УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

КОНГРУЕНЦІЇ ПЕРЕСТАВНОЇ ІНВЕРСНОЇ НАПІВГРУПИ СКІНЧЕННОГО РАНГУ

The structure of any congruence of a permutable inverse semigroup of a finite rank is described.

Описано будову будь-якої конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу.

Як відомо, будь-які дві конгруенції на групі переставні відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень. Очевидно, що відповідна властивість має місце і для тих алгебраїчних структур, до складу яких входить групова структура (кільця, модулі та інше). До класу бінарних алгебр з переставними конгруенціями також належать еквазігрупи і скінченні квазігрупи. Що стосується теорії напівгруп, то тут відомі хіба що класи напівгруп з переставними конгруенціями (напівгрупи Брандта, всі види скінченних симетричних напівгруп, напівгрупи ендоморфізмів, а також часткових автоморфізмів скінченної лінійно впорядкованої множини та інші). У статті [1] знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб антигрупа скінченного рангу була переставною (означення див. в п. 1). Дана стаття є суттєвим узагальненням результату роботи [1]. У ній (п. 4, теорема 4) з'ясовується будова будь-якої конгруенції переставної інверсної напівгрупи з нулем скінченного рангу.

1. Основна термінологія і позначення. Напіврешітку S називають напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з S не перевищує n.

Нехай P — впорядкована множина скінченної довжини з найменшим елементом 0. Точна верхня межа довжин ланцюжків, що з'єднують 0 і елемент x, називається висотою елемента x і позначається через $h(x)$.

Нехай S — довільна напівгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\operatorname{rank}: S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких елементів a і $b \in S$ виконується нерівність

$$\operatorname{rank}(a \cdot b) \leq \min\{\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b)\}.$$

Число $\operatorname{rank}(a)$ називається рангом елемента a.

Напівгрупу називають ***переставною,*** якщо будь-які дві конгруенції на ній переставні відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп і теорії інверсних напівгруп можна знайти відповідно в монографіях [2, 3].

2. Рангова функція і її основні властивості. В цьому пункті введемо рангову функцію на інверсній напівгрупі, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину, і встановимо основні її властивості. Для цього спочатку дамо визначення рангу елемента напіврешітки скінченної довжини.

Отже, нехай P — напіврешітка скінченної довжини. За означенням $\operatorname{rank}(a) = h(a)$ (де $h(a)$ — висота елемента a).

Лема 1. *Щойно визначена функція* $\operatorname{rank}: P \to N_0$ *є ранговою.*

Це легко перевірити.

Лема 2. *Якщо* $a < b$, *то* $\operatorname{rank}(a) < \operatorname{rank}(b)$.

Доведення. Легко перевіряється.

Далі, нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину.

Означення. *Нехай* a — *довільний елемент напівгрупи* S, *тоді* (*за означенням*) $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(a \cdot a^{-1})$.

Тепер нам потрібно довести, що $\operatorname{rank}: S \to N_0$ дійсно є ранговою функцією на інверсній напівгрупі S.

Для цього доведемо кілька лем.

Лема 3. *Нехай A і B — напіврешітки скінченної довжини, $f: A \to B$ — сюр'єктивний гомоморфізм. Тоді для будь-якого $b \in B$ піднапіврешітка $f^{-1}(b)$ має найменший елемент.*

Доведення. Нехай $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — максимальний (очевидно, що такий існує) ланцюжок, який включається в $f^{-1}(b)$. Тоді a_1 — мінімальний елемент в $f^{-1}(b)$, а отже, a_1 — найменший елемент в $f^{-1}(b)$.

Лема 4. *Нехай A і B — напіврешітки скінченної довжини, $f: A \to B$ — сюр'єктивний гомоморфізм. Якщо $b_1 < b_2$ (де $b_1 \in B$ і $b_2 \in B$), то існують $a_1 \in A$ і $a_2 \in A$ такі, що $a_1 < a_2$ і $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$.*

Доведення. За попередньою лемою в піднапіврешітці $f^{-1}(b_1)$ є найменший елемент. Позначимо його через a_1. Нехай a_2 — довільний елемент з множини $f^{-1}(b_2)$. Оскільки $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2) = b_1 \cdot b_2 = b_1$, то $a_1 \cdot a_2 \in f^{-1}(b_1)$. Елемент a_1 є найменшим у $f^{-1}(b_1)$, тому $a_1 \le a_1 \cdot a_2$. З останньої нерівності легко випливає $a_1 \le a_2$. Оскільки $a_1 \ne a_2$, то $a_1 < a_2$.

Лема 5. *Нехай A і B — напіврешітки скінченної довжини, $f: A \to B$ — сюр'єктивний гомоморфізм. Тоді для будь-якого $a \in A$ виконується нерівність* $\operatorname{rank}(f(a)) \le \operatorname{rank}(a)$.

Доведення. Оскільки B — напіврешітка скінченної довжини, то в ній є найменший елемент 0. Нехай $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < f(a) = b_n$ — максимальний (за кількістю елементів) ланцюжок, що з'єднує 0 і $f(a)$. У піднапіврешітках $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(b_1)$, $f^{-1}(b_2), \ldots, f^{-1}(b_{n-1})$ вибираємо найменші елементи, відповідно $0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$. За лемою 4 це ланцюжок $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$, довжина якого дорівнює $n-1$. Тому ланцюжок $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a$ має довжину n. Отже, $\operatorname{rank}(f(a)) \le \operatorname{rank}(a)$.

Теорема 1. *Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Тоді функція* $\operatorname{rank}: S \to N_0$ *(вона визначена в п. 2) є ранговою.*

Доведення. Нехай a і b — довільні елементи, що належать S. Спочатку доведемо, що $\operatorname{rank}(a \cdot b) \le \operatorname{rank}(a)$. Дійсно, за означенням

$$\operatorname{rank}(ab) = \operatorname{rank}(a\,bb^{-1}a^{-1}).$$

Оскільки $abb^{-1}a^{-1} \le aa^{-1}$, то (за лемою 2) $\operatorname{rank}(abb^{-1}a^{-1}) \le \operatorname{rank}(aa^{-1})$. Отже,

$$\operatorname{rank}(ab) = \operatorname{rank}(abb^{-1}a^{-1}) \le \operatorname{rank}(aa^{-1}) = \operatorname{rank}(a).$$

Тепер доведемо, що $\operatorname{rank}(ab) \le \operatorname{rank}(b)$.

За означенням $\operatorname{rank}(ab) = \operatorname{rank}(abb^{-1}a^{-1})$. Відомо (і це легко перевірити), що функція $f_a: e \mapsto aea^{-1}$ є ендоморфізмом напіврешітки E — ідемпотентів напівгрупи S. Зокрема, $f_a: bb^{-1}E \mapsto abb^{-1}a^{-1}E$ — сюр'єктивний гомоморфізм з ідеалу $bb^{-1}E$ на ідеал $abb^{-1}a^{-1}E$, причому $f_a(bb^{-1}) = abb^{-1}a^{-1}$. За лемою 5 $\operatorname{rank}(f_a(bb^{-1})) \le \operatorname{rank}(bb^{-1})$ або $\operatorname{rank}(abb^{-1}a^{-1}) \le \operatorname{rank}(bb^{-1})$. Отже, $\operatorname{rank}(ab) = \operatorname{rank}(abb^{-1}a^{-1}) \le \operatorname{rank}(bb^{-1}) = \operatorname{rank}(b)$. Таким чином, функція rank є ранговою.

Тепер відмітимо кілька основних властивостей рангової функції.

Лема 6. *Для будь-якого $a \in S$* $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(a^{-1})$.

Доведення. Маємо

$$\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(aa^{-1}a) \le \operatorname{rank}(aa^{-1}) \le \operatorname{rank}(a^{-1}).$$

З іншого боку,

$$\operatorname{rank}(a^{-1}) = \operatorname{rank}(a^{-1}aa^{-1}) \le \operatorname{rank}(aa^{-1}) \le \operatorname{rank}(a).$$

Таким чином, $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(a^{-1})$.

Лема 7. *Для будь-якого* $a \in S$ $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(a^{-1}a)$.

Доведення. Справді, $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(a^{-1}) = \operatorname{rank}(a^{-1}a)$.

Лема 8. *Якщо* $a < b$ $(a \in S,\ b \in S)$, *то* $\operatorname{rank}(a) < \operatorname{rank}(b)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що $aa^{-1} < bb^{-1}$. По-перше, зрозуміло, що $aa^{-1} \le bb^{-1}$. Оскільки за умовою $a < b$, то $a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}$. Звідси $a^{-1}ba^{-1}b = a^{-1}b$, тобто $a^{-1}b$ — ідемпотент. Припустимо, що $aa^{-1} = bb^{-1}$, тоді $b = aa^{-1}b$. Оскільки $a^{-1}b$ — ідемпотент, то $b \le a$. Суперечність. Таким чином, $aa^{-1} < bb^{-1}$. Далі,

$$\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(aa^{-1}) < \operatorname{rank}(bb^{-1}) = \operatorname{rank}(b).$$

Отже, $\operatorname{rank}(a) < \operatorname{rank}(b)$.

3. Необхідна і достатня умова лінійної впорядкованості ідеалів. Відомо [4] (теорема 4), що ідеали переставної напівгрупи утворюють ланцюжок відносно включення. Оскільки далі мова йтиме про переставні інверсні напівгрупи, то для нас важливо встановити необхідні і достатні умови для того, щоб ідеали такої напівгрупи були лінійно впорядкованими.

Спочатку домовимося про термінологію.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Очевидно, що підмножина $I_k = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le k\}$ напівгрупи S є ідеалом. Назвемо такий ідеал *ранговим*.

Будемо говорити, що напівгрупа S задовольняє умову L, якщо для будь-яких $a, b \in S$ з умови $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$ випливає $SaS = SbS$.

Теорема 2. *Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Наступні умови є еквівалентними*:

1) *ідеали напівгрупи S лінійно впорядковані*;
2) *головні ідеали напівгрупи S лінійно впорядковані*;
3) *кожний ідеал напівгрупи S є головним*;
4) *напівгрупа S задовольняє умову L*;
5) *кожний ідеал напівгрупи S є ранговим*.

Доведення. Імплікація $(1) \to (2)$ очевидна.

Імплікації $(2) \to (1)$ і $(3) \to (2)$ мають місце для будь-якої напівгрупи і це легко довести.

Доведемо імплікацію $(1) \to (4)$. Отже, нехай $a \in S$ і $b \in S$ такі, що $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b) = k$. Потрібно довести, що $SaS = SbS$. Припустимо протилежне, тобто $SaS \ne SbS$. Ідемпотенти aa^{-1} і bb^{-1} позначимо відповідно через e і w, а множину $\{x \in S \mid SxS = SeS\}$ — через D_e. Розглянемо $I_{k-1} \bigcup D_e$. Доведемо, що $I_{k-1} \bigcup D_e$ є ідеалом напівгрупи S.

Розглянемо можливі випадки.

1. Нехай $x \in I_{k-1}$. Тоді для будь-якого $y \in S$ маємо $xy \in I_{k-1}$ і $yx \in I_{k-1}$.

2. Нехай тепер $x \in D_e$. Тоді $SxS = SeS$. Нехай $c \in S$ — довільний елемент напівгрупи S. Якщо $\operatorname{rank}(xc) < k-1$, то $xc \in I_{k-1}$, а отже, $xc \in I_{k-1} \bigcup D_e$.

Нехай тепер $\operatorname{rank}(xc) = k$. Тоді $\operatorname{rank}(xcc^{-1}x^{-1}) = k$. Легко перевірити, що $xcc^{-1}x^{-1} \leq xx^{-1}$. Якщо припустити, що $xcc^{-1}x^{-1} < xx^{-1}$, то за лемою 8 $\operatorname{rank}(xcc^{-1}x^{-1}) < \operatorname{rank}(xx^{-1})$. Оскільки $\operatorname{rank}(xcc^{-1}x^{-1}) = k$ і $\operatorname{rank}(xx^{-1}) = k$, то приходимо до суперечності. Отже, $xcc^{-1}x^{-1} = xx^{-1}$.

Таким чином,

$$SaS = Saa^{-1}S = SeS = SxS = Sxx^{-1}S = Sxcc^{-1}x^{-1}S = SxcS,$$

тобто $xc \in D_e$.

Аналогічно можна довести, що $cx \in I_{k-1} \bigcup D_e$.

Таким чином, $I_{k-1} \bigcup D_e$ — ідеал напігрупи S. Зрозуміло, що $I_{k-1} \bigcup D_w$ — теж ідеал напівгрупи S.

За умовою ідеали напівгрупи S лінійно впорядковані, отже,

$$I_{k-1} \bigcup D_e \subseteq I_{k-1} \bigcup D_w \quad \text{або} \quad I_{k-1} \bigcup D_w \subseteq I_{k-1} \bigcup D_e.$$

A. Якщо припустити, що $I_{k-1} \bigcup D_e \subseteq I_{k-1} \bigcup D_w$, то $e \in I_{k-1} \bigcup D_w$. Оскільки $\operatorname{rank}(e) = k$, то $e \in D_w$. Звідси випливає $SeS = SwS$. Суперечність.

B. Якщо ж $I_{k-1} \bigcup D_w \subseteq I_{k-1} \bigcup D_e$, то $w \in I_{k-1} \bigcup D_e$. Звідси випливає, що $SeS = SwS$. Суперечність.

Доведемо справедливість імплікації $(4) \to (5)$.

Отже, нехай напівгрупа S задовольняє умову L. Покажемо, що кожний ідеал напівгрупи S є ранговим.

Нехай I — довільний ідеал. Позначимо через a елемент найбільшого рангу серед усіх елементів ідеалу I. Нехай $\operatorname{rank}(a) = k$, а елемент b такий, що $\operatorname{rank}(b) = k$. Оскільки $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(a)$, то $SaS = SbS$. Але $SaS \subseteq I$, тому $b \in I$. Далі, ідеал I містить ідемпотент рангу k, а отже (це легко обгрунтувати), для будь-якого невід'ємного числа m $(m < k)$ існує ідемпотент, ранг якого дорівнює m, причому цей ідемпотент належить I. Міркуючи так само, як і вище, одержуємо, що всі елементи рангу m належать ідеалу I. Отже, $I_k = I$.

Імплікація $(5) \to (1)$ є очевидною.

Доведемо справедливість імплікації $(5) \to (3)$.

Нехай I — довільний ідеал напівгрупи S. За умовою він є ранговим, тобто $I_k = I$ для деякого $k \in N_0$. Доведемо, що він є головним. Нехай $a \in I$, причому $\operatorname{rank}(a) = k$. Розглянемо головний ідеал SaS. За умовою він є ранговим. Отже, $SaS = I_m$ для деякого $m \in N_0$. Але $a \in SaS$, тому $\operatorname{rank}(a) \leq$ $\leq m$, тобто $k \leq m$. Оскільки $k \leq m$, то $I_k \subseteq I_m$. Крім цього, $SaS \subseteq I = I_k$. З останніх двох включень випливає, що $I_k = I_m = SaS$.

Доведених імплікацій достатньо, щоб стверджувати попарну еквівалентність умов (1) – (5).

4. Будова будь-якої конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу. В цьому пункті доведемо основну теорему статті (теорему 4). Спочатку сформулюємо потрібний результат (див. [1], п. 4).

Теорема 3. *Нехай S — напівгрупа, I_1 і I_2 — її ідеали, причому $I_1 \subseteq I_2$. Нехай Θ_1 та Θ_2 — конгруенції на напівгрупі S такі, що $\Theta_1 = I_1 \times I_1 \bigcup \Omega$ і $\Theta_2 = I_2 \times I_2 \bigcup \sigma$, де $\Omega \subseteq H$ і $\sigma \subseteq H$, а H — відношення Гріна.*

Тоді $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$.

Тепер сформулюємо основний результат статті.

Теорема 4. *Нехай S — інверсна напівгрупа з нулем* 0, *напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину.*

Будь-які дві конгруенції напівгрупи S переставні тоді і тільки тоді, коли її ідеали лінійно впорядковані і кожна конгруенція Θ має форму $\Theta = I \times I \bigcup \Omega$, де I — ідеал напівгрупи S, $\Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна).

Доведення. У теоремі 3 в загальній формі доведено *достатність*. Доведемо тепер *необхідність*.

Отже, нехай будь-які дві конгруенції на напівгрупі S є переставними. Тоді, як відомо [4] (теорема 4), її ідеали лінійно впорядковані, а отже, за теоремою 2 кожний ідеал напівгрупи S є ранговим. Далі, нехай Θ — довільна конгруенція напівгрупи S. Легко перевірити, що $I_\Theta = \{x \in S \mid \langle x, 0\rangle \in \Theta\}$ — ідеал напівгрупи S, отже, існує число k таке, що $I_\Theta = I_k = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le k\}$.

Нехай $\langle a,b\rangle \in \Theta$, причому $\operatorname{rank}(a) > k$. Покажемо, що і $\operatorname{rank}(b) > k$. Дійсно, якщо припустити протилежне, тобто $\operatorname{rank}(b) \le k$, то $b \in I_k$, а тому і $a \in I_k$. Отже, $\operatorname{rank}(a) \le k$. Суперечність.

Тепер покажемо, що $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$. Припустимо протилежне, тобто $\operatorname{rank}(a) \ne \operatorname{rank}(b)$. Для конкретності будемо вважати, що $\operatorname{rank}(a) = m$, $\operatorname{rank}(b) = r$, причому $k < m < r$. Позначимо через Σ конгруенцію Ріса $I_m \times I_m \bigcup \Delta$. Нехай $c \in S$ такий, що $\operatorname{rank}(c) = k$. Оскільки $\langle c, a\rangle \in \Sigma$ і $\langle a,b\rangle \in \Theta$, то $\langle c,b\rangle \in \Sigma \circ \Theta$. За умовою $\Theta \circ \Sigma = \Sigma \circ \Theta$, тому $\langle c, b\rangle \in \Theta \circ \Sigma$. Це означає, що існує елемент d такий, що $\langle c, d\rangle \in \Theta$ і $\langle d, b\rangle \in \Sigma$. Оскільки $\langle c, d\rangle \in \Theta$ і $c \in I_k$, то $d \in I_k$. Далі, оскільки $\langle d, b\rangle \in \Sigma$, то $d = b$ або $\langle d, b\rangle \in I_m \times I_m$. Якщо $d = b$, то $\operatorname{rank}(b) \le k$. Суперечність. Якщо ж $\langle d, b\rangle \in I_m \times I_m$, то $\operatorname{rank}(b) \le m$. Суперечність.

Таким чином, $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$.

Тепер покажемо, що $\langle a,b\rangle \in H$, тобто $aa^{-1} = bb^{-1}$ і $a^{-1}a = b^{-1}b$. Оскільки $\langle a,b\rangle \in \Theta$, то $\langle a, aa^{-1}b\rangle \in \Theta$. Для будь-якої інверсної напівгрупи виконується нерівність $aa^{-1}b \le b$. Якщо припустити, що $aa^{-1}b < b$, то за лемою 8 $\operatorname{rank}(aa^{-1}b) < \operatorname{rank}(b)$. З іншого боку, $\langle b, aa^{-1}b\rangle \in \Theta$, тому $\operatorname{rank}(aa^{-1}b) = \operatorname{rank}(b)$. Суперечність. Отже, $aa^{-1}b = b$. Звідси $aa^{-1}bb^{-1} = bb^{-1}$. Таким чином, $bb^{-1} \le aa^{-1}$. Якщо припустити, що $bb^{-1} < aa^{-1}$, то $\operatorname{rank}(b) < \operatorname{rank}(a)$. Суперечність. Отже, $aa^{-1} = bb^{-1}$.

Аналогічно можна довести, що $a^{-1}a = b^{-1}b$. Таким чином, $\langle a,b\rangle \in H$.

1. *Дереч В. Д.* Про переставні конгруенції на антигрупах скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 3. – С. 346–351.
2. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 286 с.
3. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York etc.: John Willey and Sons, 1984. – 674 p.
4. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**, № 1. – P. 55 – 66.

Одержано 16.03.2004