УДК 517.9

Л. А. Власенко (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина),
Н. А. Перестюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We obtain existence and uniqueness theorems for the impulsive differential algebraic equation $\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u(t))$. The matrix A is allowed to be degenerate. The results are applied to the theory of electric networks.

Одержано теореми існування та єдиності для диференціально-алгебраїчного рівняння $\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u(t))$ з імпульсною дією. Матриця A може бути виродженою. Результати застосовано до теорії електричних ланцюгів.

1. Введение. В пространстве $\mathbf{C}^n$ рассматривается полулинейное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u(t)), \qquad t_0 \le t \le t_0 + T, \qquad t \ne t_k, \tag{1}$$

$$\Delta u\big|_{k=t_k} = u(t_k+0) - u(t_k-0) = Cu(t_k-0), \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Здесь A, B, C — $(n \times n)$-матрицы с, вообще говоря, комплексными коэффициентами; $f\colon [t_0, t_0+T] \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ — заданная функция; моменты времени t_k занумерованы: $t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = t_0 + T$. Будем предполагать, что $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных. Для уравнения (1) с импульсным воздействием (2) зададим начальное условие

$$u(t_0) = u_0. \tag{3}$$

Уравнение (1) с вырожденной матрицей A будем называть *вырожденным* или *дифференциально-алгебраическим* по аналогии с соответствующими линейными и нелинейными уравнениями без импульсного воздействия [1, 2] (см. также библиографию в этих работах). Если матрица A — единичная $(A = E)$, то уравнение (1) будем называть *явным*, в противном случае — *неявным*. Явные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием исследовались в [3].

Известно, что для линейного дифференциально-алгебраического уравнения без импульсного воздействия начальная задача разрешима, если выполнены специальные условия согласования на правую часть уравнения и начальный вектор [4, с. 348 – 351]. Однако при наличии импульсного воздействия (2) этих условий недостаточно. Следующий простой пример показывает, что необходимо потребовать дополнительные ограничения на матрицу C. Пусть уравнение (1) в пространстве $\mathbf{C}^2$ имеет вид

$$u_1'(t) - u_1(t) = 0, \qquad u_2(t) = 0. \tag{4}$$

Вектор u_0 является начальным для уравнения (4), если и только если $u_{02} = 0$ (u_{01}, u_{02} — компоненты вектора u_0). Как показывают несложные вычисления, для разрешимости задачи (4), (2), (3) необходимо также потребовать, чтобы $c_{21}u_{01} = 0$ $(C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^2)$. В данной работе устанавливаются условия однозначной разрешимости задачи (1) – (3).

С уравнением (1) связан пучок матриц $\lambda A + B$. В дальнейшем будем предполагать, что пучок $\lambda A + B$ регулярный, т. е. $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$ [4]. В этом случае можно воспользоваться леммой 3.2. из [5], в силу которой имеем следующее. Пространство $\mathbf{C}^n$ распадается в прямые суммы

$$\mathbf{C}^n = X_1 \dotplus X_2 = Y_1 \dotplus Y_2,$$

где подпространство X_1 — область значений проектора

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\lambda A + B)^{-1} A\, d\lambda,$$

а подпространство Y_1 — область значений проектора

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma A(\lambda A + B)^{-1}\, d\lambda.$$

Контур Γ охватывает все собственные числа пучка $\lambda A + B$. Если пучок матриц $\lambda A + B$ не имеет собственных чисел, то $P_1 = Q_1 = 0$ и $X_1 = Y_1 = \{0\}$. Если $\det A \neq 0$, то $P_1 = Q_1 = E$ и $X_2 = Y_2 = \{0\}$. Далее,

$$AX_j \subset Y_j, \quad BX_j \subset Y_j, \quad j = 1, 2; \tag{5}$$

если $X_1 \neq \{0\}$, то матрица A не вырождается на X_1; если $X_2 \neq \{0\}$, то матрица B не вырождается на X_2, а также

$$AX_1 = Y_1, \quad BX_2 = Y_2. \tag{6}$$

Обозначим

$$P_2 = E - P_1, \quad Q_2 = E - Q_1.$$

Если X_2 нетривиально, то X_2 — подпространство собственных и присоединенных векторов пучка $\mu B + A$ в точке $\mu = 0$ (или пучка $\lambda A + B$ в бесконечно удаленной точке $\lambda = \infty$). Векторы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ образуют *цепочку из собственного и присоединенных векторов пучка* $\mu B + A$ *в точке* $\mu = 0$, если $A\varphi_0 = 0$, $A\varphi_j + B\varphi_{j-1} = 0$, $j = 1, \ldots, k$ [6]. В теории дифференциально-алгебраических уравнений также используют термин *B-жорданова цепочка матрицы A* [1] (определение дано в [7, с. 422]). Наибольшую длину r цепочки из собственного и присоединенных векторов пучка матриц $\mu B + A$ в точке $\mu = 0$ назовем *индексом пучка матриц* $\lambda A + B$ и будем обозначать так: $r = \operatorname{ind}\{A, B\}$. Если $\det A \neq 0$, то положим $\operatorname{ind}\{A, B\} = 0$. Если $r = 1$, то присоединенных векторов нет и X_2 — подпространство собственных векторов матрицы A, соответствующих нулевому собственному числу. В этом случае из первого соотношения в (6) следует $Y_1 = A\mathbf{C}^n$.

2. Основные результаты. В дальнейшем нам понадобится вспомогательная матрица

$$G = AP_1 + BP_2. \tag{7}$$

В случае $\operatorname{ind}\{A, B\} = 1$ матрица G была введена в [8], где установлены и ее свойства. Для произвольного индекса $\operatorname{ind}\{A, B\}$ свойства матрицы G указываются в следующей лемме.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$G = Q_1 A + Q_2 B. \tag{8}$$

Матрица G обратима и

$$GX_j = Y_j, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Матрица

$$F = G^{-1} Q_2 A$$

нильпотентна с индексом нильпотентности $\max\{1, r\}$, *где* $r = \operatorname{ind}\{A, B\}$.

Доказательство. Из свойств (5) следует, что $AP_j = Q_j A$, $BP_j = Q_j B$, $j = 1, 2$, и поэтому матрица G (7) допускает представление (8).

Пусть $Gx = 0$. Значит, $AP_1 x = 0$ и $BP_2 x = 0$. Поскольку A не вырождается на X_1, а B — на X_2, то $P_1 x = 0$ и $P_2 x = 0$. Поэтому $x = 0$ и матрица G обратима. Из (6) следует $GX_1 = AX_1 = Y_1$ и $GX_2 = BX_2 = Y_2$. Таким образом, свойства (9) установлены.

Покажем, что матрица F — нильпотентна. Если $r = 0$, то $Q_2 = 0$. Если $r = 1$, то $Q_2 A = AP_2 = 0$. Значит, если $0 \le r \le 1$, то $F = 0$ является нильпотентной матрицей с индексом нильпотентности 1. Пусть $r \ge 2$. Проверим, что для любого $u \in \mathbf{C}^n$ выполнено соотношение $F^r u = 0$. Если $P_2 u$ — элемент ядра матрицы A, то $Fu = 0$. Предположим, что $P_2 u = \varphi_k \in X_2$, $1 \le k \le r - 1$, и $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \subset X_2$ — цепочка из собственного и присоединенных векторов пучка $\mu B + A$ в точке $\mu = 0$. Тогда

$$Fu = G^{-1} Q_2 A u = G^{-1} A P_2 u = G^{-1} A \varphi_k = -G^{-1} B \varphi_{k-1} = G^{-1} G \varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}.$$

Поэтому $F^{k+1} u = 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Обозначим через Λ класс кусочно-непрерывных на $[t_0, t_0 + T]$ функций с разрывами первого рода при $t = t_k$ и таких, что $Au(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \ne t_k$, $k = 1, \ldots, m$. *Решением уравнения* (1) *с импульсным воздействием* (2) называется функция $u(t) \in \Lambda$, которая удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). *Решение начальной задачи* (1) – (3) есть решение уравнения (1), (2), которое удовлетворяет начальному условию (3). В случае явного уравнения такое определение решения совпадает с определением, данным в [3]. В дальнейшем будем предполагать, что решение является непрерывным слева, т. е. $u(t_k) = u(t_k - 0)$. Если функция f непрерывна, то из определения решения следует, что $Au(t)$ кусочно-непрерывно дифференцируема и ее производная имеет разрывы первого рода в точках $t_1, \ldots, t_m$.

Введем в рассмотрение матрицу

$$S = -G^{-1} Q_1 B.$$

Лемма 2. *Предположим, что пучок матриц* $\lambda A + B$ *регулярен и функция* $f(t, u)$ *непрерывна по совокупности переменных. Функция* $u(t) \in \Lambda$ *удовлетворяет уравнению* (1) *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям*

$$P_1 u(t) = e^{S(t - t_k)} P_1 u(t_k + 0) + \int_{t_k}^{t} e^{S(t-\tau)} G^{-1} Q_1 f(\tau, u(\tau))\, d\tau, \tag{10}$$

$$t_k < t \le t_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

$$\frac{d}{dt}[F P_2 u(t)] + P_2 u(t) = G^{-1} Q_2 f(t, u(t)), \qquad t_0 \le t \le t_0 + T, \qquad t \ne t_1, \ldots, t_m. \tag{11}$$

Доказательство. Уравнение (1) эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$\frac{d}{dt}[Q_j A u(t)] + Q_j B u(t) = Q_j f(t, u(t)), \qquad j = 1, 2.$$

Домножим слева эти уравнения на G^{-1}. Учитывая, что $G^{-1}Q_1A = G^{-1}GP_1 = P_1$ и $G^{-1}Q_2B = G^{-1}GP_2 = P_2$, имеем уравнение

$$\frac{d}{dt}[P_1u(t)] - SP_1u(t) = G^{-1}Q_1f(t, u(t)), \quad t_0 \le t \le t_0 + T, \quad t \ne t_1, \ldots, t_m, \tag{12}$$

и уравнение (11). Используя формулу вариации постоянных для уравнения (12) на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, получаем, что функция $u(t) \in \Lambda$ удовлетворяет уравнению (12), если и только если она удовлетворяет уравнениям (10).

Лемма доказана.

Рассмотрим случай линейного уравнения

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = g(t), \quad t_0 \le t \le t_0 + T, \quad t \ne t_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Пусть $\nu = \max\{1, r\}$ и $F^jG^{-1}Q_2g(t) \in C^j([t_0, t_0 + T], \mathbf{C}^n)$, $j = 0, \ldots, \nu - 1$. Здесь $C^0([t_0, t_0 + T], \mathbf{C}^n) = C([t_0, t_0 + T], \mathbf{C}^n)$. Обозначим

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}[F^jG^{-1}Q_2g(t)], \qquad I(t_k, t) = \int_{t_k}^{t} e^{S(t-\tau)}G^{-1}Q_1g(\tau)d\tau.$$

Укажем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (13), (2), (3).

Теорема 1. *Предположим, что пучок матриц* $\lambda A + B$ *регулярен и* $F^jG^{-1}Q_2g(t) \in C^j([t_0, t_0 + T], \mathbf{C}^n)$, $j = 0, \ldots, \nu - 1$. *Задача* (13), (2), (3) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$P_2 \sum_{j=0}^{k} S_{k,j}w_j = \Phi(t_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{14}$$

где

$$w_0 = u_0, \quad w_j = (E + C)\big(I(t_{j-1}, t_j) + \Phi(t_j)\big), \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$S_{k,j} = \prod_{p=j+1}^{k}(E + C)e^{S(t_p - t_{p-1})}P_1, \quad 0 \le j < k, \quad S_{k,k} = E, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{15}$$

При этом задача (13), (2), (3) *имеет единственное решение и это решение представимо в виде*

$$u(t) = e^{S(t-t_k)}P_1 \sum_{j=0}^{k} S_{k,j}w_j + I(t_k, t) + \Phi(t), \quad t_k < t \le t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Символ $\prod_{j=1}^{k} S_j$ произведения матриц S_j мы понимаем как

$$\prod_{j=1}^{k} S_j = S_kS_{k-1}\ldots S_1.$$

***Замечание* 1.** Условие (14) при $k = 0$ имеет вид

$$P_2u_0 = \Phi(t_0). \tag{17}$$

Это есть условие согласования на начальный вектор u_0 в (3) и правую часть $g(t)$ уравнения (13). Оно возникает из-за вырождения матрицы A. Подобное условие хорошо известно для вырожденного уравнения без импульсного воздействия (см., например, [1, 4, 5]). В случае импульсного воздействия (2) появляются дополнительные условия согласования (14) при $k = 1, \ldots, m$ на матрицу C, начальный вектор u_0 и правую часть $g(t)$. Для явного уравнения этих условий нет [3]. Их наличие также обусловлено вырожденностью матрицы A.

***Доказательство теоремы* 1.** Воспользуемся леммой 2 для уравнения (13). В случае $f(t, u) = g(t)$ соотношения (10) и (11) принимают вид

$$P_1 u(t) = e^{S(t-t_k)} P_1 u(t_k + 0) + I(t_k, t), \quad t_k < t \le t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}[F P_2 u(t)] + P_2 u(t) = G^{-1} Q_2 g(t), \quad t_0 \le t \le t_0 + T, \quad t \ne t_1, \ldots, t_m. \tag{19}$$

Поскольку в силу леммы 1 матрица F нильпотентна с индексом нильпотентности ν, из (19) последовательно находим

$$F^{\nu-i} P_2 u(t) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j}[F^{\nu-i+j} G^{-1} Q_2 g(t)], \quad i = 1, \ldots, \nu.$$

Отсюда при $i = \nu$ и из (18) следует, что любая функция $u(t) = P_1 u(t) + P_2 u(t) \in \Lambda$, удовлетворяющая уравнению (13), представима в виде

$$u(t) = e^{S(t-t_k)} P_1 u(t_k + 0) + I(t_k, t) + \Phi(t), \quad t_k < t \le t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{20}$$

Эта функция однозначно определяется значениями $u(t_0 + 0), u(t_1 + 0), \ldots$ $\ldots, u(t_m + 0)$. Для разрешимости уравнения (13) в классе функций Λ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$P_2 u(t_k + 0) = \Phi(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Используя (20) в точках $t_1, \ldots, t_m$, а также импульсные воздействия (2), получаем

$$u(t_k + 0) = (E + C) u(t_k - 0) =$$

$$= (E + C)\left(e^{S(t_k - t_{k-1})} P_1 u(t_{k-1} + 0) + I(t_{k-1}, t_k) + \Phi(t_k)\right), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Отсюда последовательно для $k = 1, \ldots, m$ находим

$$u(t_k + 0) = \sum_{j=0}^{k} S_{k,j} w_j,$$

где матрицы $S_{k,j}$ и векторы w_j определяются по формулам (15). Подставляя эти значения в (21), получаем условия (14), а подставляя их в (20), получаем решение начальной задачи (13), (2), (3) в виде (16).

Теорема доказана.

В приводимом ниже следствии из теоремы 1 устанавливаются ограничения на матрицу C, которые обеспечивают выполнение условий (14).

Следствие. *Предположим, что* $F^j G^{-1} Q_2 g(t) \in C^j([t_0, t_0 + T], \mathbf{C}^n)$, $j = 0, \ldots, \nu - 1$, *и*

$$C X_1 \subset X_1. \tag{22}$$

Задача (13), (2), (3) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнены соотношения* (17) *и соотношения*

$$P_2 C \Phi(t_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{23}$$

Решение задачи (13), (2), (3) *единственно и представимо в виде* (16).

***Замечание* 2.** Условие (22) эквивалентно условию

$$P_2 C P_1 = 0. \tag{24}$$

Для доказательства следствия заметим, что в силу (22) (или (24)) $P_2 S_{k,j} = 0$ для $j < k$ и $P_2 S_{k,k} w_k = \Phi(t_k) + P_2 C \Phi(t_k)$. Поэтому соотношения (14) принимают вид (23).

Покажем применение теоремы 1 и следствия из нее на следующем примере.

***Пример* 1.** В пространстве $\mathbf{C}^3$ рассмотрим уравнение (13) вида

$$u_1'(t) + u_1(t) = g_1(t), \qquad u_3'(t) + u_2(t) = g_2(t), \qquad u_3(t) = g_3(t),$$
$$t_0 \le t \le t_0 + T, \qquad t \ne t_k, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Здесь $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^{tr}$, $g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))^{tr}$. В данном случае $\operatorname{ind}\{A, B\} = 2$, $P_1 = Q_1 = \operatorname{diag}\{1, 0, 0\}$, $P_2 = Q_2 = \operatorname{diag}\{0, 1, 1\}$, $G = E$, $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $f_{23} = 1$, остальные элементы матрицы F равны нулю, $S = \operatorname{diag}\{-1, 0, 0\}$, $\Phi(t) = (0, g_2(t) - g_3'(t), g_3(t))^{tr}$, $I(t_k, t) = \left(\int_{t_k}^t e^{\tau - t} g_1(\tau) d\tau, 0, 0\right)^{tr}$, $e^{St} = \operatorname{diag}\{e^{-t}, 0, 0\}$, $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^{tr}$. Условие согласования (17) на правую часть уравнения и начальный вектор имеет вид

$$u_{02} = g_2(t_0) - g_3'(t_0), \qquad u_{03} = g_3(t_0).$$

Условие согласования (14) при $k = 1$ записывается как

$$c_{p1} e^{t_0 - t_1} u_{01} + c_{p1} \int_{t_0}^{t_1} e^{\tau - t_1} g_1(\tau) d\tau + c_{p2}(g_2(t_1) - g_3'(t_1)) + c_{p3} g_3(t_1) = 0, \quad p = 2, 3,$$

а при $k > 1$ — как

$$(c_{11} + 1)^{k-1} e^{t_0 - t_k} c_{p1} u_{01} + c_{p1} \sum_{j=1}^{k-1} e^{t_j - t_k} (c_{11} + 1)^{k-j-1} \times$$
$$\times \left[(c_{11} + 1) \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\tau - t_j} g_1(\tau) d\tau + c_{12}(g_2(t_j) - g_3'(t_j)) + c_{13} g_3(t_j) \right] +$$
$$+ c_{p1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\tau - t_k} g_1(\tau) d\tau + c_{p2}(g_2(t_k) - g_3'(t_k)) + c_{p3} g_3(t_k) = 0,$$
$$k = 2, \dots, m, \qquad p = 2, 3.$$

В частном случае (22), т. е. когда

$$c_{21} = c_{31} = 0,$$

условия согласования (23) принимают вид

$$c_{p2}(g_2(t_k) - g_3'(t_k)) + c_{p3} g_3(t_k) = 0, \qquad k = 1, \dots, m, \qquad p = 2, 3.$$

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение (1).

Теорема 2. *Пусть пучок матриц* $\lambda A + B$ *регулярен. Предположим, что функция* $f(t, u) : [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ *непрерывна по* t, *удовлетворяет условию Липшица по* u *с константой, не зависящей от* t, *проекция* $Q_2 f(t, u) = h(t)$ *не зависит от* u, $F^j G^{-1} h(t) \in C^j([t_0, t_0 + T], \mathbf{C}^n)$, $j = 0, \dots, \nu - 1$, *и выполнено условие* (22). *Задача* (1), (2), (3) *разрешима, и притом однозначно, тогда и только тогда, когда функция*

$$\Psi(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[F^j G^{-1}h(t)\right]$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$P_2 u_0 = \Psi(t_0), \tag{25}$$

$$P_2 C\Psi(t_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{26}$$

Заметим, что если функция $f(t, u)$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по u, то эта функция непрерывна по совокупности переменных.

Доказательство. Применим лемму 2. Уравнение (11) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[FP_2u(t)\right] + P_2u(t) = G^{-1}h(t).$$

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$P_2 u(t) = \Psi(t).$$

Уравнения (10) принимают вид

$$P_1 u(t) = e^{S(t-t_k)}P_1u(t_k+0) + \int_{t_k}^{t} e^{S(t-\tau)}G^{-1}Q_1 f(\tau, P_1u(\tau) + \Psi(\tau))\,d\tau, \tag{27}$$

$$t_k < t \le t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

На отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ существует единственное решение $P_1 u(t)$ интегрального уравнения (27), удовлетворяющее заданному начальному условию $P_1 u(t_k + 0)$. Поэтому для заданных $u(t_k + 0)$ существует единственная функция $u(t) \in \Lambda$, удовлетворяющая уравнению (1). Уравнение (1) эквивалентно интегральным уравнениям

$$u(t) = e^{S(t-t_k)}P_1u(t_k+0) + \int_{t_k}^{t} e^{S(t-\tau)}G^{-1}Q_1 f(\tau, u(\tau))\,d\tau + \Psi(t), \tag{28}$$

$$t_k < t \le t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Ограничения

$$P_2 u(t_k + 0) = \Psi(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{29}$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости уравнения (1) в классе функций Λ. Отсюда при $k = 0$ следует, что начальный вектор u_0 в (3) должен удовлетворять (25). С учетом импульсных воздействий (2) при нахождении $u(t_{k+1} - 0)$ из (28) при $k = 0, 1, \ldots, m-1$, а также с учетом ограничения (22) соотношения (29) при $k = 1, \ldots, m$ принимают вид (26).

Теорема доказана.

В теореме 2 мы предполагали, что компонента $Q_2 f(t, u)$ не зависит от u. Для явного уравнения это требование выполнено, так как $Q_2 = 0$. В приводимой ниже теореме 3 мы отказываемся от этого ограничения, однако дополнительно требуем, чтобы $\operatorname{ind}\{A, B\} \le 1$. Введем множества векторов

$$U_k = \{u \in \mathbf{C}^n : Q_2 B u = Q_2 f(t_k, u)\}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что если $\det A \ne 0$ (значит, $P_2 = Q_2 = 0$), то множества U_k совпадают со всем пространством $\mathbf{C}^n$.

Теорема 3. *Пусть пучок* $\lambda A + B$ *регулярен и* $\operatorname{ind}\{A, B\} \le 1$. *Предполо-*

жим, что функция $f(t, u)\colon [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ *непрерывна по* t *и ее проекции* $Q_1 f(t, u)$, $Q_2 f(t, u)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$\| Q_i [f(t, u) - f(t, v)] \| \le M_i \| u - v \|, \quad i = 1, 2,$$

с константой M_2 *такой, что*

$$M_2 \| G^{-1} \| < 1. \tag{30}$$

Пусть также выполнены условие согласования на начальный вектор u_0 *в* (3) *и правую часть уравнения* (1)

$$Q_2 B u_0 = Q_2 f(t_0, u_0) \tag{31}$$

и включения

$$(E + C) U_k \subset U_k, \quad k = 1, \dots, m. \tag{32}$$

Тогда существует единственное решение начальной задачи (1) – (3).

***Замечание* 3.** Дополнительное ограничение (30) на константу Липшица M_2 возникает из-за вырожденности матрицы A и существенно используется при доказательстве теоремы существования для уравнения без импульсного воздействия (см. теорему 1 из [9]). Если $\operatorname{ind}\{A, B\} = 0$, т. е. уравнение (1) — невырожденное, то условия (30), (31), (22), (32) выполняются. Нетрудно привести примеры, когда не выполнено условие (30) и задача (1) – (3) либо не имеет решения, либо неоднозначно разрешима.

***Доказательство теоремы* 3.** Используя каноническую форму регулярного пучка матриц $\lambda A + B$ [4, с. 332 – 335] в случае, когда $\operatorname{ind}\{A, B\} \le 1$, получаем условие (H) из [9]: $\| (\lambda A + B)^{-1} \| \le C_2$, $|\lambda| \ge C_1$. Для заданного $u(t_k + 0)$ такого, что

$$B u(t_k + 0) - f\big(t_k, (t_k + 0)\big) \in A \mathbf{C}^n = Y_1, \tag{33}$$

в силу теоремы 1 из [9] существует единственное решение $u(t)$ уравнения (1) на $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, m$. Для этого решения из второго соотношения в (6) из [9] имеем $P_2 u(t) = G^{-1} Q_2 f\big(t, u(t)\big)$, в частности, $u(t_{k+1} - 0) \in U_{k+1}$. Заметим, что теорема 1 из [9] остается справедливой, если начальный момент времени есть произвольное вещественное число; в условиях и в утверждении теоремы следует начальный момент времени $t = 0$ заменить этим числом. Поскольку (31) есть (33) при $k = 0$, существует единственное решение задачи (1), (3) на $[t_0, t_1]$. В силу условия (2) в точке t_1 должно выполняться соотношение $u(t_1 + 0) = (E + C) u(t_1 - 0)$. Из (33) при $k = 1$ следует, что $u(t_1 + 0) \in U_1$. Поэтому (33) выполняется при $k = 1$. Следовательно, существует единственное решение уравнения (1) на отрезке $[t_1, t_2]$ с начальным вектором $u(t_1 + 0) = (E + C) u(t_1 - 0)$. Чтобы завершить доказательство теоремы, последовательно для $k = 2, \dots, m$ устанавливаем существование решения уравнения (1) на интервалах $[t_k, t_{k+1}]$ с начальным условием $u(t_k + 0) = (E + C) u(t_k - 0)$.

***Пример* 2.** В пространстве $\mathbf{C}^2$ рассмотрим уравнение

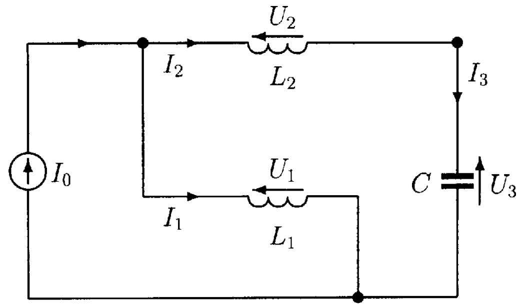
$$u_1'(t) + u_1(t) = f_1(t, u_1, u_2), \qquad u_2(t) = f_2(t, u_2). \tag{34}$$

Здесь $u = (u_1, u_2)^{tr}$, $A = \operatorname{diag}\{1, 0\}$, $B = E$, $\operatorname{ind}\{A, B\} = 1$, $P_1 = Q_1 = \operatorname{diag}\{1, 0\}$, $P_2 = Q_2 = \operatorname{diag}\{0, 1\}$, $G = G^{-1} = E$, $f(t, u) = \big(f_1(t, u_1, u_2), f_2(u_2)\big)^{tr}$. Пусть $f_1(t, u_1, u_2)$ непрерывна по t и по u_1, u_2 удовлетворяет условию Липшица, $f_2(t, u_2)$ непрерывна по t и по u_2 удовлетворяет условию Липшица с константой, меньшей единицы. Обозначим через a_k решение уравнения $a_k = f_2(t_k, a_k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Множества U_k состоят из векторов вида $(z, a_k)^{tr}$, где z пробегает $\mathbf{C}$. Условия (32) будут выполнены, если вторая строка матрицы C нулевая. В силу теоремы 3 для любого вектора $u_0 = (z, a_0)^{tr}$, $z \in \mathbf{C}$, существует единственное решение задачи (34), (2), (3).

В теоремах 1 – 3 мы ограничились случаем непрерывных функций $g(t)$ и $f(t, u)$. Аналогично рассматривается случай кусочно-непрерывных по t функций, которые имеют разрывы первого рода в точках $t_1, \ldots, t_m$.

Мы исследовали уравнения (1) и (13) в комплексном пространстве. Рассуждая, как в разделе 6 работы [10], можно рассмотреть эти уравнения в вещественном пространстве.

3. Пример из физики. Рассмотрим электрический двухполюсник, изображенный на рисунке. На вход подается ток I_0 (считается заданным). На внутренних ветвях расположены индуктивности L_1, L_2 и емкость C, на которых токи и напряжения обозначаются через I_1, I_2, I_3 и U_1, U_2, U_3 соответственно. Токи и напряжения удовлетворяют законам Кирхгофа



$$U_1 - U_2 - U_3 = 0, \qquad I_3 - I_2 = 0, \qquad I_1 + I_2 - I_0 = 0, \tag{35}$$

а также уравнениям

$$U_j = \frac{d}{dt}(L_j I_j) + \varphi_j(I_j), \qquad j = 1, 2,$$

$$I_3 = \frac{d}{dt}(CU_3) + \varphi_3(U_3), \qquad L_1, L_2, C > 0. \tag{36}$$

Нелинейные функции $\varphi_k(I_k)$, $k = 1, 2$, соответствуют омическим потерям напряжений в индуктивностях, $\varphi_3(U_3)$ — утечке тока в емкости. Внутреннее состояние электрической цепи охарактеризуем вектором $u = (u_1, u_2, u_3)^{tr} = (I_1, I_2, I_3)^{tr}$, состоящим из „энергетических" компонент электрической цепи. С помощью (35), (36) получаем систему трех дифференциально-алгебраических уравнений относительно этих компонент

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(L_1 I_1 - L_2 I_2) - U_3 = \varphi_2(I_2) - \varphi_1(I_1), \\ \frac{d}{dt}(CU_3) - I_2 = -\varphi_3(U_3), \qquad I_1 + I_2 = I_0(t).\end{gathered} \tag{37}$$

Уравнения (37) в векторной форме имеют вид (1), где

$$A = \begin{pmatrix} L_1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(t, u) = \begin{pmatrix} \varphi_2(u_2) - \varphi_1(u_1) \\ -\varphi_3(u_3) \\ I_0(t) \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что в моменты времени $t_1 < \ldots < t_m$ внутренние токи и напряжения подвергаются импульсным воздействиям, физическими причинами которых могут являться скачки параметров индуктивностей и емкости. Входной ток $I_0(t)$ всюду непрерывен из-за достаточной мощности входного источника. В силу третьего уравнения в (37) скачки токов не могут быть произвольными, они должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta I_1 \big|_{t=t_k} + \Delta I_2 \big|_{t=t_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Учитывая определение вектора u и импульсные воздействия (2), имеем

$$(1, 1, 0) C u(t_k - 0) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Для выполнения этого соотношения от матрицы $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ естественно потребовать, чтобы $(1, 1, 0)C = 0$ или

$$c_{2j} = -c_{1j}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{38}$$

Пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен. С помощью непосредственных вычислений получаем

$$(\lambda A + B)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 C(L_1 + L_2) + 1} \begin{pmatrix} \lambda C & 1 & \lambda^2 L_2 C + 1 \\ -\lambda C & -1 & \lambda^2 L_1 C \\ -1 & \lambda(L_1 + L_2) & \lambda L_1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} & \dfrac{-L_2}{L_1 + L_2} & 0 \\ \dfrac{-L_1}{L_1 + L_2} & \dfrac{L_2}{L_1 + L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} L_1 & -L_2 & 0 \\ -\dfrac{L_1}{L_1 + L_2} & -\dfrac{L_1}{L_1 + L_2} & C \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L_1 + L_2} & 0 & \dfrac{L_2}{L_1 + L_2} \\ -\dfrac{1}{L_1 + L_2} & 0 & \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} \\ 0 & \dfrac{1}{C} & \dfrac{L_1}{C(L_1 + L_2)} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{ind}\{A, B\} = 1$. Имеем

$$Q_2 f(t, u) = h(t) = \frac{I_0(t)}{L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -L_1 \\ L_1 + L_2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = G^{-1}h(t) = \frac{I_0(t)}{L_1 + L_2}\begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют условию Липшица. Зададим начальное состояние цепи $I_1(t_0)$, $I_2(t_0)$, $U_3(t_0)$ так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$I_1(t_0) + I_2(t_0) = I_0(t_0).$$

Это соотношение дает условие согласования (25). Из (38) следует $P_2 C = 0$. Поэтому условия (26) выполнены. В силу теоремы 2 мы однозначно находим токи $I_1(t)$, $I_2(t)$ и напряжение $U_3(t)$, причем $I_1(t)$, $I_2(t)$ кусочно-непрерывны, $(L_1 I_1 - L_2 I_2)$, $U_3(t)$ кусочно-непрерывно дифференцируемы. Ток $I_3(t)$ находим из третьего уравнения в (36). Если дополнительно потребовать, чтобы $I_0(t) \in C^1[t_0, t_0 + T]$, то $I_1(t)$, $I_2(t)$ будут кусочно-непрерывно дифференцируемыми. Напряжения $U_1(t)$, $U_2(t)$ находим из первого и второго уравнений в (36).

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 296 с.
2. *März R.* Progress in handling differential algebraic equations // Ann. Numer. Math. – 1994. – **1**. – P. 279 – 292.
3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore etc.: World Sci., 1995. – 462 p.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996 – 2010.
6. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 1. – С. 11 – 14.
7. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
8. *Vlasenko L.* Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications // Math. Meth. in Appl. Sci. – 2000. – **23**, № 10. – P. 937 – 948.
9. *Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Об однозначной разрешимости одного вырожденного функционально-дифференциального уравнения // Допов. НАН України. – 2003. – № 3. – С. 11 – 16.
10. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // Nonlinear Anal. TMA. – 2003. – **55**, № 1-2. – P. 125 – 139.

Получено 29.01.2004