УДК 517.946

И. Д. Пукальский (Черновиц. нац. ун-т)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

In the spaces of classical functions with power weight, we prove the correct solvability of a boundary-value problem for parabolic equations with an arbitrary power order of degeneration of coefficients both in time and space variables.

У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено коректну розв'язність крайової задачі для параболічних рівнянь з довільним степеневим порядком виродження коефіцієнтів як за часовою, так і за просторовими змінними.

В современных прикладных и теоретических исследованиях очень часто встречаются задачи с разными вырождениями. В частности, уравнение Шредингера, определяющее состояние квантовомеханической системы, имеет степенные особенности в коэффициентах [1]. Краевые задачи с нелокальным условием по временной переменной для параболических уравнений второго порядка со степенными особенностями в коэффициентах исследовались в [2, 3].

Изучению фундаментальных матриц решений параболических систем, их применению для исследования корректной разрешимости задачи Коши посвящена монография [4]. В [5] построена теория классических решений задачи Коши и краевой задачи для равномерно параболических уравнений, которые имеют степенные особенности ограниченного порядка на границе области в коэффициентах при младших производных.

Здесь в пространствах классических функций со степенным весом изучается краевая задача для параболических уравнений без ограничения на степенной порядок вырождения коэффициентов уравнения.

Постановка задачи и основной результат. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂D. Рассмотрим в области $Q = (0, T] \times D$ краевую задачу

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x) D_x^k \right] u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left[\sum_{|k| \le r_i} b_k^{(i)}(t,x) D_x^k \right] u(t,x) \big|_{\Gamma} = f_i(t,x), \tag{3}$$

где $\Gamma = (0, T] \times \partial D$, $0 \le r_i \le 2b - 1$, $i \in \{1, \ldots, b\}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \ldots D_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Пусть $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ — произвольные вещественные числа, $t^{(0)} \in (0,T)$, $x^{(0)} \in D$, $\min\limits_{y \in \partial D} \left| y - x^{(0)} \right| \ge e > 0$, $e = \text{const}$, $\left| y - x^{(0)} \right| = \left[\sum_{l=1}^n (y_l - x_l^{(0)}) \right]^{1/2}$. Особенности коэффициентов дифференциального выражения L характеризуются следующими функциями: $s_1(q^{(1)}, t) = \left| t - t^{(0)} \right|^{q^{(1)}}$ при $\left| t - t^{(0)} \right| \le 1$, $s_1(q^{(1)}, t) = 1$ при $\left| t - t^{(0)} \right| \ge 1$; $s_2(q^{(2)}, x) = \left| x - x^{(0)} \right|^{q^{(2)}}$ при $\left| x - x^{(0)} \right| \le 1$, $s_2(q^{(2)}, x) = 1$ при $\left| x - x^{(0)} \right| \ge 1$.

Пусть $\overline{Q} = [0,T]\times \overline{D}$, $\overline{D} = D \cup \partial D$, а $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_l(t^{(1)},x^{(2)})$, $N_l(t^{(2)},x^{(2)})$, $l \in \{1,\ldots,n\}$, — точки из Q, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{l-1}^{(1)},x_l^{(2)}, x_{l+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$. Обозначим через $\beta_l^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$, $\mu_{k_l}^{(\nu)}$, $\nu\in\{1,2\}$, вещественные числа такие, что $\beta_l^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\mu_0^{(\nu)}\ge 0$, $\mu_{k_l}^{(\nu)}\ge 0$. Положим

$$(k,\mu_k) = \sum_{l=1}^n k_l\mu_{k_l}^{(\nu)}, \qquad s(q;P) = s_1(q^{(1)},t)s_2(q^{(2)},x),$$

$$s((k,\gamma-\beta);P) = s_1((k,\gamma^{(1)}-\beta^{(1)}),t)s_2((k,\gamma^{(2)}-\beta^{(2)}),x),$$

$$(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)}) = \sum_{l=1}^n k_l(\gamma^{(\nu)}-\beta_l^{(\nu)}), \qquad \gamma^{(\nu)} = \mathrm{const}\ge 0.$$

Пусть r — некоторое нецелое число, $[r]$ — целая часть r, $\{r\} = r-[r]$. Определим функциональные пространства, в которых исследуется задача.

$C^r(\gamma,\beta;q;Q)$ — пространство функций u, $(t,x)\in\overline{Q}$, имеющих частные производные в области

$$Q^{(0)} \equiv Q\setminus\Big\{\big((t^{(0)},x),\ x\in D\big)\cup\big((t,x^{(0)}),\ t\in[0,T]\big)\Big\}$$

вида $D_t^jD_x^ku$, $2bj+|k|\le[r]$, и конечное значение величины

$$\|u;\gamma,\beta;q;Q\|_r = \|u;\gamma,\beta;q;Q\|_{[r]} + [|u;\gamma,\beta;q;Q|]_r =$$

$$= \sup_{P\in\overline{Q}}\sum_{2bj+|k|\le[r]} s((2bj+q)\gamma+(k;\gamma-\beta);P)\left|D_t^jD_x^ku(P)\right| +$$

$$+\sum_{l=1}^n\Bigg[\sup_{\{P_1,H_l\}\subset\overline{Q}}\sum_{2bj+|k|=[r]} s\big((2bj+q)\gamma+(k;\gamma-\beta)+\{r\}(\gamma-\beta_l);\tilde{P}_1\big)\left|x_l^{(1)}-x_l^{(2)}\right|^{-\{r\}}\times$$

$$\times\left|D_t^jD_x^ku(P_1)-D_t^jD_x^ku(H_l)\right| + \sup_{\{H_l,N_l\}\subset\overline{Q}}\sum_{2bj+|k|=[r]} s\big((2bj+q+\{r\})\gamma+(k;\gamma-\beta);\tilde{N}_l\big)\times$$

$$\times\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{r/2b\}}\left|D_t^jD_x^ku(H_l)-D_t^jD_x^ku(N_l)\right|\Bigg],$$

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_0 = \sup_{P\in\overline{Q}}|u(P)| = \|u\|_0.$$

Здесь

$$s(q;\tilde{P}_1) = \min(s(q,P_1),s(q,H_l)), \qquad s(q;\tilde{N}_l) = \min(s(q,N_l),s(q,H_l)).$$

$C^r(\mu_k,Q)$ — множество функций v_k, $(t,x)\in\overline{Q}$, имеющих частные производные в $Q^{(0)}$ вида $D_x^\lambda v_k$, $|\lambda|\le[r]$, для которых конечна норма

$$|||v_k;\mu_k;Q|||_r = \sum_{|\lambda|\le[r]}\sup_{P\in\overline{Q}}\Bigg[s((k,\mu_k)+\delta_0^{|k|}\mu_0+|\lambda|;P)\left|D_x^\lambda v_k(P)\right| +$$

$$+\sum_{l=1}^n\Bigg\{\sum_{|\lambda|=[r]}\Bigg[\sup_{\{P_1,H_l\}\subset\overline{Q}} s((k,\mu_k)+\delta_0^{|k|}\mu_0+|\lambda|;\tilde{P}_1)s_2(\{r\},\tilde{x})\left|x_l^{(1)}-x_l^{(2)}\right|^{-\{r\}}\times$$

$$\times \left| D_x^{\lambda} v_k(P_1) - D_x^{\lambda} v_k(H_l) \right| + \sup_{\{N_l, H_l\} \subset \overline{Q}} s((k, \mu_k) + \delta_0^{|k|} \mu_0; \tilde{N}_l) \times$$

$$\times s_1\left(\left\{ \frac{r}{2b} \right\}, \tilde{t} \right) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{r/2b\}} | v_k(H_l) - v_k(N_l) | \Bigg] +$$

$$+ \sup_{\{N_l, P_l\} \subset \overline{Q}} s((k, \mu_k) + \delta_0^{|k|} \mu_0 + |\lambda|; \tilde{N}_l) \times$$

$$\times s_1\left(\frac{\{r\}}{2b}, \tilde{t} \right) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{r\}/2b} \left| D_x^{\lambda} v_k(H_l) - D_x^{\lambda} v_k(N_l) \right| \Bigg\} \Bigg],$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\delta_0^{|k|}$ — символ Кронекера, $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Относительно задачи (1) – (3) предполагаем выполнение условий:

а) коэффициенты уравнения $A_k \in C^{\alpha}(\mu_k, Q)$ при $|k| \le 2b-1$, $A_0 < 0$, $A_k \in C^{\alpha}(\beta, Q)$ при $|k| = 2b$, $b_k^{(i)} \in C^{2b-r_i+\alpha_i}(\Gamma)$ при $|k| < r_i$, $b_k^{(i)} \in C^{2b-r_i+\alpha}(\beta, Q)$ при $|k| = r_i$, $\alpha_i \in (0,1)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha}$ и краевая задача

$$\left[D_t - \sum_{|k|=2b} s((k,\beta); P) A_k(P) D_x^k \right] u(t,x) = g(t,x),$$

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

$$\sum_{|k|=r_i} s((k,\beta); P) b_k^{(i)}(P) D_x^k u \Big|_{\Gamma} = g_i(t,x),$$

равномерно параболическая [4];

б) функции

$$f_0 \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 2b; Q), \quad \varphi \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D), \quad \tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)}), \quad \tilde{\beta}_l = (0, \beta_l^{(2)}),$$

$$l \in \{1, \ldots, n\}, \quad f_i \in C^{2b-r_i+\alpha_i}(\gamma, \beta; r_i; \Gamma), \quad (B_i \varphi)(x)|_{\Gamma} = f_i(0,x),$$

$$\gamma^{(\nu)} = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} \left(1 + \beta_j^{(\nu)}, \max_{|k|<2b} \frac{(k, \mu_k^{(\nu)} - \beta^{(\nu)})}{2b - |k|}, \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b} \right), \quad \nu \in \{1, 2\}.$$

Сформулируем основной результат о разрешимости задачи (1) – (3).

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) – (3) *выполнены условия* а), б). *Тогда существует единственное решение задачи* (1) – (3) *в классе* $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ *и для него справедлива оценка*

$$\| u; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha} \le C \Bigg(\| f_0; \gamma, \beta; 2b; Q \|_{\alpha} + \left\| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D \right\|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \| f_i; \gamma, \beta; r_i; \Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i} \Bigg). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 построим подпоследовательность решений краевых задач с гладкими коэффициентами, пределом которой будет решение задачи (1) – (3).

Оценка решений краевых задач с гладкими коэффициентами. Пусть

$$Q_m = Q \cap \left\{ (t,x) \in Q \mid s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, \ s_2(1,x) \ge m_2^{-1} \right\},$$

$m = (m_1, m_2)$, m_1, m_2 — натуральные числа, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, — последовательность областей, которая при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ сходится к Q,

$$D_m = \left\{x \in D \mid s_2(1, x) \geq m_2^{-1}\right\}, \qquad \Gamma_m = (0, T) \times \partial D_m.$$

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t,x) D_x^k\right] u_m(t,x) = \Psi_m(t,x), \tag{5}$$

$$u_m(0,x) = \Phi_m(x), \tag{6}$$

$$(L_i^{(0)} u_m)(t,x)\big|_\Gamma \equiv \left[\sum_{|k| \leq r_i} b_k^{(i)}(t,x) D_x^k\right] u_m(t,x)\big|_\Gamma = f_i(t,x). \tag{7}$$

Здесь коэффициенты a_k, функции Ψ_m, Φ_m определены следующим образом. Если $(t,x) \in (0,T] \times \overline{D}_m$ и $|k| \leq 2b-1$, $(k, \beta^{(1)}) \geq 0$ при $|k| = 2b$, то

$$a_k(t,x) = \min\left\{A_k(t,x),\ A_k(m_1^{-1}, x)\right\} \quad \text{при} \quad t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$$

и

$$a_k(t,x) = \min\left\{A_k(t,x), \frac{m_1^{-1}(t^{(0)}-t)+1}{2} A_k(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_1^{-1}(t-t^{(0)})+1}{2} A_k(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right\} \quad \text{при} \quad t^{(0)} \geq m_1^{-1}.$$

В случае, когда $(k, \beta^{(1)}) < 0$, при $|k| = 2b$ выберем

$$a_k(t,x) = \max\left\{A_k(t,x),\ A_k(m_1^{-1}, x)\right\} \quad \text{при} \quad t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$$

и

$$a_k(t,x) = \max\left\{A_k(t,x), \frac{m_1^{-1}(t^{(0)}-t)+1}{2} A_k(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_1^{-1}(t-t^{(0)})+1}{2} A_k(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right\} \quad \text{при} \quad t^{(0)} \geq m_1^{-1}.$$

Функции

$$\Psi_m(t,x) = \min\left(f_0(t,x),\ f_0(m_1^{-1}, x)\right) \quad \text{при} \quad t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$$

и

$$\Psi_m(t,x) = \min\left\{f_0(t,x), \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2} f_0(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2} f_0(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right\} \quad \text{при} \quad t^{(0)} \geq m_1^{-1}.$$

При $x \in \overline{D}_m$ функции $\Phi_m(x) = \varphi(x)$.

Для $(t,x) \in Q \setminus \{(0,T) \times D_m\}$ коэффициенты a_k и функции Ψ_m есть решения внутренней задачи

$$D_t u = \Delta u, \qquad u(0,x) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_m} = \psi(t,x),$$

где, например, для a_k берем $\psi = a_k\big|_{\Gamma_m}$, $\vec{n}$ — нормаль к Γ_m. Для $x \in D \setminus D_m$ функция Φ_m является решением внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{\partial D_m} = \varphi(x)|_{\partial D_m}.$$

Введем в пространстве $C^{2b+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m; \gamma, \beta; q; Q\|_{2b+\alpha}$, эквивалентную при каждом фиксированном m_1, m_2 гельдеровой норме, которая определяется так же, как $\|u; \gamma, \beta; q; Q\|_{2b+\alpha}$, только вместо функций $s_1(q_1,t)$, $s_2(q_2,x)$ берем соответственно $d_1(q_1,t)$, $d_2(q_2,t)$, где $d_1(q_1,t) = s_1(q_1,t)$ при $\left|t-t^{(0)}\right| \geq m_1^{-1}$, $d_1(q_1,t) = m_1^{-q_1}$ при $\left|t-t^{(0)}\right| \leq m_1^{-1}$, $d_2(q_2,x) = s_2(q_2,x)$ при $\left|x-x^{(0)}\right| \geq m_2^{-1}$, $d_2(q_2,x) = m_2^{-q_2}$ при $\left|x-x^{(0)}\right| \leq m_2^{-1}$; $d((k,\gamma-\beta); P) = d_1((k,\gamma^{(1)}-\beta^{(1)}),t) \times$ $\times\, d_2((k,\gamma^{(2)}-\beta^{(2)}),x)$.

При налагаемых условиях на гладкость коэффициентов дифференциальных выражений L_1, $L_i^{(0)}$, $i \in \{1,\ldots,b\}$, существует единственное решение задачи (5) – (7), которое принадлежит пространству $C^{2b+\alpha}(Q)$ и имеет при каждом фиксированном m_1, m_2 конечную норму $\|u_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha}$ [5, с. 83] (теорема 7.1). Установим оценку нормы $\|u_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* а), б), *то для решения задачи* (5) – (7) *справедлива оценка*

$$\|u_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha} \leq C\Bigg(\|\Psi_m; \gamma, \beta; 2b; Q\|_\alpha + \left\|\Phi_m; \tilde\gamma, \tilde\beta; 0; D\right\|_{2b+\alpha} + \|u_m\|_0 + $$
$$+ \sum_{i=1}^{b} \|f_i; \gamma, \beta; r_i; \Gamma\|_{2b-r_i+\alpha_i}\Bigg). \tag{8}$$

Постоянная C *не зависит от* m.

Доказательство. Используя определение нормы и интерполяционные неравенства [4, с. 176], имеем

$$\|u_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)[|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|]_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)\|u_m\|_0. \tag{9}$$

Поэтому достаточно оценить $[|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|]_{2b+\alpha}$. Из определения полунормы $[|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|]_{2b+\alpha}$ следует существование в Q точек P_1, H_l, N_l, для которых выполнено одно из неравенств

$$\frac{1}{4}[|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|]_{2b+\alpha} \leq E_1 =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{2bj+|k|=2b} d\big((k,\gamma-\beta) + 2bj\gamma + \alpha(\gamma-\beta_l); \tilde P_1\big)\left|x_l^{(1)} - x_l^{(2)}\right|^{-\alpha} \times$$
$$\times \left|D_t^j D_x^k u_m(P_1) - D_t^j D_x^k u_m(H_l)\right|, \tag{10}$$

$$\frac{1}{4}[|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|]_{2b+\alpha} \leq E_2 =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{2bj+|k|=2b} d\Big((k,\gamma-\beta) + (2bj+\alpha)\gamma; \tilde P_2\Big)\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b} \times$$
$$\times \left|D_t^j D_x^k u_m(H_l) - D_t^j D_x^k u_m(N_l)\right|. \tag{11}$$

Если

$$\left|x_l^{(1)} - x_l^{(2)}\right| \geq \rho d(\gamma-\beta_l; \tilde P_1) \equiv T_1, \quad \rho \in (0,1),$$

то, используя интерполяционные неравенства, имеем

$$E_1 \le \varepsilon^{\alpha}[|u_m;\gamma,\beta;0;Q|]_{2b+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m\|_0.$$

Выбирая $\varepsilon = 16^{-1/\alpha}$ из неравенства (10), находим

$$[|u_m;\gamma,\beta;0;Q|]_{2b+\alpha} \le c\|u_m\|_0. \tag{12}$$

Используя интерполяционные неравенства и неравенство (11) в случае

$$\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \ge \rho^{2b} d(2\beta\gamma;\tilde{N}_l) \equiv T_2,$$

также получаем (12).

Пусть $\left|x_l^{(1)} - x_l^{(2)}\right| \le T_1$ или $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le T_2$. Будем считать, что $\min\{d(\gamma,\tilde{P}_1), d(\gamma,\tilde{N}_l)\} = d(\gamma;P_1)$. Предположим, что $\left|x^{(\nu)} - \xi\right| \ge 2T_1$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\xi \in \partial D$. Запишем задачу (5), (6) в виде

$$D_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) D_x^k u_m = \sum_{|k|=2b} [a_k(P) - a_k(P_1)] D_x^k u_m +$$

$$+ \sum_{|k|<2b} a_k(P) D_x^k u_m + \Psi_m(t,x) \equiv F_1(t,x), \tag{13}$$

$$u_m(0,x) = \Phi_m(x). \tag{14}$$

Пусть $V_1 \in Q$,

$$V_r = \left\{(t,x) \in Q \,\Big|\, \left|t - t^{(1)}\right| \le r^{2b} T_2,\ t \ge 0,\ \left|x_l - x_l^{(1)}\right| \le rT_1,\ l \in \{1,\ldots,n\}\right\}.$$

В задаче (13), (14) выполним замену

$$u_m(t,x) = v_m(t,y),$$

$$y_l = d_1(\beta_l^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_l^{(2)}, x^{(1)}) x_l \equiv d(\beta_l;P_1) x_l,$$

$$l \in \{1,\ldots,n\}.$$

Область определения $v_m(t,y)$ обозначим через Q_1.

Тогда $v_m(t,y)$ будет решением задачи

$$(L_2 v_m)(t,y) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} d((k,\beta);P_1) a_k(P_1) D_y^k\right] v_m(t,y) =$$

$$= F_1(t, d^{-1}(\beta;P_1)y) \equiv F_2(t,Y),$$

$$v_m(0,y) = \Phi_m(Y), \tag{15}$$

где $Y \equiv (d^{-1}(\beta_1;P_1)y_1, \ldots, d^{-1}((\beta_n;P_1)y_n)$.

Обозначим $y_l^{(1)} = d(\beta_l;P_1)x_l^{(1)}$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) = R_1(t^{(1)}, y^{(1)})$,

$$N_r^{(2)} = \left\{(t,y) \in Q \,\Big|\, \left|t - t^{(1)}\right| \le r^{2b} T_2,\ t \ge 0,\ \left|y_l - y_l^{(1)}\right| \le r\rho d(\gamma;P_1),\ l \in \{1,\ldots,n\}\right\},$$

и возьмем функцию $\eta(t,y)$, $2b+1$ раз дифференцируемую и удовлетворяющую условиям

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in N_{1/4}^{(2)}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \notin N_{3/4}^{(2)}, \quad \left|D_t^j D_y^k \eta(t,y)\right| \le C_{jk} d^{-1}((2bj + |k|)\gamma;P_1). \end{cases}$$

Тогда функция $\omega_m(t,y) = v_m(t,y)\eta(t,y)$ будет решением задачи Коши

$$(L_2\,\omega_m)(t,y) = \sum_{|k|=2b} d((k,\beta);P_1)\,a_k(P_1) \sum_{|\lambda|\le|k|-1} C_{|k|}^{|\lambda|} D_y^{k-\lambda}\eta D_y^{\lambda} v_m \,+$$

$$+\; v_m D_t \eta + F_2(t,Y)\eta(t,y) \equiv F_3(t,y), \tag{16}$$

$$\omega_m(0,y) = \Phi_m(Y)\,\eta(0,y) \equiv \varphi_1(y).$$

Заметим, что в силу условия а) коэффициенты уравнения (16) ограничены постоянными, не зависящими от точки P_1. Поэтому в силу теоремы 4.1 из [5, с. 41] для произвольных точек $\{M_1, M_2\} \subset N_{1/4}^{(2)}$ выполняется неравенство

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|D_t^j D_z^k \omega_m(M_1) - D_t^j D_z^k \omega_m(M_2)\right| \le$$

$$\le\; C\Big(\|F_3\|_{C^{\alpha}(N_{3/4}^{(2)})} + \|\varphi_1\|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4}^{(2)}\cap\{t=0\})}\Big), \tag{17}$$

где $d(M_1, M_2)$ — параболическое расстояние между точками M_1 и M_2, а $2bj + |k| = 2b$.

Учитывая свойства функции $\eta(t,y)$ и неравенство $d(\gamma;M) \ge \rho d(\gamma;P_1)/4$ для точек $M \in N_{3/4}^{(2)}$, имеем

$$\|F_3\|_{C^{\alpha}(N_{3/4})} \le cd^{-1}((2b+\alpha)\gamma;P_1)\,\times$$

$$\times\Big(\big\|F_2;\gamma,0;2b;N_{3/4}^{(2)}\big\|_{\alpha} + \big\|v_m;\gamma,0;0;N_{3/4}^{(2)}\big\|_{2b} + \|v_m\|_0\Big), \tag{18}$$

$$\|\varphi_1\|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4}\cap(t=0))} \le cd^{-1}((2b+\alpha)\gamma;P_1)\,\big\|\Phi_m;\tilde\gamma,0;0;N_{3/4}^{(2)}\cap\{t=0\}\big\|_{2b+\alpha}.$$

Из определения пространства $C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ следует выполнение неравенств

$$c_1\big\|v_m;\gamma,0;0;N_{3/4}^{(2)}\big\|_{2b+\alpha} \le \|u_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_{2b+\alpha} \le c_2\big\|v_m;\gamma,0;0;N_{3/4}^{(2)}\big\|_{2b+\alpha}.$$

Подставляя (18) в (17) и возвращаясь к переменным (t,x), получаем неравенство

$$E_\nu \le c\Big(\|F_1;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\|_{\alpha} + \|u_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_{2b} + \|u_m\|_0 \,+$$

$$+\;\big\|\varphi_2;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;V_{3/4}\cap\{t=0\}\big\|_{2b+\alpha}\Big),\quad \nu\in\{1,2\}. \tag{19}$$

Установим оценку нормы $\|F_1;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\|_{\alpha}$. Учитывая интерполяционные неравенства, достаточно оценить полунорму каждого слагаемого выражения $F_1(t,x)$. Например, для

$$\Big[\big|a_k D_x^k u_m;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\big|\Big]_{\alpha} \equiv T_3$$

при $|k| \le 2b-1$ получаем

$$T_3 \le \sum_{l=1}^{n} \sup_{\{B_1,R_l\}\subset V_{3/4}} \Big\{\Big[d((k,\gamma-\beta)+\alpha(\gamma-\beta_l);\tilde B_1)\big|z_l^{(1)}-z_l^{(2)}\big|^{-\alpha}\big|D_z^k u_m(B_1)\,-$$

$$-\;D_z^k u_m(R_l)\big|\Big]\Big[|a_k(B_1)|\,d(2b\gamma-(k,\gamma-\beta);\tilde B_1)\Big] + \Big[|a_k(B_1)-a_k(R_l)|\,\times$$

$$\times\;\big|z_l^{(1)}-z_l^{(2)}\big|^{-\alpha} d(2b\gamma-(k,\gamma-\beta)+\alpha(\gamma-\beta_l);\tilde B_1)\Big]\Big[d((k,\gamma-\beta);\tilde B)\big|D_z^k u_m(B_1)\big|\Big]\Big\} \,+$$

$$+\;\sum_{l=1}^{n} \sup_{\{R_l,B_l\}\subset V_{3/4}} \Big\{\Big[d((k,\gamma-\beta)+\alpha\gamma;\tilde B_2)\big|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\big|^{-\alpha/2b}\big|D_z^k u_m(B_l)-D_z^k u_m(R_l)\big|\Big]\,\times$$

$$\times\ \Big[|a_k(R_l)|d(2b\gamma-(k,\gamma-\beta);\tilde{B}_l)\Big]+\Big[|a_k(R_l)-a_k(B_l)|\big|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\big|^{-\alpha/2b}\ \times$$

$$\times\ d(2b\gamma-(k,\gamma-\beta)+\alpha\gamma;\tilde{B}_l)\Big]\Big[d((k,\gamma-\beta);\tilde{B}_l)\big|D_z^k u_m(B_l)\big|\Big]\Big\}\ \le$$

$$\le\ c\Big([|u_m;\gamma,\beta;0;V_1|]_{|k|+\alpha}+\|u_m\|_0\Big).$$

Аналогично устанавливаются оценки остальных слагаемых выражения $F_1(t,x)$. Следовательно,

$$\|F_1;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}\|_\alpha\ \le\ c\varepsilon_1\|u_m;\gamma,\beta;0;V_1\|_{2b+\alpha}\ +\ c\Big(\|u_m\|_0+\|\Psi_m;\gamma,\beta;2b;V_1\|_\alpha\Big),\tag{20}$$

где $\varepsilon_1\ =\ n^{2b}\rho^{2b}+\varepsilon^\alpha$ — фиксированные вещественные числа, $\varepsilon\in(0,1)$, $\rho\in(0,1)$.

Подставляя (20) в (19), находим

$$E_\nu\ \le\ c\Big(\varepsilon_1\|u_m;\gamma,\beta;0;V_1\|_{2b+\alpha}+\|u_m\|_0\ +$$

$$+\ \|\Psi_m;\gamma,\beta;2b;V_1\|_\alpha+\Big\|\Phi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;V_1\cap\{t=0\}\Big\|_{2b+\alpha}\Big).$$

Отсюда, используя неравенства (10), (11) и выбирая ρ и ε достаточно малыми, получаем

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\ \le\ c\Big(\|\Psi_m;\gamma,\beta;2b;Q\|_\alpha+\Big\|\Phi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\Big\|_{2b+\alpha}+\|u_m\|_0\Big).\tag{21}$$

Пусть $\big|x^{(\nu)}-\xi\big|\ \le\ 2T_1$, $\xi\in\partial D$. Рассмотрим шар $K(r,P)$ радиуса r, $r\ \ge$ $\ge\ 4T_1$, содержащий точки P_1, H_l, N_l, с центром в некоторой точке $P\in\Gamma$. Используя ограничения на гладкость поверхности ∂D, можно распрямить $\partial D\cap K(r,P)$ с помощью взаимно однозначного преобразования $x\ =\ \psi(y)$ [6, с. 126], в результате чего область $\Pi\ =\ Q\cap K(r,P)$ перейдет в область Π_1, для точек которой $y_n\ \ge\ 0$, $t\ \ge\ 0$. Если положить $u_m(t,x)=\zeta_m(t,y)$, $P_\nu\ \equiv\ B_\nu$, $\nu\in$ $\in\{1,2\}$, $H_l\ =\ R_l$, $d(\gamma;P_1)\equiv h(\gamma,B_1)$ и коэффициенты операторов задачи (5) – (7) при этом преобразовании обозначить через $\lambda_k(t,y)$, $l_k^{(i)}(t,y)$, то ζ_m в Π_1 будет решением задачи

$$\Big[D_t-\sum_{|k|=2b}\lambda_k(B_1)D_y^k\Big]\zeta_m(t,y)\ =\ \sum_{|k|=2b}\big[\lambda_k(t,y)-\lambda_k(B_1)\big]D_y^k\zeta_m(t,y)\ +$$

$$+\ \sum_{|k|<2b}\lambda_k(t,y)D_y^k\zeta_m(t,y)\ +\ \Psi_m(t,\psi(y))\ \equiv\ F_4(t,y),\tag{22}$$

$$\zeta_m(0,y)\ =\ \Phi_m(\psi(y))\ \equiv\ \varphi_2(y),\tag{23}$$

$$\sum_{|k|=r_i}\Big[l_k^{(i)}(B_1)D_y^k\zeta_m(t,y)\Big]\Big|_{y_n=0}\ =\ \Bigg[\sum_{|k|=r_i}\Big[l_k^{(i)}(t,y)-l_k^{(i)}(B_1)\Big]D_y^k\zeta_m\ +$$

$$+\ \sum_{|k|<r_i}l_k^{(i)}(t,y)D_y^k\zeta_m+f_i(t,\psi(y))\Bigg]\Bigg|_{y_n=0}\ \equiv\ g_m^{(i)}(t,y)\Big|_{y_n=0}.\tag{24}$$

В задаче (22) – (24) выполним замену $\zeta_m(t,y)\ =\ \omega_m(t,z)$, $z_l\ =\ h(\beta_l;B_1)y_l$, $l\in$ $\in\{1,\ldots,n\}$. Область определения $\omega_m(t,z)$ обозначим через Π_2. Тогда $\omega_m(t,z)$ будет решением задачи

$$(L_3\omega_m)(t,z) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} h((k,\beta);B_1)\lambda_k(B_1)D_z^k\right]\omega_m(t,z) = F_4(t,Z), \tag{25}$$

$$\omega_m(0,z) = \varphi_2(Z), \tag{26}$$

$$(L_i^{(0)}\omega_m)(t,z) \equiv \sum_{|k|=r_i}\left[h((k,\beta);B_1)l_k^{(i)}(B_1)D_z^k\omega_m\right]\Big|_{z_n=0} = g_m^{(i)}(t,Z)\Big|_{z_n=0}, \tag{27}$$

где $Z \equiv (h^{-1}((\beta_1;B_1)z_1, h^{-1}((\beta_2;B_1)z_2,\ldots,h^{-1}((\beta_n;B_1)z_n)$.

Введем обозначения

$$z_l^{(1)} = h(\beta_l;B_1)y_l^{(1)},$$

$$N_\nu^{(1)} = \Big\{(t,z)\in\Pi_2 \,\Big|\, \left|t-t^{(1)}\right| \le \nu^{2b}\rho^{2b}h(2b\gamma;B_1),$$

$$\left|z_l - z_l^{(1)}\right| \le \nu\rho h(\gamma;B_1),\ l\in\{1,\ldots,n\},\ z_n\ge 0,\ t\ge 0\Big\}$$

и возьмем функцию $\eta_1(t,z)$, $2b+1$ раз дифференцируемую и удовлетворяющую условиям

$$\eta_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z)\in N_{1/4}^{(1)}, \quad 0\le \eta_1(t,z)\le 1, \\ 0, & (t,z)\notin N_{3/4}^{(1)}, \quad \left|D_t^jD_z^k\eta_1(t,z)\right| \le C_{jk}h^{-1}\big((2bj+|k|)\gamma;B_1\big). \end{cases}$$

Тогда функция $w_m(t,z) = \eta_1(t,z)\omega_m(t,z)$ будет решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (L_3w_m)(t,z) &= \sum_{|k|=2b} h((k,\beta);B_1)\lambda_k(B_1)\sum_{|p|\le|k|-1} C_{|k|}^{|p|}D_z^{k-p}\eta_1D_z^p\omega_m + \\ &\quad + \omega_mD_t\eta_1 + F_4(t,Z)\eta_1(0,z) \equiv F_5(t,z), \\ w_m(0,z) &= \varphi_2(Z)\eta_1(0,z) \equiv \varphi_3(z), \\ (L_i^{(0)}w_m)(t,z)\Big|_{z_n=0} &= \Bigg[\sum_{|k|=r_i} h((k,\beta);B_1)l_k^{(i)}(B_1)\sum_{|p|<|k|} C_{|k|}^{|p|}D_z^{k-p}\eta_1D_z^p\omega_m + \\ &\quad + g_m^{(i)}(t,Z)\eta_1(t,z)\Bigg]\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_m^{(i)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Коэффициенты уравнения и краевых условий задачи (28), согласно введенным предположениям, ограничены постоянными, не зависящими от точки B_1. Поэтому согласно теореме 7.1 из [5, с. 83] для произвольных точек $\{M_1, M_2\}\subset \subset N_{1/4}^{(1)}$ выполняется неравенство

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|D_\tau^jD_z^kv_m(M_1) - D_\tau^jD_z^kv_m(M_2)\right| \le$$

$$\le C\left(\|F_3\|_{C^\alpha(N_{3/4}^{(1)})} + \|\varphi_3\|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\})} + \sum_{i=1}^{b}\left\|G_m^{(i)}\right\|_{C^{2b-r_i+\alpha_i}(N_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\})}\right). \tag{29}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве оценки (21), и учитывая (12), получаем неравенство (8).

Установим оценку нормы $\|u_m\|_0$. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* u_m *— единственное классическое решение задачи* (5) – (7) *и выполнены условия* а), б). *Тогда для* u_m *выполняется неравенство*

$$\|u_m\|_0 \leq C\Bigg(\|L_1 u_m; \gamma, \beta; 2b; Q\|_\alpha + \left\|u_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\right\|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \left\|L_i^{(0)} u_m; \gamma, \beta; r_i; \Gamma\right\|_{2b-r_i+\alpha_i}\Bigg). \tag{30}$$

Постоянная C *не зависит от* m.

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями, использованными при доказательстве замечания 2 из [7, с. 75]. Предположим, что неравенство (30) не выполняется. Тогда существует последовательность функций $V_n \in C^{2b+\alpha}(Q)$ таких, что $\|V_n\|_0 = 1$, и $V_n(0,x)$, $L_1 V_n$, $L_i^{(0)} V_n$, стремятся к нулю для соответствующих V_n, когда $n \to \infty$. Из (8) следует, что нормы $\|V_n; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha}$ равномерно ограничены. Поэтому существует подпоследовательность $V_{n(j)}$, которая при $j \to \infty$ сходится к решению $V \in C^{2b+\alpha}(Q)$ однородной краевой задачи. Поскольку решение краевой задачи (5) – (7) единственное, то $V = 0$, что противоречит равенству $\|V\|_0 = 1$.

Доказательство теоремы **1.** Отметим, что

$$\|\Psi_m; \gamma, \beta; 2b; Q\|_\alpha \leq c\|f_0; \gamma, \beta; 2b; Q\|_\alpha,$$

$$\left\|\Phi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\right\|_{2b+\alpha} \leq c\left\|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\right\|_{2b+\alpha}.$$

Из этих соотношений и неравенств (30), (8) следует оценка

$$\|u_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2b+\alpha} \leq c\Bigg(\|f_0; \gamma, \beta; 2b; Q\|_\alpha + \left\|\varphi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\right\|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \|f_i; \gamma, \beta; r_i; \Gamma\|_{2b-r_i+\alpha_i}\Bigg). \tag{31}$$

Следовательно, правая часть неравенства (31) не зависит от m_1, m_2, а последовательности

$$\{W_{kj}^{(m)}\} = \left\{d(2bj\gamma + (k, \gamma - \beta); P)\left|D_t^j D_x^k u_m(P)\right|,\ P \in Q\right\}, \quad 2bj + |k| \leq 2b,$$

равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Согласно теореме Арчела существуют подпоследовательности $\{W_{kj}^{(m(l))},\ l \geq 1\}$, равномерно сходящиеся при $l \to \infty$ к W_{kj}. Переходя к пределу при $l \to \infty$ в задаче (5) – (7), получаем, что $u = W_{00}$ — единственное решение задачи (1) – (3), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ и справедлива оценка (4).

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия* а), б), $f_0 \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q)$, $f_i \in C^{2b-r_i+\alpha_i}(\gamma, \beta; 0; \Gamma)$. *Тогда единственное решение задачи* (1) – (3) *в пространстве* $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ *определяется интегралами Стильтьеса с борелевской мерой*

$$u(t,x) = \int_Q \Gamma_1(t, x; d\tau, d\xi) f_0(\tau, \xi) + \int_D \Gamma_2(t, x; d\xi)\varphi(\xi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \int_\Gamma \Gamma_i(t, x; d\tau, d_\xi S) f_i(\tau, \xi). \tag{32}$$

Доказательство. В силу того, что $C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q) \subset C^{\alpha}(\gamma, \beta; 2b; Q)$ и $C^{2b-r_i+\alpha_i}(\gamma, \beta; 0; \Gamma) \subset C^{2b-r_i+\alpha_i}(\gamma, \beta; r_i; \Gamma)$, для $f_0 \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ и $f_i \in$ $\in C^{2b-r_i+\alpha_i}(\gamma, \beta; 0; \Gamma)$ выполняются неравенства

$$\| f_0; \gamma, \beta; 2b; Q \|_{\alpha} \leq C \| f_0; \gamma, \beta; 0; Q \|_{\alpha},$$

$$\| f_i; \gamma, \beta; r_i; \Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i} \leq C \| f_i; \gamma, \beta; 0; \Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i}.$$

Поэтому с учетом теоремы 1 для решения задачи (1) – (3) имеет место оценка

$$\| u; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha} \leq C \Bigg(\| f_0; \gamma, \beta; 0; Q \|_{\alpha} + \| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D \|_{2b+\alpha} + \\ + \sum_{i=1}^{b} \| f_i; \gamma, \beta; 0; \Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i} \Bigg). \tag{33}$$

Будем рассматривать $u(t, x)$ при фиксированном (t, x) как линейный непрерывный функционал на нормированном пространстве

$$C_{\alpha} \equiv C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D) \times C^{2b-r_1+\alpha_1}(\gamma, \beta; 0; \Gamma) \times \ldots \\ \ldots \times C^{2b-r_b+\alpha_b}(\gamma, \beta; 0; \Gamma)$$

с нормой, равной правой части неравенства (33). В силу вложения $C_{\alpha} \subset C$ и теоремы Рисса можно считать, что $u(t, x)$ порождает борелевскую меру $\Gamma(t, x, Z)$, которая определена на σ-алгебре подмножеств Ω области $\overline{Q}$, включая Q и все ее открытые подмножества такие, что значения функционала определяются формулой (32).

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. – М.: Физматгиз, 1963. – 702 с.
2. *Пукальський І. Д.* Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1521 – 1531.
3. *Пукальский И. Д.* Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения // Диференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 12. – С. 1521 – 1531.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 445 с.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
6. *Камынин Л. И., Масленникова В. Н.* Граничные оценки шаудеровского типа решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 1. – С. 83 – 128.
7. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.

Получено 17.02.2004