УДК 519.21

Б. В. Довгай (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕОДНОРІДНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

We consider a nonhomogeneous hyperbolic equation with zero initial and boundary conditions and random centered sample continuous Gaussian right-hand side. We establish conditions for existence of a solution of the first boundary-value problem of mathematical physics in the form of series uniformly convergent in probability in terms of covariance function. We find an estimate of distribution of the supremum of the solution of this problem.

Розглядається неоднорідне гіперболічне рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами і випадковою центрованою вибірково неперервною гауссовою правою частиною. Встановлено умови існування розв'язку першої крайової задачі математичної фізики у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції. Знайдено оцінку розподілу супремуму розв'язку цієї задачі.

1. Вступ. У цій роботі розглядається неоднорідне гіперболічне рівняння з нульовими початковими і крайовими умовами та випадковою гауссовою правою частиною. У статті [1] встановлено достатні умови існування розв'язку цієї задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду. Але перевірка цих умов може виявитись досить складною. Тому в даній роботі на підставі результатів [1] за допомогою методу, викладеного в [2], одержано достатні умови існування розв'язку у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції випадкового поля, що міститься у правій частині рівняння. Крім того, за цих умов отримано оцінку розподілу супремуму розв'язку першої крайової задачі математичної фізики для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими і крайовими умовами. Для знаходження цієї оцінки використано метод із [3].

2. Достатні умови існування розв'язку гіперболічного рівняння в термінах коваріаційної функції. Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\xi(x,t)}{a^2}, \qquad x\in[0,\pi], \quad t\in[0,T],$$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x\in[0,\pi], \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=\pi} = 0, \quad t\in[0,T],$$

де $a>0$, $T>0$ — деякі сталі, $\xi(x,t)$ — випадкове гауссове вибірково неперервне поле, $\mathrm{E}\xi(x,t)=0$.

Будемо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді збіжного за ймовірністю в нормі $\mathbb{C}([0,\pi]\times[0,T])$ ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na}\sin nx\int_0^t \zeta_n(u)\sin na(t-u)\,du, \tag{2}$$

де

$$\zeta_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\xi(x,t)\sin nx\,dx.$$

У роботі [1] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Для того щоб з імовірністю* 1 *існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі* (1) *в області* $0\le x\le\pi$, $0\le t\le T$ ($T>0$ — *деяка* *константа), який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю в нормі* $\mathbb{C}([0, \pi] \times [0, T])$ *ряду* (2), *достатньо, щоб виконувались такі умови:*

1) *для деякого* $\varepsilon > 0$ *збігаються ряди*

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} km(\ln m)^{1+\varepsilon} C_{k,m} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{C_k}\, (\ln k)^{(1+\varepsilon)/2} < \infty,$$

де

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0 \le u \le T \\ 0 \le v \le T}} \left| \mathrm{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v) \right|, \qquad C_k = \sup_{0 \le u \le T} \mathrm{E}\zeta_k^2(u);$$

2) *існує таке* $\alpha \in (0, 1)$, *що для довільних* $t, s \in [0, T]$ *таких, що* $|t - s| < \alpha$, *для кожного* $k \ge 1$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{E}\left| \zeta_k(t) - \zeta_k(s) \right|^2 \le a_k^2 \left| \ln|t - s| \right|^{-(1+\varepsilon)},$$

де $a_k > 0$, $k \ge 1$, — *деякі сталі, такі, що* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

Позначимо $B(x, y, t, s) = \mathrm{E}\xi(x, t)\xi(y, s)$, $(x, y, t, s) \in [0, \pi]^2 \times [0, T]^2$. Припустимо, що

$$B(0, y, t, s) = B(\pi, y, t, s) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, T],$$

$$B(x, 0, t, s) = B(x, \pi, t, s) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, T].$$

Для кожної фіксованої пари $(t, s) \in [0, T]^2$ продовжимо функцію $B(x, y, t, s)$, як функцію від x, y, на всю площину $\mathbb{R}^2$ так, щоб вона була періодичною з періодом 2π по x та y і щоб виконувалися тотожності

$$B(-x, y, t, s) = -B(x, y, t, s) = B(x, -y, t, s).$$

Внаслідок нашого припущення таке продовження є можливим.

Покладемо $\Delta_{\delta_1, \delta_2} f(x, y, t, s) = f(x + \delta_1, y + \delta_2, t, s) - f(x + \delta_1, y, t, s) - f(x, y + \delta_2, t, s) + f(x, y, t, s)$.

Теорема 2. *Для того щоб з імовірністю* 1 *існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі* (1) *в області* $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$ ($T > 0$ — *деяка константа), який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю в нормі* $\mathbb{C}([0, \pi] \times [0, T])$ *ряду* (2), *достатньо, щоб виконувались такі умови:*

1) *у продовженої на всю площину по* x, y *функції* $B(x, y, t, s)$ *існують неперервні похідні*

$$\frac{\partial^{i+j} B(x, y, t, s)}{\partial x^i \partial y^j}, \qquad 0 \le i, \quad j \le 2;$$

2) *для* $B^*(x, y, t, s) = \dfrac{\partial^4 B(x, y, t, s)}{\partial x^2 \partial y^2}$ *при достатньо малих* δ_1, δ_2 *виконується умова*

$$\sup_{\substack{0 \le t \le T \\ 0 \le s \le T}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta_{\delta_1, \delta_2} B^*(x, y, t, s) \right| dx\, dy \le \frac{C'}{|\ln \delta_1|^{\varepsilon} |\ln \delta_2|^{1+\varepsilon}}$$

для деяких $C' > 0$, $\varepsilon > 0$;

3) *існують такі* $C'' > 0$, $\varepsilon > 0$ *та* $\alpha \in (0, 1)$, *що для довільних* $t, s \in [0, T]$ *таких, що* $|t - s| < \alpha$, *має місце нерівність*

$$\sup_{\substack{x \in [-\pi, \pi] \\ y \in [-\pi, \pi]}} \left| \frac{\partial^2 B(x, y, t, t)}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 B(x, y, t, s)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B(x, y, s, s)}{\partial x \partial y} \right| \le C'' \big| \ln|t - s| \big|^{-(1+\varepsilon)}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що за умов теореми 2 ряд $\sum_{k,m=1}^{\infty} km(\ln m)^{1+\varepsilon} C_{k,m}$ збігається для деякого $\varepsilon > 0$, де $C_{k,m} = \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ 0 \le s \le T}} |\mathrm{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|$.

Для цього достатньо показати, що $C_{k,m} \le \dfrac{C}{(km)^2 |\ln k|^{\varepsilon} |\ln m|^{1+\varepsilon}}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, для всіх k, m, починаючи з деякого номера.

Маємо

$$\mathrm{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \sin my \, \mathrm{E}\xi(x, t)\xi(y, s) \, dx \, dy =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \sin my \, B(x, y, t, s) \, dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my \, B(x, y, t, s) \, dx \, dy.$$

Інтегруючи частинами

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, B(x, y, t, s) \, dx = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \frac{\partial B(x, y, t, s)}{\partial x} dx =$$

$$= -\frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \frac{\partial^2 B(x, y, t, s)}{\partial x^2} dx,$$

отримуємо

$$C_{k,m} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{k^2} \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ 0 \le s \le T}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my \frac{\partial^2 B(x, y, t, s)}{\partial x^2} dx \, dy \right|.$$

Тепер

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin my \frac{\partial^2 B(x, y, t, s)}{\partial x^2} dy = \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos my \frac{\partial^3 B(x, y, t, s)}{\partial x^2 \partial y} dy =$$

$$= -\frac{1}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin my \frac{\partial^4 B(x, y, t, s)}{\partial x^2 \partial y^2} dy.$$

Отже,

$$C_{k,m} = \frac{1}{k^2 m^2} \frac{1}{\pi^2} \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ 0 \le s \le T}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my \frac{\partial^4 B(x, y, t, s)}{\partial x^2 \partial y^2} dx \, dy \right|.$$

Розглянемо $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my \, B^*(x, y, t, s) \, dx \, dy$. Оскільки $B^*(x, y, t, s)$ є періодичною з періодом 2π по x та y, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my\, B^*(x, y, t, s)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\pi+\frac{\pi}{m}}^{\pi+\frac{\pi}{m}} \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} \sin kx \sin my\, B^*(x, y, t, s)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my\, B^*\left(x+\frac{\pi}{k},\ y+\frac{\pi}{m},\ t,\ s\right) dx\, dy.$$

Крім того,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my\, B^*(x, y, t, s)\, dx\, dy =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my\, B^*\left(x+\frac{\pi}{k},\ y,\ t,\ s\right) dx\, dy =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my\, B^*\left(x,\ y+\frac{\pi}{m},\ t,\ s\right) dx\, dy.$$

Тому

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} \left| \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my\, B^*(x, y, t, s)\, dx\, dy \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} \left| \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[B^*\left(x+\frac{\pi}{k},\ y+\frac{\pi}{m},\ t,\ s\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B^*\left(x+\frac{\pi}{k},\ y,\ t,\ s\right) - B^*\left(x,\ y+\frac{\pi}{m},\ t,\ s\right) + B^*(x, y, t, s) \right] \sin kx \sin my\, dx\, dy \right| \le$$

$$\le \frac{1}{4} \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta_{\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m}} B^*(x, y, t, s) \right| dx\, dy \le \frac{C'}{4} \frac{1}{\left|\ln \frac{\pi}{k}\right|^{\varepsilon} \left|\ln \frac{\pi}{m}\right|^{1+\varepsilon}} \le$$

$$\le \frac{C'}{4} \frac{\pi^{1+2\varepsilon}}{|\ln k|^{\varepsilon} |\ln m|^{1+\varepsilon}}, \qquad k,\ m \ge 16.$$

Отже, $C_{k,m} \le \dfrac{C'}{4\pi^{1-2\varepsilon}} \dfrac{1}{(km)^2 |\ln k|^{\varepsilon} |\ln m|^{1+\varepsilon}}$, $k,\ m \ge 16$.

2. Покажемо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{C_k}\, (\ln k)^{(1+\varepsilon)/2}$, де $C_k = \sup_{0\le t\le T} \mathrm{E}\zeta_k^2(t)$, збігається.

Оскільки $B^*(x, y, t, s)$ є неперервною, то вона обмежена на $[-\pi, \pi]^2 \times \times [0, T]^2$, тобто

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, (x, y, t, s) \in [-\pi, \pi]^2 \times [0, T]^2 : \quad \left| B^*(x, y, t, s) \right| \le C.$$

Тому, інтегруючи частинами, отримуємо

$$C_k = \frac{1}{\pi^2} \sup_{0 \le t \le T} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin ky \, B(x, y, t, t)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{k^4} \sup_{0 \le t \le T} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin ky \, B^*(x, y, t, t)\, dx\, dy \le \frac{4C}{k^4}.$$

Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{C_k} (\ln k)^{(1+\varepsilon)/2}$ збігається.

3. Нарешті розглянемо $\mathrm{E}|\zeta_k(t) - \zeta_k(s)|^2$:

$$\mathrm{E}|\zeta_k(t) - \zeta_k(s)|^2 = \mathrm{E}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \xi(x, t) \sin kx \, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \xi(y, s) \sin ky \, dy\right|^2 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx \sin ky (B(x, y, t, t) - 2B(x, y, t, s) + B(x, y, s, s))\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin ky (B(x, y, t, t) - 2B(x, y, t, s) + B(x, y, s, s))\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 k} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin ky \left(\frac{\partial B(x, y, t, t)}{\partial x} - 2\frac{\partial B(x, y, t, s)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, s, s)}{\partial x}\right) dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 k^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos ky \left(\frac{\partial^2 B(x, y, t, t)}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 B(x, y, t, s)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B(x, y, s, s)}{\partial x \partial y}\right) dx\, dy \le$$

$$\le \frac{4C''}{k^2} |\ln|t - s||^{-(1+\varepsilon)},$$

де ми скористались інтегруванням частинами та умовою 3.

Таким чином, виконуються всі умови теореми 1, з якої і випливає твердження теореми 2.

3. Оцінка супремуму розв'язку. В книзі [3] доведено наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай T — деяка непорожня параметрична множина, $(X(t), t \in T)$ — центрований гауссовий процес, $\sigma_X(t, s) = \left(\mathrm{E}|X(t) - X(s)|^2\right)^{1/2}$ і виконуються такі умови:*

A1) $\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \sqrt{\mathrm{E}|X(t)|^2} < \infty$;

A2) *простір (T, σ_X) є сепарабельним та процес X є сепарабельним на (T, σ_X).*

Припустимо, що для деякого $\alpha > 0$

$$\int_0^{\varepsilon_0} N^{\alpha}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty,$$

де $N(\varepsilon) = N_{\sigma_X}(T, \varepsilon)$ — кількість елементів в найменшому ε-покритті множини T відносно середньоквадратичного відхилення $\sigma_X(t, s)$.

Тоді для всіх $\theta \in (0, 1)$ та всіх $s > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| \ge s\right\} \le 2 \exp\left\{-\frac{s^2(1-\theta)^2}{2\varepsilon_0^2}\right\} \left(\frac{1}{\theta\varepsilon_0} \int_0^{\theta\varepsilon_0} N^{\alpha}(\varepsilon)\, d\varepsilon\right)^{1/\alpha}.$$

Нам буде потрібна наступна лема.

Лема. *Нехай* $\sigma(h)$, $h \geq 0$, *— невід'ємна монотонно зростаюча функція. Припустимо, що для будь-якого* $h \geq 0$

$$\sup_{\substack{|x-y|\leq h \\ |t-s|\leq h}} \left(\mathrm{E}|u(x,t)-u(y,s)|^2\right)^{1/2} \leq \sigma(h).$$

Тоді

$$N(\varepsilon) \leq \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right),$$

де $\sigma^{-1}(h)$ *— функція, обернена до* $\sigma(h)$, $h \geq 0$.

Доведення. Нехай $N(\varepsilon)$, $N_\rho(\varepsilon)$ — число елементів у мінімальному покритті множини $[0,\pi]\times[0,T]$ кулями радіуса ε відповідно в псевдометриці σ_u та в метриці $\rho((x,t),(y,s)) = \max\{|x-y|,|t-s|\}$, $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$, $H_\rho(\varepsilon) = \ln N_\rho(\varepsilon)$.

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$, $\delta = \sigma^{-1}(\varepsilon)$. Тоді

$$N_\rho(\delta) \leq \left(\frac{\pi}{2\delta}+1\right)\left(\frac{T}{2\delta}+1\right),$$

тобто існує δ-сітка Q у множині $[0,\pi]\times[0,T]$ відносно метрики ρ, кількість елементів якої не перевищує

$$\left(\frac{\pi}{2\delta}+1\right)\left(\frac{T}{2\delta}+1\right) = \left(\frac{\pi}{2\sigma^{-1}(\varepsilon)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{-1}(\varepsilon)}+1\right).$$

Тепер

$$\forall\,(x,y)\in[0,\pi]\times[0,T] \quad \exists\,(y,s)\in Q\colon \quad |x-y| \leq \delta, \quad |t-s| \leq \delta.$$

Але за умовами леми

$$\sigma_u((x,t),(y,s)) \leq \sigma(\delta) = \sigma\left(\sigma^{-1}(\varepsilon)\right) = \varepsilon.$$

Отже, Q — ε-сітка у множині $[0,\pi]\times[0,T]$ відносно псевдометрики σ_u, причому

$$N(\varepsilon) \leq \left(\frac{\pi}{2\sigma^{-1}(\varepsilon)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{-1}(\varepsilon)}+1\right).$$

Наслідок. *Нехай виконуються умови леми і* $\varepsilon < \sigma\left(\frac{\min\{\pi,T\}}{2}\right)$. *Тоді*

$$N(\varepsilon) \leq \frac{\pi T}{\left(\sigma^{-1}(\varepsilon)\right)^2}.$$

Позначимо

$$\varepsilon_1 = \frac{T\sqrt{C}}{a}\left(\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{(nk)^3|\ln n|^{\varepsilon}|\ln k|^{1+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A^2 = \frac{2T^2C}{a^2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{k+ka+1/T}{(nk)^3|\ln n|^{\varepsilon}|\ln k|^{1+\varepsilon}}, \qquad C = \frac{C'}{4\pi^{1-2\varepsilon}},$$

де $\varepsilon > 0$ — константа з умови 3 теореми 2, C' — константа з умови 2 теореми 2.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді при* $s > 2\sqrt{3}\varepsilon_1$

$$P\left\{ \sup_{\substack{x\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}} |u(x,t)| \geq s \right\} \leq 2A^4 \pi T e^5 \frac{s^8}{\varepsilon_1^{12}} \exp\left\{-\frac{s^2}{2\varepsilon_1^2}\right\}. \tag{3}$$

Доведення. Покажемо, що виконуються умови теореми 3. Маємо

$$\varepsilon_0^2 = \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le\pi}} E|u(x,t)|^2 = \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le\pi}} E\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na} \sin nx \int_0^t \zeta_n(u) \sin na(t-u)\,du\right|^2 =$$

$$= \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le\pi}} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin kx}{nka^2} \int_0^t\int_0^t \sin na(t-u)\sin ka(t-v) E\zeta_n(u)\zeta_k(v)\,du\,dv \leq$$

$$\leq \frac{T^2}{a^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nk} \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} |E\zeta_n(t)\zeta_k(s)| = \frac{T^2}{a^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{C_{n,k}}{nk} \leq$$

$$\leq \frac{T^2 C}{a^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{(nk)^3 |\ln n|^{\varepsilon} |\ln k|^{1+\varepsilon}} = \varepsilon_1^2 < \infty.$$

Отже, умова A_1 виконується.

Виберемо довільне $h > 0$. Тоді для будь-яких (x,t), $(y,s) \in [0,\pi]\times[0,T]$ таких, що $\max\{|x-y|, |t-s|\} \leq h$,

$$E|u(x,t) - u(y,s)|^2 =$$

$$= E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na}\left(\sin nx \int_0^t \zeta_n(u)\sin na(t-u)\,du - \sin ny \int_0^s \zeta_n(u) \sin na(s-u)\,du\right)\right)^2 =$$

$$= E\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nka^2}\left(\sin nx \int_0^t \zeta_n(u)\sin na(t-u)\,du - \sin ny \int_0^s \zeta_n(u) \sin na(s-u)\,du\right)\times$$

$$\times\left(\sin kx \int_0^t \zeta_k(v)\sin ka(t-v)\,dv - \sin ky \int_0^s \zeta_k(v) \sin ka(s-v)\,dv\right) =$$

$$= \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nka^2}\Big[\sin nx\big(\sin kx\, R_{n,k}(t,t) - \sin ky\, R_{n,k}(t,s)\big) +$$

$$+ \sin ny\big(\sin ky\, R_{n,k}(s,s) - \sin kx\, R_{n,k}(s,t)\big)\Big],$$

де

$$R_{n,k}(t,s) = \int_0^t\int_0^s \sin na(t-u)\sin ka(s-v) E\zeta_n(u)\zeta_k(v)\,dv\,du.$$

Скориставшись нерівністю $|ab - cd| \leq |a-c||b| + |b-d||c|$, отримаємо

$$E|u(x,t)-u(y,s)|^2 \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nka^2}\Big(|\sin kx - \sin ky|\,\big|R_{n,k}(t,t)\big| +$$

$$+ \big|R_{n,k}(t,t) - R_{n,k}(t,s)\big| + |\sin kx - \sin ky|\big|R_{n,k}(s,s)\big| + \big|R_{n,k}(s,s) - R_{n,k}(s,t)\big|\Big).$$

Далі, оскільки $\max\{|x-y|, |t-s|\} \leq h$, то

$$|\sin kx - \sin ky| \le 2\left|\sin\frac{k}{2}(x-y)\right| \le k|x-y| \le kh,$$

$$\left|R_{n,k}(t,t) - R_{n,k}(t,s)\right| \le \left(2T^2\left|\sin\frac{ka}{2}(t-s)\right| + T|t-s|\right)C_{n,k} \le \left(T^2ka+T\right)hC_{n,k},$$

$$\left|R_{n,k}(t,t)\right| \le T^2C_{n,k}.$$

Таким чином,

$$\mathrm{E}|u(x,t)-u(y,s)|^2 \le \sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{2}{nka^2}\left(khT^2C_{n,k} + \left(T^2ka+T\right)hC_{n,k}\right) =$$

$$= \frac{2T^2}{a^2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{nk}\left(k+ka+\frac{1}{T}\right)C_{n,k}h \le A^2h,$$

де ми скористалися тим, що

$$C_{n,k} = \sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}}|\mathrm{E}\zeta_n(t)\zeta_k(s)| \le \frac{C}{(nk)^2|\ln n|^{\varepsilon}|\ln k|^{1+\varepsilon}}.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{|x-y|\le h\\|t-s|\le h}}\left(\mathrm{E}|u(x,t)-u(y,s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le Ah^{\frac{1}{2}},$$

тобто

$$\sup_{\substack{|x-y|\le h\\|t-s|\le h}}\sigma_u((x,t),(y,s)) \le Ah^{\frac{1}{2}}.$$

Зауважимо, що оскільки $u(x,t)$ — класичний розв'язок задачі (1), то випадкове поле $u(x,t)$ є вибірково неперервним, звідки випливає, що $u(x,t)$ є сепарабельним на $([0,\pi]\times[0,T],\rho)$, де $\rho((x,t),(y,s)) = \max\{|x-y|,|t-s|\}$.

Тому внаслідок того, що простір $([0,\pi]\times[0,T],\rho)$ є сепарабельним і поле $u(x,t)$ — сепарабельне на $([0,\pi]\times[0,T],\rho)$, простір $([0,\pi]\times[0,T],\sigma_u)$ є сепарабельним і $u(x,t)$ — сепарабельне на $([0,\pi]\times[0,T],\sigma_u)$. Умова A_2 теореми 3 виконується.

Нехай $0<\alpha<\frac{1}{4}$. За лемою для $\sigma(h) = A\sqrt{h}$

$$\int_0^{\varepsilon_0}N^{\alpha}(\varepsilon)d\varepsilon \le \int_0^{\varepsilon_0}\left(\frac{\pi A^2}{2\varepsilon^2}+1\right)^{\alpha}\left(\frac{TA^2}{2\varepsilon^2}+1\right)^{\alpha}d\varepsilon < \infty.$$

Таким чином, всі умови теореми 3 виконуються і

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{x\in[0,\pi]\\t\in[0,T]}}|u(x,t)|\ge s\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{s^2(1-\theta)^2}{2\varepsilon_0^2}\right\}\left(\frac{1}{\theta\varepsilon_0}\int_0^{\theta\varepsilon_0}N^{\alpha}(\varepsilon)d\varepsilon\right)^{1/\alpha}.$$

Тепер за наслідком

$$\left(\frac{1}{\theta\varepsilon_0}\int_0^{\theta\varepsilon_0}N^{\alpha}(\varepsilon)d\varepsilon\right)^{1/\alpha} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\theta\varepsilon_0}(\pi T)^\alpha \int\limits_0^{\theta\varepsilon_0} \frac{A^{4\alpha}}{\varepsilon^{4\alpha}}\,d\varepsilon\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{1}{\theta\varepsilon_0}(A^4\pi T)^\alpha \int\limits_0^{\theta\varepsilon_0} \varepsilon^{-4\alpha}\,d\varepsilon\right)^{1/\alpha} =$$

$$= A^4\pi T\left(\frac{1}{\theta\varepsilon_0}\right)^{1/\alpha}\frac{1}{(1-4\alpha)^{1/\alpha}}\,\theta^{\frac{1-4\alpha}{\alpha}}\,\varepsilon_0^{\frac{1-4\alpha}{\alpha}} = A^4\pi T\,\frac{1}{(1-4\alpha)^{1/\alpha}}\,\theta^{-4}\,\varepsilon_0^{-4},$$

$$\theta\varepsilon_0 < A\sqrt{\frac{\min\{\pi, T\}}{2}}.$$

Виберемо $\theta = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_0^2/u^2}$. Тоді

$$2\exp\left\{-\frac{s^2(1-\theta)^2}{2\varepsilon_0^2}\right\} = 2e\exp\left\{-\frac{s^2}{2\varepsilon_0^2}\right\}.$$

Зауважимо, що

$$\theta = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_0^2/u^2} = \frac{2\varepsilon_0^2/s^2}{1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon_0^2/s^2}} \ge \frac{\varepsilon_0^2}{s^2}.$$

Тому

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{x\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}} |u(x,t)| \ge s\right\} \le 2A^4\pi T e\,\frac{1}{(1-4\alpha)^{1/\alpha}}\,\frac{s^8}{\varepsilon_0^{12}}\exp\left\{-\frac{s^2}{2\varepsilon_0^2}\right\} \le$$

$$\le 2A^4\pi T e\,\frac{1}{(1-4\alpha)^{1/\alpha}}\,\frac{s^8}{\varepsilon_1^{12}}\exp\left\{-\frac{s^2}{2\varepsilon_1^2}\right\}, \quad s > 2\sqrt{3}\,\varepsilon_1.$$

Мінімізуючи останню нерівність по $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, отримуємо нерівність (3). Залишилось зауважити, що при $s > \sqrt{2}\,\varepsilon_1$

$$\theta\varepsilon_0 \le \theta\varepsilon_1 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_1^2}{s^2}}\right)\varepsilon_1 < A\sqrt{\frac{\min\{\pi, T\}}{2}}.$$

4. Висновки. В роботі отримано умови на коваріаційну функцію випадкового поля, що міститься у правій частині неоднорідного гіперболічного рівняння, які забезпечують існування розв’язку першої задачі математичної фізики для цього рівняння у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду. Також встановлено оцінку хвоста розподілу супремуму розв’язку цієї задачі.

1. *Довгай Б. В.* Обґрунтування методу Фур’є для неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 616 – 624.
2. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процессы в задачах математической физики: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 4 – 35.
3. *Budldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Kiev: ТВіМС, 2000. – 257 p.

Одержано 28.01.2004