $\mathcal{J}$ — функционал качества. Задачи, приводящие к операторам $\mathcal{L}$, и классические начально-краевые задачи для таких систем в цилиндрической области $(0, T) \times \Omega$ исследованы достаточно хорошо [1 – 5]. Краевые задачи с косой производной для псевдогиперболического оператора рассматривались в [6], нелокальные задачи — в [7]. В случае, когда правая часть f является обобщенной функцией некоторого конечного порядка, псевдогиперболические уравнения изучались в [7 – 10]. Задачи оптимального управления такими системами рассматривались в [9 – 14].

Однако все известные результаты относительно псевдогиперболических уравнений с обобщенными функциями в правой части содержат ряд существенных ограничений на операторы A, B (равномерная эллиптичность, жесткие условия на младшие члены или отсутствие этих слагаемых, условия на гладкость коэффициентов). Кроме того, в указанных работах теоремы разрешимости устанавливают только одно соотношение между гладкостями правой части и решения уравнения, что дает возможность эффективно применять такие теоремы только в случае, когда дифференциальные свойства конкретной правой части совпадают с требованиями гладкости в пространстве правых частей.

В данной работе рассмотрена задача оптимизации для основных краевых задач псевдогиперболических систем. Относительно операторов A, B снято большинство ограничений (существенным остается только равномерная эллиптичность оператора A). Для корректного изучения оптимизационной задачи установлены различные теоремы единственной разрешимости псевдогиперболического уравнения в зависимости от порядка сингулярности правой части f. Полученные результаты дают возможность эффективно изучать вопросы финальной управляемости такими системами.

1. Основные обозначения. В области $Q = (0, T) \times \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с регулярной границей $\partial\Omega$) рассмотрим псевдогиперболическое уравнение (1), где A — эллиптический оператор второго порядка, не зависящий от переменной t,

$$A(u) \;=\; -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u. \tag{3}$$

Оператор B задается аналогично. Будем предполагать, что $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$. Кроме того, оператор A является равномерно эллиптичным в области $\overline{\Omega}$, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \tag{4}$$

для произвольных действительных λ_i, где α — положительная постоянная, не зависящая от $x \in \overline{\Omega}$ и λ_i.

Граница $\partial\Omega$ состоит из трех регулярных частей: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Положим $\Gamma_i = (0,T)\times\gamma_i$, $\Gamma = (0,T)\times\partial\Omega$. Искомая функция $u(t,x)$ удовлетворяет начальным

$$u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

и краевым

$$u|_{\Gamma_1} = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{\mu}_A} + \frac{\partial u}{\partial\vec{\mu}_B}\right)\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(a_0(x)u + \frac{\partial u_t}{\partial\vec{\mu}_A} + \frac{\partial u}{\partial\vec{\mu}_B}\right)\right|_{\Gamma_3} = 0 \tag{6}$$

условиям, где $\vec{\mu}_A = \mathbf{A}\vec{n}$, $\vec{\mu}_B = \mathbf{B}\vec{n}$ — векторы конормали, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, $a_0(x)$ — непрерывная на $\bar{\gamma}_3$ функция.

Обозначим через L_0 множество функций $u(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям (6) и

$$u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \ldots = 0.$$

Пусть $W_0^{k,1}$, $H_0^{k,1}$, $V_0^{k,1}$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, — пополнения множества L_0 по нормам

$$\|u\|^2_{W_0^{k,1}} = \int_Q \left(u^{(k)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i}^{(k)}\right)^2 dQ,$$

$$\|u\|^2_{H_0^{k,1}} = \int_Q \left(u^{(k)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\int_0^t u_{x_i}d\tau\right)^{(k)}\right)^2 dQ, \tag{7}$$

$$\|u\|^2_{V_0^{k,1}} = \|u\|^2_{W_0^{k,1}} + \int_\Omega \left.\left(u^{(k)}\right)^2\right|_{t=T} d\Omega$$

соответственно. Здесь и далее верхний индекс в $u^{(k)}$ обозначает k-ю производную функции $u(t,x)$ по переменной t.

Пусть $W_T^{k,1}$, $H_T^{k,1}$, $V_T^{k,1}$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, — пополнения множества L_T функций $v(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям

$$v|_{\Gamma_1} = 0, \qquad v|_{t=T} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=T} = \ldots = 0, \tag{8}$$

по нормам (7) и

$$\|v\|^2_{H_T^{k,1}} = \int_Q \left(v^{(k)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\int_T^t v_{x_i}d\tau\right)^{(k)}\right)^2 dQ,$$

$$\|v\|^2_{V_T^{k,1}} = \|v\|^2_{W_T^{k,1}} + \int\limits_{\Omega}\left(v^{(k)}\right)^2\Big|_{t=0} d\Omega$$

соответственно.

Трактуя производную отрицательного порядка как интеграл, легко распространить определения пространств $W^{k,1}$, $H^{k,1}$, $V^{k,1}$ для целых отрицательных k. Например, $W_0^{-1,1}$ — пополнение L_0 по норме

$$\|u\|^2_{W_0^{-1,1}} = \int\limits_Q\left(\left(\int\limits_0^t u\,d\tau\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\int\limits_0^t u_{x_i}d\tau\right)^2\right)dQ.$$

Несмотря на выполнение неравенства $\|u\|_{W_0^{k,1}} \le \|u\|_{V_0^{k,1}}$ для всех $u \in L_0$, вложение $V_0^{k,1} \subset W_0^{k,1}$ отсутствует (случай подобен рассмотренному в [12, 15]), поскольку для этой пары пространств не выполняется условие π) [16]. Пространство $V_0^{k,1}$ следует рассматривать (с точностью до изометрии) как множество функций $u(t,x)$ пространства $W_0^{k,1}$, у каждой из которых имеет смысл след $u^{(k)}(T,x) \in L_2(\Omega)$. Аналогичное замечание имеет место и относительно пространства $V_T^{k,1}$.

Лемма 1. *Для произвольного* $k \in \mathbb{Z}$ *имеют место плотные непрерывные вложения:*

1) $H_0^{k+1,1} \subset W_0^{k,1} \subset H_0^{k,1} \subset V_0^{k-1,1}$;

2) $H_T^{k+1,1} \subset W_T^{k,1} \subset H_T^{k,1} \subset V_T^{k-1,1}$.

Кроме того, $H_0^{0,1} \subset L_2(Q)$, $H_T^{0,1} \subset L_2(Q)$.

Для установления каждого из вложений необходимо доказать сравнимость норм на L_0 (или соответственно L_T) и проверить условие π).

Обозначим через $W^{-k,-1}$, $H^{-k,-1}$, $V^{-k,-1}$ соответствующие сопряженные пространства.

Применяя формулу интегрирования по частям и переходя к поверхностным интегралам, несложно убедиться, что для произвольных гладких в $\overline{Q}$ функций $u(t,x)$, $v(t,x)$, $f(t,x;h)$, удовлетворяющих соответственно условиям (1), (5), (6), (8), имеет место равенство

$$-(u_t, v_t)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}u_{x_i}, v_{tx_j}\right)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^n\left(a_i u_{x_i}, v_t\right)_{L_2(Q)} -$$

$$-(au, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n\left(b_{ij}u_{x_i}, v_{x_j}\right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n\left(b_i u_{x_i}, v\right)_{L_2(Q)} +$$

$$+(bu, v)_{L_2(Q)} + (a_0 u, v)_{L_2(\Gamma_3)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \qquad (9)$$

Будем считать, что коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i, a, b непрерывны в $\overline{\Omega}$, а a_0 — в $\overline{\gamma}_3$. Левая часть равенства (9) определена для произвольных $u \in H_0^{1,1}$, $v \in W_T^{1,1}$. Это дает возможность рассматривать левую часть равенства (9) как оператор $\overline{\mathcal{L}}: H_0^{1,1} \to W_T^{-1,-1}$, определенный для всех функций $u \in H_0^{1,1}$. Легко убедиться, что $\overline{\mathcal{L}}$ — линейный оператор. Та же левая часть равенства (9) определяет и линейный сопряженный оператор $\overline{\mathcal{L}}^*: W_T^{1,1} \to H_0^{-1,-1}$.

2. Априорные неравенства. Для изучения оптимизационной задачи (1), (2) нужно обеспечить определенные свойства $\overline{\mathcal{L}}$. Действительно, для определения $\Phi(u(h), h)$ необходимо гарантировать существование и единственность решения (1) для всех управляющих функций $f(h)$, когда h пробегает множество допустимых управлений U_∂. Кроме того, для доказательства сколь-нибудь содержательных утверждений относительно задачи минимизации (2) необходимо знать характерные свойства оператора $\overline{\mathcal{L}}$.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $u \in H_0^{1,1}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|\overline{\mathcal{L}}u\right\|_{W_T^{-1,-1}} \le c\|u\|_{H_0^{1,1}}.$$

Здесь и далее c *— некоторая положительная постоянная, не зависящая от функции* $u(t, x)$.

Доказательство. Если к равенству (9) применить неравенство Коши – Буняковского в интегральной форме и неравенство Фридрихса, то получим доказательство необходимого неравенства.

Следствие **1.** *Оператор* $\overline{\mathcal{L}}: H_0^{1,1} \to W_T^{-1,-1}$ *слабо непрерывный* (*т. е. непрерывный в пространствах* $H_0^{1,1}$, $W_T^{-1,-1}$, *наделенных слабыми топологиями*).

Теорема 2. *Для произвольной функции* $u \in H_0^{1,1}$ *выполняется неравенство*

$$c^{-1}\|u\|_{V_0^{0,1}} \le \left\|\overline{\mathcal{L}}u\right\|_{W_T^{-1,-1}}. \tag{10}$$

Доказательство. Для установления неравенства (10) рассмотрим значение функционала $\overline{\mathcal{L}}u \in W_T^{-1,-1}$ на элементе $v(t, x)$, где $v(t, x)$ — решение задачи Коши

$$e^{Mt}(-v_t + v) = u(t, x), \qquad v\big|_{t=T} = 0.$$

Значение положительной постоянной M укажем позднее. Отметим, что функция $v(t, x)$ принадлежит пространству $W_T^{1,1}$.

Преобразуем и оценим $\left(\overline{\mathcal{L}}u\right)(v)$. Для этого в определение оператора $\overline{\mathcal{L}}$ (равенство (9)) подставим $u(t, x) = e^{Mt}(-v_t + v)$ и рассмотрим каждое из слагаемых отдельно.

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$J_1 = -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} = -\left(u_t, v - e^{-Mt}u\right)_{L_2(Q)} = -(u_t, v)_{L_2(Q)} + \left(u_t, e^{-Mt}u\right)_{L_2(Q)} =$$

$$= (u, v_t)_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega e^{-MT}u^2\big|_{t=T}\,d\Omega + \frac{M}{2}\int\limits_Q e^{-Mt}u^2\,dQ.$$

Далее имеем

$$(u, v_t)_{L_2(Q)} = \left(u, v - e^{-Mt}u\right)_{L_2(Q)} = \left(e^{Mt}(-v_t + v), v\right)_{L_2(Q)} - \int\limits_Q e^{-Mt}u^2\,dQ =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega v^2\big|_{t=0}\,d\Omega + \frac{M}{2}\int\limits_Q e^{Mt}v^2\,dQ + \int\limits_Q e^{Mt}v^2\,dQ - \int\limits_Q e^{-Mt}u^2\,dQ.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$J_1 \ge \frac{1}{2}\int\limits_\Omega e^{-MT}u^2\big|_{t=T}\,d\Omega + \frac{M-2}{2}\int\limits_Q e^{-Mt}u^2\,dQ + \frac{M}{2}\int\limits_Q e^{Mt}v^2\,dQ.$$

Рассмотрим второе слагаемое. Принимая во внимание симметричность матрицы $\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^n$, получаем

$$J_2 = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij} e^{Mt}\left(-v_{tx_i} + v_{x_i}\right) v_{tx_j}\, dQ =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij} e^{Mt} v_{tx_i} v_{tx_j}\, dQ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega +$$

$$+ \frac{M}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij} e^{Mt} v_{x_i} v_{x_j}\, dQ \geq$$

$$\geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v_{tx_i}^2\, dQ + \frac{\alpha M}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2\, dQ.$$

Пусть c^* — положительная постоянная, мажорирующая в области $\overline{\Omega}$ все коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i, a, b, а a_0 — в $\bar{\gamma}_3$. Оценим остальные слагаемые. Применяя неравенство Коши, получаем

$$J_3 = -\sum_{i=1}^{n} \int_Q a_i e^{Mt}\left(-v_{tx_i} + v_{x_i}\right) v_t\, dQ \geq$$

$$\geq -c^* \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\alpha e^{Mt} v_{tx_i}^2}{4c^*} + \frac{c^* e^{Mt} v_t^2}{\alpha}\, dQ - \frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 + e^{Mt} v_t^2\, dQ,$$

$$J_4 = -\int_Q a u v_t\, dQ \geq -\frac{c^*}{2} \int_Q e^{-Mt} u^2 + e^{Mt} v_t^2\, dQ.$$

Рассмотрим следующее слагаемое:

$$J_5 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q b_{ij} e^{Mt}\left(-v_{tx_i} + v_{x_i}\right) v_{x_j}\, dQ \geq$$

$$\geq -c^* n \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\alpha e^{Mt} v_{tx_i}^2}{4nc^*} + \frac{nc^* e^{Mt} v_{x_i}^2}{\alpha}\, dQ - c^* n \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2\, dQ.$$

Аналогично имеем

$$J_6 = \sum_{i=1}^{n} \int_Q b_i e^{Mt}\left(-v_{tx_i} + v_{x_i}\right) v\, dQ \geq$$

$$\geq -c^* \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\alpha e^{Mt} v_{tx_i}^2}{4c^*} + \frac{c^* e^{Mt} v^2}{\alpha}\, dQ - \frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt}\left(v_{x_i}^2 + v^2\right) dQ,$$

$$J_7 = \int_Q b u v\, dQ \geq -\frac{c^*}{2} \int_Q e^{-Mt} u^2 + e^{Mt} v^2\, dQ.$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$J_8 = \int_{\Gamma_3} a_0 u v\, d\Gamma_3 \geq -c^* \int_{\Gamma_3} \varepsilon e^{-Mt} u^2 + \frac{1}{4\varepsilon} e^{Mt} v^2\, d\Gamma_3,$$

где значение положительной постоянной $\varepsilon > 0$ укажем позднее. Принимая во внимание неравенства Фридрихса

$$\int_\Gamma e^{-Mt} u^2\, d\Gamma \leq c_f \int_Q e^{-Mt} u^2 + \sum_{i=1}^{n} e^{-Mt} u_{x_i}^2\, dQ,$$

$$\int\limits_{\Gamma} e^{Mt} v^2 \, d\Gamma \;\leq\; c_f \int\limits_{Q} e^{Mt} v^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} e^{Mt} v_{x_i}^2 \, dQ,$$

где $c_f > 0$ — постоянная Фридрихса, получаем

$$J_8 \;\geq\; -c^* \varepsilon c_f \int\limits_{Q} e^{-Mt} u^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} e^{-Mt} u_{x_i}^2 \, dQ \;-\; \frac{c^* c_f}{4\varepsilon} \int\limits_{Q} e^{Mt} v^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} e^{Mt} v_{x_i}^2 \, dQ.$$

Таким образом, доказано, что

$$\begin{aligned}
\big(\bar{\mathcal{L}} u\big)(v) \;\geq\; & \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} e^{-MT} u^2 \Big|_{t=T} d\Omega - c^* \varepsilon c_f \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} e^{-Mt} u_{x_i}^2 \, dQ \;+ \\
& + \left(\frac{M}{2} - 1 - c^* - c^* \varepsilon c_f \right) \int\limits_{Q} e^{-Mt} u^2 \, dQ \;+ \\
& + \left(\frac{M+2}{2} - \frac{(c^*)^2 n}{\alpha} - \frac{c^*(n+1)}{2} - \frac{c^* c_f}{4\varepsilon} \right) \int\limits_{Q} e^{Mt} v^2 \, dQ \;- \\
& - c^* \left(\frac{c^* n}{\alpha} + \frac{n+1}{2} \right) \int\limits_{Q} e^{Mt} v_t^2 \, dQ + \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} e^{Mt} v_{t x_i}^2 \, dQ \;+ \\
& + \left(\frac{\alpha M}{2} - c^* - \frac{n^2 (c^*)^2}{\alpha} - c^* n - \frac{c^* c_f}{4\varepsilon} \right) \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} e^{Mt} v_{x_i}^2 \, dQ.
\end{aligned}$$

Положим

$$\varepsilon \;=\; \frac{\alpha}{20 c^* c_f}.$$

С учетом неравенств

$$\int\limits_{Q} e^{Mt} v_t^2 \, dQ \;=\; \int\limits_{Q} e^{Mt} \big(v - e^{-Mt} u\big)^2 dQ \;\leq\; 2 \int\limits_{Q} e^{Mt} v^2 \;+\; e^{-Mt} u^2 \, dQ,$$

$$\int\limits_{Q} e^{-Mt} u_{x_i}^2 \, dQ \;=\; \int\limits_{Q} e^{Mt} \big(v_{x_i} - v_{t x_i}\big)^2 dQ \;\leq\; 2 \int\limits_{Q} e^{Mt} v_{x_i}^2 \;+\; e^{Mt} v_{t x_i}^2 \, dQ$$

несложно подобрать такое достаточно большое $M > 0$, чтобы

$$\begin{aligned}
\big(\bar{\mathcal{L}} u\big)(v) \;\geq\; & c^{-1} \int\limits_{Q} v_t^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} v_{t x_i}^2 \, dQ \;+ \\
& + \; c^{-1} \int\limits_{Q} u^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dQ \;+\; c^{-1} \int\limits_{\Omega} u^2 \Big|_{t=T} d\Omega.
\end{aligned}$$

Применяя к правой части неравенство Коши, получаем

$$\big\| \bar{\mathcal{L}}\, u \big\|_{W_T^{-1,-1}} \| v \|_{W_T^{1,1}} \;\geq\; \big(\bar{\mathcal{L}}\, u\big)(v) \;\geq\; 2 c^{-1} \| v \|_{W_T^{1,1}} \| u \|_{V_0^{0,1}},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание **1.** Теорема 2 справедлива и в случае, когда коэффициенты уравнения a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i, a, b принадлежат пространству $L_\infty(\Omega)$, а $a_0 \in L_\infty(\gamma_3)$.

Если к слагаемому $\sum \big(a_{ij}\, u_{x_i}, v_{t x_j}\big)_{L_2(Q)}$ в равенстве (9) применить формулу интегрирования по частям, то получим

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\,u_{x_i},\, v_{tx_j}\right)_{L_2(Q)} = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\,u_{tx_i},\, v_{x_j}\right)_{L_2(Q)},$$

и левая часть (9) будет определять расширение сопряженного оператора $\overline{\mathcal{L}}^*$ до отображения из $H_T^{1,1}$ в $W_0^{-1,-1}$. Сохраним за этим оператором прежнее обозначение $\overline{\mathcal{L}}^*$ и докажем априорную оценку.

Теорема 3. *Для всех* $v \in H_T^{1,1}$ *выполняются неравенства*

$$c^{-1}\|v\|_{V_T^{0,1}} \leq \left\|\overline{\mathcal{L}}^* v\right\|_{W_0^{-1,-1}} \leq c\|v\|_{H_T^{1,1}}. \tag{11}$$

Доказательство. Как и в случае теоремы 2, для доказательства оценки снизу следует рассмотреть значение функционала $\overline{\mathcal{L}}^* v \in W_0^{-1,-1}$ на элементе $u(t,x)$, где $u(t,x)$ — решение задачи Коши

$$e^{-Mt}(u_t + u) = v(t,x), \quad u|_{t=0} = 0.$$

Следствие 2. *Операторы* $\overline{\mathcal{L}}\colon H_0^{1,1} \to W_T^{-1,-1}$, $\overline{\mathcal{L}}^*\colon H_T^{1,1} \to W_0^{-1,-1}$ *инъективные.*

Теорема 4. *Для всех* $f \in V_T^{0,-1} \subset W_T^{-1,-1}$ *существует единственное решение* $u \in W_0^{1,1}$ *уравнения* $\overline{\mathcal{L}}u = f$.

Доказательство. В силу (11) для всех $v \in W_T^{1,1} \subset H_T^{1,1}$ выполняются неравенства

$$|f(v)| \leq \|f\|_{V_T^{0,-1}}\|v\|_{V_T^{0,1}} \leq c\|f\|_{V_T^{0,-1}}\left\|\overline{\mathcal{L}}^* v\right\|_{W_0^{-1,-1}}.$$

В силу инъективности оператора $\overline{\mathcal{L}}^*$ выражение $f(v)$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал l от $\overline{\mathcal{L}}^* v$ в пространстве $W_0^{-1,-1}$, определенный на $\overline{\mathcal{L}}^*\left(W_T^{1,1}\right)$. Согласно теореме Хана – Банаха этот функционал можно расширить по непрерывности на все $W_0^{-1,-1}$. В силу рефлексивности пространства $W_0^{1,1}$ существует такое $u \in W_0^{1,1}$, что $l\left(\overline{\mathcal{L}}^* v\right) = \left(\overline{\mathcal{L}}^* v\right)(u)$ или $f(v) = \left(\overline{\mathcal{L}}\,u\right)(v)$. Отсюда в силу произвольности v имеем $\overline{\mathcal{L}}\,u = f$.

Единственность следует из инъективности $\overline{\mathcal{L}}$.

Замечание 2. Аналогично устанавливается, что для всех $f \in W_T^{0,-1}$ существует единственное решение $u \in W_0^{1,1}$ уравнения $\overline{\mathcal{L}}\,u = f$, откуда следует плотность $R\left(\overline{\mathcal{L}}\right)$ в $W_T^{-1,-1}$.

Определение 1. *Обобщенным решением уравнения* $\overline{\mathcal{L}}\,u = f$ *будем называть элемент* $u \in V_0^{0,1}$, *для которого существует такая последовательность* $u_i \in H_0^{1,1}$, *что*

$$\|u_i - u\|_{V_0^{0,1}} \to 0, \qquad \left\|\overline{\mathcal{L}}\,u_i - f\right\|_{W_T^{-1,-1}} \to 0$$

при $i \to \infty$.

Теорема 5. *Для всех* $f \in W_T^{-1,-1}$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in V_0^{0,1}$ *уравнения* $\overline{\mathcal{L}}\,u = f$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из плотности множества $R\left(\overline{\mathcal{L}}\right)$ в $W_T^{-1,-1}$ и неравенства (10).

***Следствие* 3.** *Для всех* $f \in W_T^{-1,-1}$ *выполняется неравенство* $\|u\|_{V_0^{0,1}} \le c\|f\|_{W_T^{-1,-1}}$, *где* $u \in V_0^{0,1}$ *— обобщенное решение уравнения* $\overline{\mathcal{L}}\, u = f$.

***Замечание* 3.** Пусть $\overline{H}_T^{2,1}$ — пополнение множества функций $v \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям $v|_{\Gamma_1} = 0$, $v|_{t=T} = 0$ по норме пространства $H_T^{2,1}$. Ясно, что имеет место непрерывное плотное вложение $\overline{H}_T^{2,1} \subset W_T^{1,1}$.

Принимая во внимание равенство (9) и формулу интегрирования по частям

$$-(u_t, v_t)_{L_2(Q)} = -(u(T,x), v_t(T,x))_{L_2(\Omega)} + (u, v_{tt})_{L_2(Q)} \quad \forall\, u \in H_0^{1,1}, \quad v \in \overline{H}_T^{2,1},$$

оператор $\overline{\mathcal{L}}$ можно расширить по непрерывности до $\overline{\mathcal{L}}_1\colon V_0^{0,1} \to \overline{H}_T^{-2,-1}$. Несложно понять, что обобщенное решение $u \in V_0^{0,1}$ удовлетворяет равенству $\overline{\mathcal{L}}_1 u = f$, т. е. в теореме 5 установлено, что $W_T^{-1,-1} \subset R(\overline{\mathcal{L}}_1)$ и для всех $u \in V_0^{0,1}$, $\overline{\mathcal{L}}_1 u \in W_T^{-1,-1}$ выполняется неравенство $\|u\|_{V_0^{0,1}} \le c\|\overline{\mathcal{L}}_1 u\|_{W_T^{-1,-1}}$.

Лемма 2. *Оператор* $\overline{\mathcal{L}}_1$ *инъективный.*

Доказательство. Применяя формулу интегрирования по частям к (9), получаем, что для произвольных $u \in H_0^{1,1}$, $v \in W_T^{2,1}$ левая часть принимает вид

$$(u, v_{tt})_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\int_0^t u_{x_i}d\tau, v_{ttx_j}\right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\int_0^t u_{x_i}d\tau, v_{tt}\right)_{L_2(Q)} -$$
$$- (au, v_t)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij}\int_0^t u_{x_i}d\tau, v_{tx_j}\right)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n}\left(b_i\int_0^t u_{x_i}d\tau, v_t\right)_{L_2(Q)} +$$
$$+ (bu, v)_{L_2(Q)} + (a_0 u, v)_{L_2(\Gamma_3)}.$$

Это выражение задает расширение $\overline{\mathcal{L}}$ до линейного непрерывного оператора $\overline{\mathcal{L}}_2\colon H_0^{0,1} \to W_T^{-2,-1}$. Рассмотрим значение $\overline{\mathcal{L}}_2 u$ на элементе $v(t,x) \in W_T^{2,1}$, где $v(t,x)$ — решение задачи Коши

$$e^{Mt}(-v_{tt} + v_t) = -\int_0^t u\,d\tau, \qquad v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0, \tag{12}$$

и, проведя оценки, аналогичные таковым при доказательстве теоремы 2, установим неравенство

$$c^{-1}\int_Q\left(\int_0^t u\,d\tau\right)^2 dQ \le \|\overline{\mathcal{L}}_2 u\|^2_{W_T^{-2,-1}} \qquad \forall\, u \in H_0^{0,1}. \tag{13}$$

Используя полученное неравенство и рассуждая, как и при доказательстве теоремы 4, получаем, что уравнение $\overline{\mathcal{L}}_2^* v = g$ имеет решение $v \in W_T^{2,1}$ для всех $g \in W_T^{1,1}$. Отсюда следует плотность $R(\overline{\mathcal{L}}_2^*)$ в пространстве $H_0^{0,-1}$, а значит, и в $W_0^{0,-1}$.

С другой стороны, ясно, что на элементах $v \in W_T^{2,1}$ имеют место равенства

$$(\overline{\mathcal{L}}_1 u)(v) = (\overline{\mathcal{L}}_1 u_1)(v) = (\overline{\mathcal{L}}_2 u_1)(v) = (\overline{\mathcal{L}}_2^* v)(u_1) \qquad \forall\, u = (u_1, u_2) \in V_0^{0,1},$$

где пара функций $u_1(t,x) \in W_0^{0,1}$, $u_2(x) \in L_2(\Omega)$ задает $u \in V_0^{0,1}$ (u_2 — след $u(t,x)$ при $t = T$). Если теперь для некоторой функции $u = (u_1, u_2) \in V_0^{0,1}$

имеет место $\overline{\mathcal{L}}_1 u = 0$, то в силу плотности $R\left(\overline{\mathcal{L}}_2^*\right)$ получим $u_1 = 0$. С учетом этого равенство $\overline{\mathcal{L}}_1 u = 0$ можно переписать в виде

$$-\left(u_2, v_t(T, x)\right)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall\, v \in \overline{H}_T^{2,1}.$$

Отсюда в силу теоремы о следах получаем $u_2 = 0$, что и требовалось доказать.

3. Оптимизация псевдогиперболической системы. Пусть в оптимизационной задаче (1), (2) управление h выбирается из допустимого множества U_∂ топологического пространства управлений C. Функционал $\Phi(u(h), h)$ определен в пространстве $V_0^{0,1} \times C$. Под $u(h) \in V_0^{0,1}$ будем понимать обобщенное решение уравнения (1) в смысле определения 1.

Подобно [12, 15] докажем оптимизационные теоремы.

Теорема 6. *Пусть состояние системы определяется из уравнения* (1). *Если в пространстве* C *существует такая топология* τ_C, *что:*

1) *функционал* Φ *секвенциально полунепрерывный снизу в пространстве* $V_0^{0,1} \times C$ *с топологией, порожденной слабой топологией пространства* $V_0^{0,1}$ *и* τ_C;

2) *множество* U_∂ *секвенциально компактное в топологическом пространстве управлений* (C, τ_C);

3) *отображение* $f\colon C \to W_T^{-1,-1}$ *секвенциально слабо непрерывное* $(h_k \to h$ *в* $(C, \tau_C) \Rightarrow f(h_k) \to f(h)$ *в слабой топологии пространства* $W_T^{-1,-1})$,

то функционал $\mathcal{I}(h)$ *ограничен снизу и оптимальное управление существует.*

Доказательство. В силу условия 2 можно выбрать сходящуюся к $h^* \in U_\partial$ в пространстве (C, τ_C) последовательность управлений $h_k \in U_\partial$, минимизирующую функционал $\mathcal{I}$. Из условия 3 следует, что последовательность $f(h_k)$ слабо сходится (в частности, ограничена) к $f(h^*)$ в пространстве $W_T^{-1,-1}$, а следовательно, и в $\overline{H}_T^{-2,-1}$. Пусть $u(h_k) \in V_0^{0,1}$ — обобщенное решение уравнения $\overline{\mathcal{L}} u = f(h_k)$ (теорема 5). Согласно следствию 3 имеет место оценка $\|u(h_k)\|_{V_0^{0,1}} \le c\|f(h_k)\|_{W_T^{-1,-1}}$. Таким образом, последовательность $u(h_k)$ ограничена в $V_0^{0,1}$. В силу гильбертовости пространства $V_0^{0,1}$ существует такая подпоследовательность h_{k_m}, что $u(h_{k_m})$ слабо сходится к u^* в $V_0^{0,1}$. Согласно замечанию 3 имеет место равенство $\overline{\mathcal{L}}_1 u(h_{k_m}) = f(h_{k_m})$. Поскольку оператор $\overline{\mathcal{L}}_1\colon V_0^{0,1} \to \overline{H}_T^{-2,-1}$ слабо непрерывный (аналогично следствию 1), то

$$f(h^*) = \lim_{m\to\infty} f(h_{k_m}) = \lim_{m\to\infty} \overline{\mathcal{L}}_1 u(h_{k_m}) = \overline{\mathcal{L}}_1 u^*,$$

где пределы понимаются в смысле слабой топологии пространства $\overline{H}_T^{-2,-1}$.

Поскольку оператор $\overline{\mathcal{L}}_1$ инъективный (лемма 2), то u^* — обобщенное решение уравнения $\overline{\mathcal{L}} u = f(h^*)$.

Теперь из условия 1 следует, что h^* — оптимальное управление.

***Замечание* 4.** Пусть C — линейное нормированное пространство, C^* — сильно сопряженное пространство. Топологию τ_C выбирают настолько слабой, чтобы множество U_∂ оказалось секвенциально компактным, но отображения Φ, f сохраняли требуемые свойства гладкости.

Например, если топология τ_C согласуется с двойственностью (C, C^*), то функционал

$$\Phi(u,h) = w\left(\|u\|_{W_0^{0,1}}, \left\|u|_{t=T}\right\|_{L_2(\Omega)}, \|h\|_C\right)$$

удовлетворяет условиям теоремы, где $w\colon \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая на $\mathbb{R}_+^3$ функция (если $0 \le x_i \le y_i$, $i \in \{1,2,3\}$, то $w(x_1,x_2,x_3) \le \le w(y_1,y_2,y_3)$). Например,

$$\Phi(u,h) = 3\|u\|_{W_0^{0,1}} + 2\left\|u|_{t=T}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \|h\|_C^3.$$

Действительно, в линейном нормированном пространстве норма $\|u\|$ является секвенциально слабо полунепрерывным снизу функционалом, топология τ_C сильнее топологии $\sigma(C,C^*)$, а возрастающая непрерывная функция имеет свойство $\varliminf_{n\to\infty} w(\vec{x}_n) \ge w\left(\varliminf_{n\to\infty} \vec{x}_n\right)$.

Управляющие функции $f\colon C \to W_T^{-1,-1}$, задающие импульсные $\sum \delta(t-t^i) \times \times\, \varphi_i(x)$, точечные $\sum \delta(x_1 - x_1^i)\, \varphi_i(t, x_2, \ldots)$, подвижные $\sum \delta(x_1 - s_i(t)) \times \times\, \varphi_i(t, x_2, \ldots)$ и тому подобные сингулярные воздействия, также удовлетворяют требованиям слабой непрерывности (аналогичные факты установлены в [9, 10]).

Если $\tau_C = \sigma(C,C^*)$, то за допустимые множества $U_\partial \subset C$ можно брать произвольные выпуклые замкнутые (по норме) ограниченные множества.

***Замечание* 5.** В силу нелинейности отображений f, Φ функционал качества $\mathcal{J}$ может оказаться не выпуклым, а оптимальное управление не единственным.

Наличие априорных оценок (теоремы 1, 2) дает возможность изучать дифференциальные свойства функционала $\mathcal{J}$ (при наличии соответствующих свойств гладкости у функционала $\Phi\colon V_0^{0,1} \times C \to \mathbb{R}$ и отображения $f\colon C \to \to W_T^{-1,-1}$) и строить численные методы оптимизации градиентного типа [10].

Определение 2. *Система* (1) *называется асимптотически управляемой в банаховом пространстве* $V_0^{0,1}$ *множеством управляющих воздействий* U_∂, *если для любого элемента* $u^* \in V_0^{0,1}$ *существует последовательность управлений* $h_i \in U_\partial$ *такая, что* $\left\|u(h_i) - u^*\right\|_{V_0^{0,1}} \to 0$ *при* $i \to \infty$, *где* $u(h_i)$ — *обобщенное решение уравнения* $\bar{\mathcal{L}} u = f(h_i)$.

Теорема 7. *Если множество* $f(U_\partial)$ *плотно в пространстве* $W_T^{-1,-1}$, *то система* (1) *асимптотически управляемая в* $V_0^{0,1}$ *множеством управляющих воздействий* U_∂.

Доказательство. Пусть u^* — произвольный элемент пространства $V_0^{0,1}$. Поскольку $H_0^{1,1}$ плотно в $V_0^{0,1}$, существует последовательность $u_i \in H_0^{1,1}$, сходящаяся к u^* в пространстве $V_0^{0,1}$, а так как множество $f(U_\partial)$ плотно в $W_T^{-1,-1}$, при фиксированном $i \in \mathbb{N}$ существует такая последовательность $h_{i,k} \in U_\partial$, что $\left\|\bar{\mathcal{L}} u_i - f(h_{i,k})\right\|_{W_T^{-1,-1}} \le \varepsilon_k$ $(\varepsilon_k = o(1))$. В силу следствия 3 имеем

$$\left\|u^* - u(h_{i,k})\right\|_{V_0^{0,1}} \le \left\|u^* - u_i\right\|_{V_0^{0,1}} + c\left\|\bar{\mathcal{L}} u_i - f(h_{i,k})\right\|_{W_T^{-1,-1}} \le \left\|u^* - u_i\right\|_{V_0^{0,1}} + c\varepsilon_k \to 0$$

при $k \to \infty$, $i \to \infty$.

***Замечание* 6.** Из доказанной теоремы следует финальная (при $t = T$) асимптотическая управляемость псевдогиперболической системы.

***Замечание* 7.** Известно, что множество функций

$$\left\{ \sum_{i=1}^{s} \delta(t-t_i)\varphi_i(x),\ t_i \in [0,T],\ \varphi_i \in L_2(\Omega) \right\}$$

плотно в пространстве $W_T^{-1,-1}$. Аналогично плотными являются и множества, задающие точечные, подвижные и тому подобные сингулярные обобщенные воздействия.

Аналогично доказательству неравенства (13) можно осуществить „сдвиг" априорных оценок на оператор $\dfrac{d^k}{dt^k}$ и получить „шкалу" двусторонних неравенств. Например, применяя вспомогательный оператор (12), для всех $u \in H_0^{0,1}$ устанавливаем неравенства

$$c^{-1}\|u\|_{V_0^{-1,-1}} \le \left\|\bar{\mathcal{L}}_2 u\right\|_{W_T^{-2,-1}} \le c\|u\|_{H_0^{0,1}},$$

а также двойственные оценки.

Априорные неравенства дают возможность получить аналогичные результаты разрешимости, оптимального управления и управляемости для других пар пространств правых частей и функций состояния.

1. *Войт С. С.* Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Уч. зап. Моск. ун-та. Механика. – 1954. – № 5. – С. 125 – 142.
2. *Сувейка И. И.* Смешанные задачи для уравнения распространения возмущений в вязких средах // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 2. – С. 337 – 347.
3. *Гузь А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А. С. К., 1998. – 350 с.
4. *Булавацкий В. М., Юрик И. И.* Математическое моделирование процесса теплопереноса в релаксирующей среде // Допов. НАН України. – 1996. – № 7. – С. 42 – 45.
5. *Пономарев С. М.* К вопросу о поведении вязкой сжимаемой жидкости под действием заданного граничного режима // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 719 – 722.
6. *Кожанов А. И.* Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений // Сиб мат. журн. – 1996. – **37**, № 6. – С. 1335 – 1346.
7. *Маловичко В. А.* О краевых задачах для вырождающихся псевдопараболических и псевдогиперболических систем // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2120 – 2124.
8. *Ляшко И. И., Ляшко С. И., Клюшин Д. А., Спивак А. Ю.* Численное решение пседогиперболических уравнений // Допов. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 29 – 34.
9. *Номіровський Д. А.* Чисельні методи оптимізації та моделювання в псевдогіперболічних системах: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1999. – 157 с.
10. *Lyashko S. I.* Generalized optimal control of linear systems with distribution parameters. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 453 p.
11. *Номировский Д. А.* Управление в псевдопараболических системах // Вычислит. и прикл. математика. – 1996. – Вып. 80. – С. 68 – 77.
12. *Ляшко И. И., Ляшко С. И., Номировский Д. А.* Управляемость гиперболических и псевдогиперболических систем в классе сингулярных воздействий // Допов. НАН України. – 2000. – № 11. – С. 131 – 134.
13. *Ляшко С. И., Семенов В. В.* Об управляемости линейных распределенных систем в классах обобщенных воздействий // Кибернетика и систем. анализ. – 2001. – № 1. – С. 18 – 41.
14. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 505 с.
15. *Ляшко С. И., Номировский Д. А.* Обобщенное решение и оптимальное управление в системах, описывающих динамику вязкой стратифицированной жидкости // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 1. – С. 84 – 91.
16. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Получено 16.02.2004