УДК 517.51

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕ $L(S^m)$

We establish estimates of the rate of convergence of a group of deviations on a sphere in the space $L(S^m)$, $m \geq 3$.

Встановлено оцінки швидкості збіжності групи відхилень на сфері у просторі $L(S^m)$, $m \geq 3$.

1. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство, $m \geq 3$, S^m — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат, $L(S^m)$ — пространство функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L(S^m)} = \int\limits_{S^m} |f(x)|\, dS(x) < +\infty,$$

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int\limits_{S^m} f(y) P_n(\cos\gamma)\, dS(y), \qquad \lambda = \frac{m-2}{2}, \tag{1}$$

— ряд Фурье – Лапласа функции $f(x) \in L\big(S^m\big)$, $x = \big(x_1, \ldots, x_m\big)$,

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt, \qquad \alpha > 0,$$

— гамма-функция Эйлера,

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f; x) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} (n+k) A_{n-k}^{\lambda} P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)$$

— средние Чезаро (c, λ) ряда (1), где

$$\Phi_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} (n+k) A_{n-k}^{\lambda} P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma),$$

$\cos\gamma = (x, y)$ — скалярное произведение векторов

$$x = (x_1, \ldots, x_m), \qquad y = (y_1, \ldots, y_m), \qquad x \in S^m, \qquad y \in S^m,$$

$S_n^{(\lambda)}(f; x)$ — частичная сумма ряда (1), $P_k^{(\lambda)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра (ультрасферические многочлены), которые определяются из разложения

$$\big(1 - 2th + h^2\big)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(t) h^n.$$

Пусть, далее,

$$\rho_k^{(\lambda)}(f; x) = f(x) - \sigma_k^{(\lambda)}(f; x),$$

$$D_n^{(\lambda)}(f; \alpha; v)_{L(S^m)} = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(v) \rho_k^{(\lambda)}(f; x) \right\|_{L(S^m)}, \tag{2}$$

$$G_n^{(\lambda)}(f;\alpha;v)_{L(S^m)} = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)\rho_k^{(\lambda)}(f;x) \right\|_{L(S^m)}, \tag{3}$$

где $\alpha = (\alpha_k(v))$, $k \in \mathbb{N}$, $v \in E$, — некоторая неотрицательная последовательность функций, заданных на множестве E, содержащем по крайней мере одну предельную точку.

2. Приведем сначала утверждение, содержащее оценку скорости сходимости величины (2).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha = (\alpha_k(v))$, $k \in \mathbb{N}$, $v \in E$, *— неотрицательная последовательность функций такая, что при каждом фиксированном* $v \in E$ *числа* $\alpha_k(v)$ *не возрастают. Тогда* $\forall f(x) \in L(S^m)$, $m \geq 3$, $\forall v \in E$

$$D_n^{(\alpha)}(f;\alpha;v) \leq K\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}, \tag{4}$$

где $E_n(f)_{L(S^m)}$ *— наилучшее приближение функции* $f \in L(S^m)$ *сферическими гармониками порядка* n *в метрике пространства* $L(S^m)$, $K = K(\lambda)$ *— величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}$, $v \in E$ *и* $f \in L(S^m)$.

Отметим некоторые факты, вытекающие из теоремы 1.

Рассматривая при $l \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{V}_l^{2l-1,\lambda}(f;x) = \frac{1}{l}\sum_{k=l}^{2l-1} \sigma_k^{(\lambda)}(f;x)$$

— средние Валле Пуссена $\mathbb{V}_{n-p}^{n,\lambda}(f;x)$ сумм $\sigma_k^{(\lambda)}(f;x)$, в которых $n = 2l-1$, $p = l-1$, в силу неравенства (4) при $\lambda_k(v) \equiv 1$, $v \in E$, $\forall f \in L(S^m)$, $m \geq 3$, имеем

$$\left\| f(x) - \mathbb{V}_l^{2l-1,\lambda}(f;x) \right\|_{L(S^m)} \leq KE_l(f)_{L(S^m)}.$$

Следующий факт сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha = (\alpha_k(v))$, $k \in \mathbb{N}$, $v \in E$, *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда для любой* $f(x) \in L(S^m)$, $m \geq 3$, $\forall v \in E$

$$G_n^{(\lambda)}(f;\alpha;v)_{L(S^m)} \leq K\left\{ n\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v)E_k(f)_{L(S^m)} \right\}, \quad K = K(\lambda), \tag{5}$$

где $G_n^{(\lambda)}(f;\alpha;v)$ *— величина, определяемая равенством* (3).

***Доказательство теоремы* 2.** В принятых обозначениях в силу неравенства (4) имеем

$$G_n^{(\lambda)}(f;\alpha;v) = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1} \alpha_k(v)\rho_k^{(\lambda)}(f;x) \right\|_{L(S^m)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1} \alpha_k(v)\rho_k^{(\lambda)}(f;x) \right\|_{L(S^m)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i n \left\| \frac{1}{2^i n} \sum_{k=2^i n}^{2^{i+1} n - 1} \alpha_k(v) \rho_k^{(\lambda)}(f; x) \right\|_{L(S^m)} \leq$$

$$\leq K \sum_{i=0}^{\infty} 2^i n \alpha_{2^i n}(v) E_{2^i n}(f)_{L(S^m)} =$$

$$= K \left\{ n\alpha_n(v) E_n(f)_{L(S^m)} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^i n \alpha_{2^i n}(v) E_{2^i n}(f)_{L(S^m)} \right\} \leq$$

$$\leq K \left\{ n\alpha_n(v) E_n(f)_{L(S^m)} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=2^{i-1} n}^{2^i n} \alpha_k(v) E_k(f)_{L(S^m)} \right\} =$$

$$= K \left\{ n\alpha_n(v) E_n(f)_{L(S^m)} + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) E_k(f)_{L(S^m)} \right\},$$

$$K = K(\lambda).$$

Неравенство (5) установлено.

Из теоремы 2, в свою очередь, следует ряд других фактов. Полагая в (5) $n = 1$, в приведенных выше условиях имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v) \rho_k^{(\lambda)}(f; x) \right\|_{L(S^m)} \leq K \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v) E_k(f)_{L(S^m)}. \tag{6}$$

Кроме того, если при каждом фиксированном $v \in E$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v) = 1,$$

то в силу (6)

$$\left\| f(x) - U^{(v),\lambda}(f; x) \right\|_{L(S^m)} \leq$$

$$\leq K \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v) E_k(f)_{L(S^m)}, \tag{7}$$

где

$$U^{(v),\lambda}(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(v) \sigma_k^{(\lambda)}(f; x).$$

Из неравенства (7) получаем оценки уклонений в метрике пространства $L(S^m)$ для достаточно широкого спектра линейных средних сумм $\sigma_n^{(\lambda)}(f; x)$. Например, при $v = n \in \mathbb{N}$ и

$$\alpha_k(n) = \begin{cases} n^{-1}, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

находим оценку уклонения средних Фейера сумм $\sigma_n^{(\lambda)}(f; x)$:

$$\left\| f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \frac{K}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k(f)_{L(S^m)}, \qquad K = K(\alpha).$$

Полагая $\alpha_k(v) = (1-v)v^{k-1}$, $0 < v < 1$, получаем оценку уклонения средних Абеля сумм $\sigma_n^{(\lambda)}(f;x)$:

$$\left\| f(x) - (1-v)\sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1}\sigma_k^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le K\left\{(1-v)\sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1}E_k(f)_{L(S^m)}\right\}.$$

Если же

$$\alpha_k(n) = \begin{cases}(k\ln(n+1))^{-1}, & k \le n,\\ 0, & k > n,\end{cases}$$

то имеем оценку уклонения логарифмических средних сумм $\sigma_n^{(\lambda)}(f;x)$:

$$\left\| f(x) - \frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sigma_k^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le K\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}E_k(f)_{L(S^m)}\right\}, \qquad K = K(\lambda),$$

и т. д.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $Y_n(x)$ — сферическая гармоника наилучшего приближения функции f в метрике $L(S^m)$. Тогда, полагая

$$\delta_n(f;x) = f(x) - Y_n(x),$$

получаем

$$\|\delta_n(f;x)\|_{L(S^m)} = E_n(f)_{L(S^m)}$$

и, так как

$$\sigma_k^{(\lambda)}(Y_n;x) = Y_n(x) \qquad \forall\, k \ge n,$$

$$\rho_k^{(\lambda)}(f;x) = \delta_n(f;x) - \sigma_k^{(\lambda)}(\delta_n;x).$$

Отсюда

$$\rho_k^{(\lambda)}(f;x) = \delta_n(f;x) - \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int_{S^m}\delta_n(f;y)\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,ds(y) =$$

$$= \delta_n(f;x) - \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_0^{\pi} \Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma =$$

$$= \delta_n(f;x) - \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \sum_{i=1}^{3} U_k^{(i)}(f;x), \tag{8}$$

где

$$\Delta_x^{(n)}(f;\gamma) = \int_{(x,y)=\cos\gamma} \delta_n(f;y)\,dt(y), \tag{9}$$

$$U_k^{(i)}(f;x) = \int_{e_i} \Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$e_1 = \left[0, \frac{\pi}{2(k+1)}\right], \qquad e_2 = \left[\frac{\pi}{2(k+1)}, \pi - \frac{\pi}{2(k+1)}\right],$$

$$e_3 = \left[\pi - \frac{\pi}{2(k+1)}, \pi\right].$$

Принимая во внимание (8) и определение (2), находим

$$D_n^{(\lambda)}(f;\alpha;\nu) =$$

$$= \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(\nu)\left[\delta_n(f;x) - \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \sum_{i=1}^{3} U_k^{(i)}(f;x)\right] \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(\nu)\delta_n(f;x) \right\|_{L(S^m)} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(\nu) U_k^{(i)}(f;x) \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \alpha_n(\nu) E_n(f)_{L(S^m)} + \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \sum_{i=1}^{3} I_n^{(i)}(f;\alpha;\nu), \tag{11}$$

где

$$I_n^{(i)}(f;\alpha;\nu) = \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(\nu) U_k^{(i)}(f;x) \right\|_{L(S^m)}.$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части (11).

Пусть

$$S_h(f;x) = \frac{1}{|S^{m-1}|\sin^{2\lambda} h} \int_{(x,y)=\cos h} f(y)\,dt(y)$$

— сферический сдвиг для функции $f(x)$, $x \in S^m$, $m \ge 3$, с шагом $h > 0$. Известно (см., например, [1, с. 7]), что

$$\| S_h(f;x) \|_{L(S^m)} \le \| f \|_{L(S^m)}. \tag{12}$$

Тогда в силу неравенства [2]

$$\left|\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\right| \le Ck^{2\lambda+1}, \quad 0 \le \gamma \le \pi, \quad C > 0,$$

с учетом (9), (10), (12) и условия теоремы получаем

$$I_n^{(1)}(f;\alpha;v) =$$

$$= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(v) \int_{e_1} \Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le K\alpha_n(v) \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{e_1} \left|\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\right| k^{2\lambda+1}\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \left\| \int_{e_1} \left|\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\right| d\gamma \right\|_{L(S^m)} =$$

$$= \frac{K\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_1} \left\|\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\right\|_{L(S^m)} d\gamma =$$

$$= \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_1} \left\|S_\gamma(\delta_n;x)\right\|_{L(S^m)} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma \le$$

$$\le \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_1} \left\|\delta_n(f;x)\right\|_{L(S^m)} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma \le$$

$$\le K_2\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{13}$$

Аналогичными рассуждениями получаем

$$I_n^{(3)}(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n} \left\| \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_1} \Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_3} \left\|\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\right\|_{L(S^m)} d\gamma =$$

$$= \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_3} \left\|S_\gamma(\delta_n;x)\right\|_{L(S^m)} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma \le$$

$$\le \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} E_n(f)_{L(S^m)} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_{e_3} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma =$$

$$= \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} E_n(f)_{L(S^m)} \sum_{k=n}^{2n-1} k^{2\lambda+1} \int_0^{\pi/2(k+1)} \sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma \le$$

$$\le K_2\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{14}$$

Далее воспользуемся асимптотическим выражением ядра $\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ [2]:

$$\Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma) =$$

$$= \frac{\lambda}{4^\lambda}\frac{\sin\left[\left(k+\frac{3\lambda+1}{2}\right)\gamma-\lambda\pi\right]}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} + \frac{1}{k+1}\frac{\eta_k(\gamma)}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} =$$

$$= \Phi_{k,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma) + \Phi_{k,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma), \qquad \left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right| < \frac{k\pi}{2(k+1)},$$

где $|\eta_k(\gamma)| < K$.

В этих обозначениях имеем

$$I_n^{(2)}(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{e_k}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_{k,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{e_2}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_{k,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} =$$

$$= I_{n,1}^{(2)}(f;\alpha;v) + I_{n,2}^{(2)}(f;\alpha;v). \tag{15}$$

Оценим величину $I_{n,1}^{(2)}(f;\alpha;v)$. С этой целью заметим, что

$$I_{n,1}^{(2)}(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{1/2n}^{\pi-1/2n}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_{k,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{1/2n}^{\pi/2(k+1)}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_{k,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{\pi-\pi/2(k+1)}^{\pi-1/2n}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\Phi_{k,1}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} =$$

$$= A_n(f;\alpha;v) + B_n(f;\alpha;v) + C_n(f;\alpha;v). \tag{16}$$

Далее,

$$A_n(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{1/2n}^{\pi-1/2n}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\frac{\sin k\gamma\cos\left(\frac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin\gamma/2)^{\lambda+1}}\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\alpha_k(v)\int_{1/2n}^{\pi-1/2n}\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\frac{\cos k\gamma\sin\left(\frac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin\gamma/2)^{\lambda+1}}\,d\gamma \right\|_{L(S^m)} =$$

$$= A_{n,1}(f;\alpha;v) + A_{n,2}(f;\alpha;v). \tag{17}$$

Принимая во внимание условие теоремы и применяя преобразование Абеля, находим

$$A_{n,1}(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \frac{1}{n}\left\| \int\limits_{1/2n}^{\pi-1/2n} \left| \frac{\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\cos\left(\frac{3\lambda+1}{2}\gamma-\lambda\pi\right)}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} \right| \left| \sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k(v)\sin k\gamma \right| d\gamma \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \frac{K}{n}\left\| \int\limits_{1/2n}^{\pi-1/2n} \left| \frac{\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} \right| \left| \frac{\alpha_n(v)}{\gamma} \right| d\gamma \right\|_{L(S^m)}. \tag{18}$$

На основании неравенства (12) из (18) получаем

$$A_{n,1}(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} \int\limits_{1/2n}^{\pi-1/2n} \frac{\left\| S_\gamma(\delta_n;x) \right\|_{L(S^m)} \sin^{2\lambda}\gamma}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} \frac{d\gamma}{\gamma} \le$$

$$\le K_2\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{19}$$

Аналогично оценивается величина $A_{n,2}(f;\alpha;v)$:

$$A_{n,2}(f;\alpha;v) \le K\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{20}$$

Следовательно, в силу (19) и (20) из (17) получаем

$$A_n(f;\alpha;v) \le K\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{21}$$

Далее,

$$B_n(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \int\limits_{1/2n}^{\pi/2(k+1)} \frac{\left\| \Delta_x^{(n)}(f;\gamma) \right\|_{L(S^m)}}{(\sin\gamma)^\lambda(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} d\gamma \le$$

$$\le \frac{K_1\alpha_n(v)}{n} E_n(f)_{L(S^m)} \sum_{k=n}^{2n-1} \int\limits_{1/2n}^{\pi/2(k+1)} \frac{(\sin\gamma)^\lambda}{(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} d\gamma \le$$

$$\le K_2\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{22}$$

С учетом (12) находим

$$C_n(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n} E_n(f)_{L(S^m)} \sum_{k=n}^{2n-1} \int\limits_{\pi-\pi/2(k+1)}^{\pi-1/2n} \frac{(\sin\gamma)^\lambda}{(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} d\gamma \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n} E_n(f)_{L(S^m)} \sum_{k=n}^{2n-1} \int\limits_{\pi-\pi/2(k+1)}^{\pi-1/2n} (\sin\gamma)^\lambda d\gamma \le$$

$$\le K_1\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{23}$$

Таким образом, вследствие (21) – (23) из (16) получаем

$$I_{n,1}^{(2)}(f;\alpha;v) \le K\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{24}$$

Согласно определению величин $\Phi_{k,2}^{(\lambda)}(\cos\gamma)$

$$I_{n,2}^{(2)}(f;\alpha;v) \le$$

$$\le \frac{K\alpha_n(v)}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}\left\| \int_{e_2} \left|\Delta_x^{(n)}(f;\gamma)\right| \frac{d\gamma}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} \right\|_{L(S^m)} \le$$

$$\le \frac{K_1\alpha_n(v)}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}\int_{e_2}\frac{\left\|S_\gamma(\delta_n;x)\right\|_{L(S^m)}\sin^{2\lambda}\gamma}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}\,d\gamma \le$$

$$\le \frac{K_2\alpha_n(v)}{n}E_n(f)_{L(S^m)}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}\int_{e_2}\gamma^{-2}\,d\gamma \le$$

$$\le K_3\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{25}$$

Согласно (24), (25) из (15) получаем

$$I_n^{(2)}(f;\alpha;v) \le K\alpha_n(v)E_n(f)_{L(S^m)}. \tag{26}$$

Объединяя соотношения (13), (14), (26) и (11), приходим к утверждению теоремы 1.

Отметим, что аналогичные оценки в случае тригонометрических рядов Фурье установлены в работах [3, 4].

1. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1987. – 356 с.
2. *Kogbetliantz E.* Recherches sur la summabilitié des seris ultraspheriques par la methode des moyennes arithmetiques // J. Math. Pures Appl. – 1924. – **9,** № 3. – P. 107 – 187.
3. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Скорость сходимости группы уклонений в пространстве L_β^ψ // Вопросы суммирования простых и кратных рядов Фурье. – Киев, 1987. – С. 3 – 8. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.40).
4. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Там же. – С. 44 – 50.

Получено 17.09.2003