УДК 512.544

Н. Н. Семко, С. Н. Кучменко
(Нац. акад. налог. службы Украины, Ирпень)

ГРУППЫ С ПОЧТИ НОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ БЕСКОНЕЧНОГО РАНГА

We study classes of groups whose subgroups of some infinite ranks are almost normal.

Вивчаються класи груп, у яких підгрупи деяких нескінченних рангів майже нормальні.

Пусть ν — свойство, которое могут иметь подгруппы. Это свойство может быть как внутренним (например, ν = быть нормальной, субнормальной, почти нормальной, переставляемой, дополняемой подгруппами), так и внешним, т. е. в этом случае ν означает быть подгруппой, которая принадлежит некоторому классу групп $\boldsymbol{X}$. Если G — группа, то обозначим через $\Sigma_{\text{non-}\nu}(G)$ (соответственно $\Sigma_{\nu}(G)$) систему всех тех подгрупп G, которые не имеют свойства ν (соответственно имеют свойство ν). Одна из первых задач теории групп, которая сохранила свое значение и до нашего времени, состоит в изучении влияния на строение группы систем $\Sigma_{\nu}(G)$ и $\Sigma_{\text{non-}\nu}(G)$ для наиболее важных естественных свойств ν. Первым шагом в этом направлении была ставшая классической статья Р. Дедекинда [1], в которой изучались конечные группы, все подгруппы которых нормальны, т. е. группы, у которых система $\Sigma_{\text{norm}}(G)$ совпадает с системой всех подгрупп или система $\Sigma_{\text{non-norm}}(G)$ — пустая. Затем последовала работа Г. Миллера и Х. Морено [2], в которой изучались конечные группы, все собственные подгруппы которых абелевы, т. е. система $\Sigma_{\text{ab}}(G)$ состоит из всех собственных подгрупп или $\Sigma_{\text{non-ab}}(G) = \{G\}$. Важную роль в этой цепи сыграла также работа О. Ю. Шмидта [3], в которой изучались конечные группы, все собственные подгруппы которых нильпотентны, т. е. система $\Sigma_{\text{nil}}(G)$ состоит из всех собственных подгрупп или $\Sigma_{\text{non-nil}}(G) = \{G\}$. После этих работ началось последовательное изучение как конечных, так и бесконечных групп, у которых система $\Sigma_{\nu}(G)$ „достаточно велика” или же система $\Sigma_{\text{non-}\nu}(G)$ „достаточно мала”. Эта тематика оказалась весьма интересной и плодотворной, ей посвящено большое количество статей и несколько монографий. В данной статье мы рассмотрим группы с ограничениями на систему $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ всех подгрупп, которые не являются почти нормальными.

Подгруппа H группы G называется почти нормальной в G, если множество $\mathrm{cl}_G(H) = \{H^g \mid g \in G\}$ (*класс всех подгрупп, сопряженных с* H) *конечно.*

Если подгруппа H нормальна в G, то $\mathrm{cl}_G(H) = \{H\}$, так что почти нормальные подгруппы — это естественное обобщение нормальных подгрупп. Подгруппа H тогда и только тогда почти нормальна в группе G, когда ее нормализатор $N_G(H)$ имеет конечный индекс в G (отсюда и происходит название таких подгрупп). Б. Нейман [4] охарактеризовал группы, все подгруппы которых почти нормальны (т. е. множество $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ пусто), как группы с центром конечного индекса (*группы, конечные над центром*). И. И. Еремин [5] обобщил этот результат, доказав, что группы, все абелевы подгруппы которых почти нормальны, имеют центр конечного индекса. В статье [6] И. И. Еремин начал рассматривать группы, все бесконечные подгруппы которых почти нормальны (т. е. множество $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ состоит только из конечных подгрупп). Локально почти разрешимые группы, все бесконечные подгруппы которых почти нормальны, были описаны в работе Н. Н. Семко, С. С. Левищенко и Л. А. Курдаченко [7]. Дальнейшее изучение групп, у которых система $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ „достаточно мала”, продолжалось в работах других авторов. Например, группы, в которых (упорядоченное по включению) множество $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности, изучались Л. А. Курдаченко и В. В. Пылаевым [8]; группы, у которых множество $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ удовлетворяет слабому условию минимальности (соответственно максимальности), рассматривались в работе Дж. Кутоло и Л. А. Курдаченко [9]; в работе С. Франциози, Ф. де Жиованни и Л. А. Курдаченко [10] были рассмотрены группы, в которых система $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ состоит из конечнопорожденных или нециклических подгрупп. В данной работе рассматриваются группы с более широкой системой $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$. Точнее, рассматриваются группы, в которых множество $\Sigma_{\text{non-an}}(G)$ состоит из групп того или иного конечного ранга. Важные комбинаторные характеристики группы — разнообразные ранги, которые распространяют на группы классическое понятие размерности, были введены Х. Прюфером, А. И. Мальцевым [11, 12], Д. Робинсоном [13], Р. Бэром, Г. Хайнекеном [14], Д. И. Зайцевым [15, 16]. В этой связи следует отметить, что в работе С. Франциози, Ф. де Жиованни и М. Ньюэла [17] рассматривались группы, в которых множество всех ненормальных подгрупп состоит из разрешимых групп того или иного конечного ранга.

1. Группы, в которых все подгруппы бесконечного *0*-ранга почти нормальны. Будем говорить, что группа G *имеет конечный 0-ранг* $r_0(G) = r$, *если она имеет конечный субнормальный ряд, в котором точно* r *бесконечных циклических факторов, а все остальные факторы — периодические.*

Отметим, что любое уплотнение такого ряда имеет точно r бесконечных циклических факторов, при этом все остальные факторы — периодические. Это показывает, что 0-ранг не зависит от выбора субнормального ряда. Этот числовой инвариант известен также как *ранг, свободный от кручения,* или просто *свободный ранг.* Отметим также, что для почти полициклической группы это понятие в точности совпадает с понятием *числа Хирша.*

Пусть группа G имеет конечный 0-ранг r. Тогда G имеет конечный субнормальный ряд

$$\langle 1\rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G,$$

в котором r факторов — бесконечные циклические, а оставшиеся $n - r$ факторов — периодические. Если H — подгруппа G, то

$$\langle 1\rangle = G_0 \cap H \lhd G_1 \cap H \lhd \ldots \lhd G_n \cap H = H$$

будет субнормальным рядом в H. Поскольку факторы этого ряда изоморфны подгруппам факторов первого ряда, получаем $r_0(H) \le r_0(G)$.

Если H — нормальная подгруппа G, то рассмотрим субнормальный ряд

$$\langle 1\rangle = G_0 \cap H \lhd G_1 \cap H \lhd \ldots \lhd G_n \cap H = H = HG_0 \lhd HG_1 \lhd \ldots \lhd HG_n = G.$$

Тогда $\{G_j \cap H \mid 0 \le j \le n\}$ будет субнормальным рядом H, а $\{HG_j/H \mid 0 \le j \le n\}$ — субнормальным рядом фактор-группы G/H. Однако последний ряд имеет только r бесконечных циклических факторов, при этом оставшиеся факторы — периодические. Таким образом, получаем равенство $r_0(G) = r_0(H) + r_0(G/H)$. В частности, если H — периодическая нормальная подгруппа, то $r_0(G) = r_0(G/H)$.

1.1. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны.*

1. *Если H — подгруппа бесконечного 0-ранга, то и любая ее подгруппа бесконечного 0-ранга почти нормальна.*

2. *Если H — нормальная подгруппа G, то любая подгруппа бесконечного 0-ранга фактор-группы G/H почти нормальна.*

Утверждение леммы почти очевидно.

Отметим, что если H, L — почти нормальные подгруппы в группе G, то подгруппы $H \bigcap L$ и $\langle H, L\rangle$ также почти нормальны. Это следует из очевидных включений $N_G(H) \bigcap N_G(L) \leq N_G(H \bigcap L)$ и $N_G(H) \bigcap N_G(L) \leq N_G(\langle H, L\rangle)$, а также из того факта, что подгруппа $N_G(H) \bigcap N_G(L)$ имеет конечный индекс в G. Этими утверждениями будем часто пользоваться в дальнейшем без специальных ссылок.

1.2. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны, $g \in G$, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, где H_λ — неединичная $\langle g\rangle$-инвариантная подгруппа для любого $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что подмножество $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \mid r_0(H_\lambda) \neq 0\}$ бесконечно. Тогда $\langle g\rangle$ почти нормальна в G.*

Доказательство. Положим $\langle x\rangle = \langle g\rangle \bigcap H$. Тогда $\mathrm{Supp}\, x = \Delta$ — конечное подмножество Λ и $(\times_{\lambda \in M} H_\lambda) \bigcap \langle g\rangle = \langle 1\rangle$, где подмножество $M = \Lambda \setminus \Delta$ бесконечно. Выберем теперь в M два подмножества K и N, удовлетворяющие следующим условиям: $K \bigcup N = M$, $K \bigcap N = \varnothing$ и оба подмножества $\Sigma \bigcap K$, $\Sigma \bigcap N$ бесконечны. Такой выбор обеспечивает тот факт, что подгруппы $\langle g\rangle(\times_{\lambda \in K} H_\lambda)$ и $\langle g\rangle(\times_{\lambda \in N} H_\lambda)$ имеют бесконечный 0-ранг, в частности, обе они почти нормальны. Поэтому $\langle g\rangle(\times_{\lambda \in K} H_\lambda) \bigcap \langle g\rangle(\times_{\lambda \in N} H_\lambda) = \langle g\rangle$ — почти нормальная подгруппа.

Лемма 1.2 доказана.

Пусть G — группа. Для произвольного элемента $g \in G$ обозначим через g^G класс всех элементов, сопряженных с g, т. е. $g^G = \{x^{-1} g x \mid x \in G\}$. Далее, положим

$$FC(G) = \{g \in G \mid g^G \text{ конечен}\}.$$

Очевидно, $FC(G)$ — характеристическая подгруппа группы G, ее называют *FC-центром группы G*. FC-центр группы G можно также охарактеризовать следующим образом. Это подмножество всех таких элементов g группы G, что подгруппа $\langle g\rangle$ почти нормальна в G. Действительно, если $g \in FC(G)$, то элемент g имеет конечное множество сопряженных в G, а поэтому и подгруппа $\langle g\rangle$ также имеет конечное множество сопряженных в G, т. е. индекс $|G : N_G(\langle g\rangle)|$ конечен. Наоборот, если подгруппа $\langle g\rangle$ почти нормальна в G, то $|G : N_G(\langle g\rangle)|$ конечен. Если элемент g имеет конечный порядок, то $|N_G(\langle g\rangle) : C_G(\langle g\rangle)|$ конечен, а потому конечен и индекс $|G : C_G(\langle g\rangle)| = |g^G|$. Если же элемент g имеет бесконечный порядок, то $|N_G(\langle g\rangle) : C_G(\langle g\rangle)| \leq 2$, и снова $|G : C_G(\langle g\rangle)| = |g^G|$ конечен. Этой характеристикой будем также пользоваться в дальнейшем без специальных ссылок.

Отправляясь от FC-центра, построим *верхний FC-центральный ряд группы*:

$$\langle 1\rangle = C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \ldots \leq C_\gamma,$$

по следующему правилу: $C_1 = FC(G)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = FC(G/C_\alpha)$, $\alpha < \gamma$, *и* $FC(G/C_\gamma) = \langle 1\rangle$. *Последний член C_γ этого возрастающего ряда называется верхним FC-гиперцентром. Если $C_\gamma = G$, то группа G называется FC-гиперцентральной; если γ еще и конечно, то G называется FC-нильпотентной.*

1.3. ***Следствие.*** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны, $H = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, где H_λ — неединичная подгруппа для любого $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что подмножество $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \mid r_0(H_\lambda) \neq 0\}$ бесконечно. Тогда $H \leq FC(G)$.*

1.4. Следствие. *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны. Если G включает в себя абелеву подгруппу A бесконечного 0-ранга, то $A \leq FC(G)$, в частности, $FC(G)$ имеет бесконечный 0-ранг.*

Доказательство. Действительно, пусть A — абелева подгруппа, имеющая бесконечный 0-ранг. Если A не имеет кручения, то она включает в себя свободную абелеву подгруппу бесконечного 0-ранга. Если периодическая часть T подгруппы A неединична, то в фактор-группе A/T выберем свободную абелеву подгруппу C/T, имеющую бесконечный 0-ранг. Теперь имеем $C = E \times T$, где $C/T \cong E$ — свободная абелева подгруппа бесконечного 0-ранга (см., например, [18], теорема 14.4). Таким образом, в любом случае A включает в себя подгруппу $\times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ — бесконечная циклическая подгруппа для каждого $\lambda \in \Lambda$ и множество индексов Λ бесконечно. Очевидно, подгруппа C_λ — $\langle a \rangle$-инвариантна для каждого элемента $a \in A$, и, применяя лемму 1.2, получаем включение $A \leq FC(G)$.

Следствие 1.4 доказано.

1.5. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны. Если G — FC-группа бесконечного 0-ранга, то G конечна над центром (т. е. центр имеет конечный индекс в G).*

Доказательство. Выберем в центре группы G максимальную подгруппу без кручения U. Поскольку фактор-группа $G/\zeta(G)$ периодическая (см., например, [19], теорема 4.32), то и G/U периодическая. Отсюда следует, что подгруппа U имеет бесконечный 0-ранг. Пусть L — произвольная подгруппа, включающая в себя U, тогда и она имеет бесконечный 0-ранг. Другими словами, L почти нормальна в G. Отсюда следует, что любая подгруппа G/U почти нормальна. Но в этом случае G/U конечна над центром согласно теореме Б. Неймана [4]. Положим $Z/U = \zeta(G/U)$, и пусть $z \in Z$, $g \in G$. Тогда $[g, z] \in U$. С другой стороны, согласно другой теореме Б. Неймана (см., например, [19], теорема 4.32) $[G, G]$ — периодическая подгруппа. Итак, $[g, z] \in U \bigcap [G, G] = \langle 1 \rangle$, т. е. $z \in \zeta(G)$. Следовательно, $G/\zeta(G)$ конечна.

Лемма 1.5 доказана.

1.6. **Предложение.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны. Если G включает в себя абелеву подгруппу бесконечного 0-ранга, то G конечна над центром.*

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа бесконечного 0-ранга группы G. Из леммы 1.4 получаем включение $A \leq FC(G)$. В частности, FC-центр имеет бесконечный 0-ранг. Положим $C = \zeta(FC(G))$, тогда из леммы 1.5 получаем, что фактор-группа $FC(G)/C$ конечна, а значит, C имеет бесконечный 0-ранг. Пусть $1 \neq c_1 \in C$, $C_1 = \langle c_1 \rangle^G$. Поскольку $c_1 \in FC(G)$, подгруппа C_1 — конечно порождена. Выберем в C подгруппу B_1, максимальную относительно $C_1 \bigcap B_1 = \langle 1 \rangle$. Очевидно, что C/B_1 — группа конечного специального ранга, в частности, она имеет конечный 0-ранг. В свою очередь, это означает, что подгруппа B_1 имеет бесконечный 0-ранг, а поэтому она почти нормальна. Это обеспечивает конечность множества $\{B_1^x \mid x \in G\}$. Положим $\{B_1^x \mid x \in G\} = \{x_1^{-1} B_1 x_1, \ldots, x_m^{-1} B_1 x_m\}$ и $C_1 = \bigcap_{x \in G} B_1^x$. Тогда из теоремы Рэмака получаем вложение $A/C_1 \leq A/B_{11}^x \times \ldots \times A/B_{1m}^x$. В свою очередь, отсюда следует, что C_1 — G-инвариантная подгруппа A, для которой $C_1 \bigcap A_1 = \langle 1 \rangle$ и A/C_1 — группа конечного специального ранга. В частности,

$C_1 \neq \langle 1 \rangle$. Пусть $1 \neq c_2 \in C_1$ и $C_2 = \langle c_2 \rangle^G$. Снова подгруппа C_2 конечно порождена. Выберем в A подгруппу B_2, максимальную относительно $(C_1 \times C_2) \cap \cap B_2 = \langle 1 \rangle$. Тогда A / B_2 — группа конечного специального ранга. Использовав аналогичные аргументы, построим бесконечное семейство $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ таких конечнопорожденных G-инвариантных подгрупп C_n, что $\langle C_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = = \times_{n \in \mathbb{N}} C_n$. В частности, подгруппа C_n — $\langle g \rangle$-инвариантна для любого элемента $g \in G$. Используя теперь лемму 1.2, получаем включение $g \in FC(G)$, которое доказывает равенство $G = FC(G)$. Применение леммы 1.5 завершает доказательство предложения 1.6.

Пусть G — группа. *Обозначим через* $P(G)$ *максимальную нормальную периодическую подгруппу* G.

Пусть G — абелева группа, $G \leq \operatorname{Aut} A$. *Будем говорить, что* A *рационально неприводима* (*точнее,* G *рационально неприводима*), *если каждая ее неединичная* G-*инвариантная подгруппа* B *определяет периодическую фактор-группу* A/B.

1.7. **Лемма.** *Пусть* G *— разрешимая группа бесконечного 0-ранга, у которой* $P(G) = \langle 1 \rangle$. *Если* G *имеет бесконечный 0-ранг, то* G *включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга.*

Доказательство. Пусть

$$\langle 1 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_d \leq A_{d+1} = G$$

— ряд последовательных коммутантов группы G. Поскольку G имеет бесконечный 0-ранг, хотя бы один из факторов этого ряда имеет бесконечный 0-ранг. Далее, так как A_1 — нормальная абелева подгруппа G, из равенства $P(G) = \langle 1 \rangle$ получаем, что A_1 не имеет кручения. Если она имеет бесконечный 0-ранг, то все доказано. Поэтому предположим, что $r_0(A_1)$ конечен. Фактор A_2 / A_1 является нормальной абелевой подгруппой G / A_1. Обозначим через T / A_1 периодическую часть A_2 / A_1. Из теоремы 5 работы [20] следует конечность индекса $|T : C_T(A_1)|$. Подгруппа $C_T(A_1)$ нильпотентна и нормальна в G. Поскольку $P(G) = \langle 1 \rangle$, $C_T(A_1)$ не имеет кручения и поэтому абелева. Кроме того, периодическая часть $A_2 / C_T(A_1)$ конечна. Положим $B_1 = A_1$, $B_2 = = C_T(A_1)$, $B_3 = A_2$. Используя аналогичные аргументы, можно построить ряд нормальных подгрупп

$$\langle 1 \rangle = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_s \leq B_{s+1} = S,$$

удовлетворяющих следующим условиям: факторы B_{j+1} / B_j либо конечны, либо являются абелевыми группами без кручения конечного 0-ранга, $0 \leq j \leq s - - 1$, а последний фактор B_{s+1} / B_s является абелевой группой бесконечного 0-ранга. В каждом абелевом факторе без кручения B_{j+1} / B_j выберем S-инвариантную подгруппу D / A_j наименьшего возможного 0-ранга. Пусть L / D — периодическая часть B_{j+1} / D, тогда и L будет S-инвариантной подгруппой. Кроме того, L / B_j — S-рационально неприводима и B_{j+1} / L не имеет кручения. Другими словами, не теряя общности можно допустить, что каждый абелев фактор без кручения B_{j+1} / B_j является S-рационально неприводимым.

Если B_s / B_{s-1} конечен, то почти очевидно то обстоятельство, что S / B_{s-1} включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга. Предположим теперь, что B_s / B_{s-1} — абелева группа без кручения. Если $B_s / B_{s-1} \leq \leq \zeta(S / B_{s-1})$, то группа S / B_{s-1} нильпотентна и поэтому включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга (см., например, [21], следствие 2 теоремы 6.36). Наконец, предположим, что $\zeta(S/B_{s-1})$ не включает в себя подгруппу B_s/B_{s-1}. Из леммы 2 статьи [22] снова получаем, что S/B_{s-1} включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга. С помощью аналогичных аргументов через конечное число шагов получим, что и группа G включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга.

Лемма 1.7 доказана.

1.8. **Лемма.** *Пусть H — нормальная подгруппа группы G, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) H *не имеет кручения*;

2) $H \leq \zeta_n(G)$ ($\zeta_n(G)$ — *гиперцентр группы* G, *имеющий натуральный номер* n);

3) G/H — *локально конечная группа.*

Тогда $\gamma_n(G)$ *локально конечна* ($\gamma_n(G)$ — *член нижнего центрального ряда группы* G, *имеющий натуральный номер* n).

Доказательство. Не ограничивая общности можно допустить, что n — наименьшее число со свойством $H \leq \zeta_n(G)$. Лемму будем доказывать индукцией по числу n. Пусть сначала $n = 1$, т. е. $H \leq \zeta(G)$. В этом случае $[G, G]$ — локально конечная подгруппа (см., например, [19], следствие теоремы 4.12). Пусть теперь $n > 1$. Положим $C = H \cap \zeta(G)$. По индуктивному допущению $\gamma_{n-1}(G/C) = P/C$ — локально конечная группа. Снова используя следствие теоремы И. Шура (см., например, [19], следствие теоремы 4.12), получаем, что $[P, P]$ — локально конечная подгруппа. Отсюда следует, что подмножество T, состоящее из всех элементов конечного порядка подгруппы P, будет (характеристической) подгруппой P. В частности, T нормальна во всей группе G. Из включения $[P, P] \leq T$ следует, что P/T — абелева группа без кручения. Далее, P/T включает в себя подгруппу CT/T, для которой $(P/T)/(CT/T)$ периодическая. Включение $CT/T \leq \zeta(G/T)$ и тот факт, что в абелевой группе без кручения операция извлечения корня однозначна, приводят к соотношению $P/T \leq \zeta(G/T)$. В свою очередь, последнее включение влечет тот факт, что G/T — нильпотентная группа ступени n. Таким образом, $\gamma_n(G) \leq T$, что и доказывает лемму 1.8.

С помощью аналогичных рассуждений доказывается также следующая лемма.

1.9. **Лемма.** *Пусть H — нормальная разрешимая ступени d подгруппа группы G, L — такая подгруппа $C_G(H)$, что $L \geq H$ и L/H локально конечна. Тогда член ряда коммутантов подгруппы L, имеющий номер d, является локально конечной подгруппой.*

1.10. **Предложение.** *Пусть G — группа бесконечного 0-ранга, у которой $P(G) = \langle 1 \rangle$. Если G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен, то G включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга.*

Доказательство. Пусть L — локально нильпотентный радикал группы G. Из равенства $P(G) = \langle 1 \rangle$ следует, что L — неединичная подгруппа. Если допустить, что L имеет бесконечный 0-ранг, то из теоремы А. И. Мальцева (см., например, [21], следствие 2 теоремы 6.36) получаем, что L включает в себя абелеву подгруппу бесконечного 0-ранга. Поэтому будем считать, что L имеет конечный 0-ранг. Поскольку $P(G) = \langle 1 \rangle$, L — локально нильпотентная подгруппа без кручения. Тогда из теоремы А. И. Мальцева (см., например, [21], следствие 2 теоремы 6.36) следует, что L — нильпотентная подгруппа конечного специального ранга. Пусть $C = C_G(L)$. Предположим, что подгруппа L не включает в себя C. Тогда CL/L — неединичная нормальная подгруппа G/L. Из условий следует, что либо ее локально нильпотентный радикал R/L неединичен, либо неединичным будет ее локально конечный радикал F/L. Допустим, что $R \neq L$. Нетрудно показать, что L будет локально нильпотентным радикалом и в подгруппе R. Из теоремы Б. И. Плоткина (см., например, [19], лемма 2.32) получаем включение $C_R(L) \leq L$, которое показывает, что $R = L$. Отсюда следует, что $F/L \neq \langle 1 \rangle$. Из леммы 1.8 и условия $P(G) = \langle 1 \rangle$ получаем, что подгруппа F нильпотентна. Но тогда $F \leq L$. Полученное противоречие доказывает включение $C_R(L) \leq L$. Другими словами, G/L изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}(L)$. Обозначим через S/L максимальную нормальную радикальную подгруппу группы G/L. Поскольку ступень разрешимости произвольной разрешимой подгруппы $\mathrm{Aut}(L)$ ограничена функцией от ранга L (см., например, [23], гл. 9, § 3), S/L разрешима. Но тогда и S разрешима. Если допустить теперь, что S имеет бесконечный 0-ранг, то из леммы 1.7 получаем, что S включает в себя абелеву подгруппу бесконечного 0-ранга. Поэтому рассмотрим теперь случай, когда S/L имеет конечный 0-ранг. Положим $P(G/L) = P/L$. Тогда P/L конечна (см., например, [23], гл. 9, § 3), а $(S/L)/(S/L \bigcap P/L)$ имеет конечный специальный ранг [24]. Из конечности P/L получаем, что S/L является разрешимой A_4-группой. Предположим, что фактор-группа G/S бесконечна. Пусть $Z/L = C_{G/L}(S/L)$. Обозначим через T/S максимальную нормальную локально конечную подгруппу G/S. Если допустить, что T/S конечна, то нетрудно получить, что локально нильпотентный радикал G/S неединичен. Но это противоречит выбору подгруппы S. Полученное противоречие доказывает бесконечность T/S. Положим $U/L = T/L \bigcap Z/L$. Фактор-группа T/U конечна (см., например, [23], гл. 9, § 3). Из леммы 1.9 вытекает существование в U/L характеристической локально конечной подгруппы V/L такой, что U/V разрешима. В частности, $V/L \leq P/L$, а поэтому V/L конечна. Но тогда подгруппа $W/L = C_{U/L}(V/L)$ имеет конечный индекс в U/L. Очевидно, подгруппа W/L разрешима. Поскольку она нормальна в G/L, то $(S/L)(W/L)$ — разрешимая нормальная подгруппа. Из выбора S/L получаем равенство $S/L = (S/L)(W/L)$, из которого, в частности, следует конечность T/S. Таким образом, снова получаем противоречие, которое показывает, что S/L имеет бесконечный 0-ранг. Этот случай уже был рассмотрен.

Предложение 1.10 доказано.

***1.11.* Теорема.** *Пусть G — группа бесконечного 0-ранга, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны. Если G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен, то $G/P(G)$ — абелева группа без кручения.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно допустить, что $P(G) = \langle 1 \rangle$. Из предложения 1.10 получаем, что группа G включает в себя абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга. Из предложения 1.6 получаем, что группа G конечна над центром. Поскольку $P(G) = \langle 1 \rangle$, G — абелева группа без кручения (см., например, [19], теорема 4.12).

Теорема 1.11 доказана.

***1.12.* Теорема.** *Пусть G — разрешимая группа, в которой все подгруппы* *бесконечного* 0*-ранга почти нормальны. Предположим, что* G *имеет бесконечный* 0*-ранг и любая конечнопорожденная подгруппа* G *минимаксна. Тогда* G *конечна над центром.*

Доказательство. Положим $P = P(G)$. Из теоремы 1.11 получаем, что G/P — абелева группа без кручения бесконечного 0-ранга. Поэтому эта фактор-группа включает в себя свободную абелеву подгруппу (бесконечного) счетного ранга $\times_{n\in\mathbb{N}}\langle a_n P\rangle$. Рассмотрим подгруппу $H = \langle a_1, a_2\rangle$. Поскольку она разрешима, то имеет ряд нормальных подгрупп

$$\langle 1\rangle = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_k = P\bigcap H \le H,$$

факторы которого абелевы. Тогда H/H_{k-1} удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп (условию Max-n) по теореме Ф. Холла (см., например, [19], теорема 5.34). Отсюда следует, что ее абелева периодическая подгруппа H_k/H_{k-1} является ограниченной. С другой стороны, H минимаксна, а минимаксная ограниченная группа конечна. Итак, H_k/H_{k-1} конечна, а значит, H/H_{k-1} — полициклическая. Повторяя эти же аргументы конечное число раз, получаем конечность подгруппы $P\bigcap H$. Это означает, что $[H, H]$ конечна, а поскольку H конечно порождена, то $H/\zeta(H)$ конечна. Тогда найдется такое натуральное число t, что $(a_2)^t = b_2 \in \zeta(H)$, в частности, $\langle a_1, b_2\rangle = \langle a_1\rangle\times\langle b_2\rangle$. Использовав аналогичные рассуждения, покажем теперь, что и подгруппа $L = \langle a_1, b_2, a_3\rangle$ конечна над центром, так что найдется такое натуральное число m, что $(a_3)^m = b_2 \in \zeta(L)$, в частности, $\langle a_1, b_2, b_3\rangle = \langle a_1\rangle\times\langle b_2\rangle\times\langle b_3\rangle$. Применение аналогичных рассуждений показывает, что группа G включает в себя свободную абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга. Осталось применить предложение 1.6.

Теорема 1.12 доказана.

1.13. **Теорема.** *Пусть* G *— группа бесконечного* 0*-ранга, в которой все подгруппы бесконечного* 0*-ранга почти нормальны, и предположим, что* G *имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен. Если* G *локально нетерова, то* G *конечна над центром.*

Доказательство. Положим $P = P(G)$. Из теоремы 1.11 получаем, что G/P — абелева группа без кручения бесконечного 0-ранга. Пусть L — конечнопорожденная подгруппа G. Поскольку L удовлетворяет условию максимальности для всех подгрупп, она почти полициклическая. Поэтому $L \bigcap P$ конечна. Так как $L/(L \bigcap P)$ абелева, L конечна над центром. Теперь, повторяя рассуждения предыдущей теоремы, получаем, что G включает в себя свободную абелеву подгруппу бесконечного 0-ранга, и применение предложения 1.6 завершает доказательство теоремы 1.13.

1.14. Следствие. *Пусть* G *— локально нильпотентная группа бесконечного* 0*-ранга, в которой все подгруппы бесконечного* 0*-ранга почти нормальны. Тогда* G *конечна над центром.*

Следующая лемма не является новой. Однако мы не смогли отыскать соответствующую ссылку, поэтому приводим ее с доказательством.

1.15. **Лемма.** *Пусть* G *—* FC*-гиперцентральная группа. Если* G *конечно порождена, то она почти нильпотентна.*

Доказательство. Предположим сначала, что G — FC-нильпотентная группа. Пусть

$$\langle 1\rangle = F_0 \le F_1 \le \ldots \le F_n = G$$

— верхний FC-центральный ряд G. Достаточно показать, что $G/C_G(F_{i+1}/F_i)$

конечна для каждого i, $0 \le i \le n-1$. Воспользуемся индукцией по числу n. Если $n = 1$, то G — FC-группа, т. е. G конечна над центром. Пусть теперь $n > 1$, и предположим, что уже доказана конечность фактор-групп $G/C_G(F_{i+1}/F_i)$ для $n > i \ge 1$. Положим $H = C_G(F_2/F_1) \cap \ldots \cap C_G(F_n/F_{n-1})$. Тогда G/H конечна и H/F_1 нильпотентна (см., например, [25], теорема 1.C.1). В частности, G/F_1 конечно определена (см., например, [19], следствие 1.43). Отсюда следует, что $F_1 = \langle g_1 \rangle^G \ldots \langle g_s \rangle^G$ для некоторых элементов $g_1, \ldots, g_s \in FC(G)$ [19] (следствие 1.43). Положим $U = C_G(\langle g_1 \rangle^G) \cap \ldots \cap C_G(\langle g_s \rangle^G)$. Тогда G/U конечна и $U = C_G(F_1)$. Полагаем теперь $C = H \cap U$, тогда G/C конечна и C нильпотентна (см., например, [25], теорема 1.C.1).

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$\langle 1 \rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots \le C_\alpha \le C_{\alpha+1} \le \ldots \le C_\gamma = G$$

— верхний FC-центральный ряд G. Рассмотрим множество

$$\Sigma = \{\alpha \mid G/C_\alpha \text{ – почти нильпотентная группа}\}.$$

Поскольку $G = \bigcup_{\alpha \le \gamma} C_\alpha$, то $\Sigma \ne \varnothing$. Пусть β — наименьший элемент Σ. Если $\beta = 0$, то G почти нильпотентна. Предположим, что $\beta > 0$. Сначала рассмотрим случай, когда β — непредельное порядковое число. Поскольку $C_\beta / C_{\beta-1}$ — FC-центр $G/C_{\beta-1}$, то $G/C_{\beta-1}$ — FC-нильпотентна. Группа G конечно порождена. Используя приводимые выше рассуждения, нетрудно показать, что $G/C_{\beta-1}$ почти нильпотентна. Но это противоречит выбору β. Это противоречие показывает, что β — предельный ординал. Поскольку G/C_β почти нильпотентна, она конечно определена. Тогда $C_\beta = \langle g_1 \rangle^G \ldots \langle g_s \rangle^G$ для некоторых элементов $g_1, \ldots, g_s \in C_\beta$ (см., например, [19], следствие 1.43). Но тогда существует такое порядковое число $\delta < \beta$, что $g_1, \ldots, g_s \in C_\delta$, в частности $C_\beta = C_\delta$. Получили противоречие. Это противоречие показывает, что G почти нильпотентна.

Лемма 1.15 доказана.

1.16. Следствие. *Пусть G — FC-гиперцентральная группа бесконечного 0-ранга, в которой все подгруппы бесконечного 0-ранга почти нормальны. Тогда G конечна над центром.*

2. Группы, в которых все подгруппы бесконечного секционного *p*-ранга почти нормальны. *Будем говорить, что группа G имеет конечный секционный p-ранг $r_p(G) = r$ (p — простое число), если порядок любой элементарной абелевой p-секции группы G не превышает числа p^r. Группа G имеет конечный секционный ранг, если $r_p(G)$ конечно для любого простого числа p.*

Будем говорить, что группа G имеет конечный специальный ранг $r(G) = r$, если любая ее конечнопорожденная подгруппа может быть порождена не более чем r элементами. Специальный ранг группы называют еще рангом Мальцева – Прюфера.

Мы не будем здесь детально обсуждать связи между понятиями *0*-ранга, секционного p-ранга и специального ранга. Отметим, например, что для абелевых групп без кручения *0*-ранг совпадает со специальным рангом, а для абелевых p-групп (p — простое число) секционный p-ранг совпадает со специальным рангом.

2.1. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны.*

1. *Если H — подгруппа бесконечного секционного p-ранга, то и любая ее подгруппа бесконечного секционного p-ранга почти нормальна.*

2. *Если H — нормальная подгруппа G, то любая подгруппа бесконечного секционного p-ранга фактор-группы G/H почти нормальна.*

Утверждение леммы почти очевидно.

***2.2.* Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны, $g \in G$, $H = \times_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, где H_λ — неединичная $\langle g\rangle$-инвариантная подгруппа для любого $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что подмножество*

$$\Sigma(p) = \{\lambda \in \Lambda \,|\, H_\lambda \text{ имеет неединичную элементарную абелеву } p\text{-секцию}\}$$

бесконечно. Тогда $\langle g\rangle$ почти нормальна в G.

Доказательство этой леммы практически дословно повторяет доказательство леммы 1.2, поэтому мы его опускаем.

2.3. Следствие. *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны, $H = \times_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, где H_λ — неединичная подгруппа для любого $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что подмножество*

$$\Sigma(P) = \{\lambda \in \Lambda \,|\, H_\lambda \text{ имеет неединичную элементарную абелеву } p\text{-секцию}\}$$

бесконечно. Тогда $H \le FC(G)$.

2.4. Следствие. *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны. Если G включает в себя абелеву подгруппу A бесконечного секционного p-ранга, то $A \le FC(G)$, в частности, $FC(G)$ имеет бесконечный секционный p-ранг.*

Доказательство. Действительно, пусть A — абелева подгруппа, имеющая бесконечный секционный p-ранг. Пусть T — периодическая часть подгруппы A; обозначим через P ее силовскую p-подгруппу. Если P имеет бесконечный секционный p-ранг, то P включает в себя подгруппу $E = \times_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, где E_λ — циклическая подгруппа простого порядка p для каждого $\lambda \in \Lambda$ и множество индексов Λ бесконечно. Очевидно, подгруппа E_λ — $\langle a\rangle$-инвариантна для каждого элемента $a \in A$. Применяя лемму 2.2, получаем включение $A \le FC(G)$. Допустим теперь, что P (а значит, и T) имеет конечный секционный p-ранг. Тогда $r_p(G/T)$ бесконечен. В этом случае, очевидно, G/T имеет бесконечный 0-ранг. Как и в следствии 1.4, получаем, что A включает в себя подгруппу $\times_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, где C_λ — бесконечная циклическая подгруппа для каждого $\lambda \in \Lambda$ и множество индексов Λ бесконечно. Очевидно, подгруппа C_λ — $\langle a\rangle$-инвариантна для каждого элемента $a \in A$. Применяя лемму 2.2, снова получаем включение $A \le FC(G)$.

Следствие 2.4 доказано.

***2.5.* Лемма.** *Пусть G — локально конечная группа, L/K — ее бесконечная элементарная p-секция. Тогда G включает в себя бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу.*

Доказательство. Выберем в секции L/K (бесконечную) счетную элементарную абелеву p-подгруппу B. Пусть $B/K = \times_{n\in\mathbb{N}} \langle b_n K\rangle$ и $B_n/K = \times_{m\le n} \langle b_m K\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $|B_1/K| = p$, найдется такая циклическая p-подгруппа P_1, что $B_1 = P_1 K$. Пусть в B уже выбраны конечные p-подгруппы $P_1, \ldots, P_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$P_1 \le \ldots \le P_n \quad \text{и} \quad B_j = KP_j \quad \text{для любого} \quad j \le n.$$

Выберем в B конечную подгруппу F, для которой $B_{n+1} = KF$, а в подгруппе F силовскую p-подгруппу P_{n+1}, включающую в себя P_n. Поскольку $B_{n+1}/K = FK/K \cong F/(F\bigcap K)$ — p-группа, из свойств силовских подгрупп конечных групп получаем равенство $F = P_{n+1}/(F\bigcap K)$, которое, в свою очередь, влечет равенство $B_{n+1} = FK = P_{n+1}/(F\bigcap K)K = P_{n+1}K$. Индуктивные рассуждения показывают теперь, что можно построить бесконечную возрастающую последовательность конечных p-подгрупп, удовлетворяющих условиям

$$P_1 \le \ldots \le P_n \le \ldots \quad \text{и} \quad B_j = KP_j \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, тогда P — такая p-подгруппа, что $B = PK$. Из соотношений $B/K = PK/K \cong P/(P\bigcap K)$ получаем, что P имеет бесконечный секционный p-ранг. Если допустить теперь, что P удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то согласно теореме С. Н. Черникова подгруппа P — черниковская (см., например, [19], теорема 3.32). Но черниковская p-подгруппа имеет конечный секционный p-ранг. Это означает, что P не может удовлетворять условию минимальности для абелевых подгрупп, поэтому она включает в себя бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу.

Лемма 2.5 доказана.

***2.6.* Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны. Если G — FC-группа бесконечного секционного p-ранга, то G конечна над центром.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда G — периодическая группа. Из леммы 2.5 получаем, что G включает в себя бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу B. Пусть H — произвольная подгруппа G. Если пересечение $H\bigcap B$ бесконечно, то $H\bigcap B$ — подгруппа бесконечного секционного p-ранга, а потому она почти нормальна. Допустим теперь, что $H\bigcap B$ конечна. Выберем в B подгруппу U со свойством $B = U\times(H\bigcap B)$. Тогда U бесконечна и $U\bigcap H = \langle 1\rangle$. В U выбираем две такие бесконечные подгруппы V и W, что $U = V\times W$. Каждая из следующих подгрупп $N_G(V)$, $N_G(W)$ имеет конечный индекс в G, а потому конечный индекс в G имеет и подгруппа $Y = N_G(V)\bigcap N_G(W)$. Положим $D = H\bigcap Y$, тогда индекс $|H:D|$ конечен. Поэтому можно выбрать такую конечную подгруппу F, нормальную в H, что $H = FD$. Обе подгруппы DV и DW имеют бесконечный секционный p-ранг, поэтому почти нормальны в G. Из равенства $D = DV\bigcap DW$ получаем, что D почти нормальна. Поскольку в FC-группе любая конечная подгруппа почти нормальна, то и $H = FD$ почти нормальна. Итак, любая подгруппа G почти нормальна. Но в этом случае G конечна над центром по теореме Б. Неймана [4].

Пусть теперь G — непериодическая группа. Выберем в центре группы G максимальную подгруппу без кручения Z. Поскольку фактор-группа $G/\zeta(G)$ периодическая (см., например, [19], теорема 4.32), то и G/Z периодическая. Допустим сначала, что подгруппа Z имеет бесконечный секционный p-ранг. Пусть L — произвольная подгруппа, включающая в себя Z, тогда и она имеет бесконечный секционный p-ранг. Другими словами, L почти нормальна в G. Отсюда следует, что любая подгруппа G/Z почти нормальна. Но в этом случае G/Z конечна над центром по теореме Б. Неймана [4]. Если же подгруппа Z имеет конечный секционный p-ранг, то периодическая фактор-группа G/Z имеет бесконечный секционный p-ранг. Из доказанного выше снова получаем, что G/Z конечна над центром. Как и в следствии 1.5, можно показать, что в этом случае и вся группа G имеет центр конечного индекса.

Лемма 2.6 доказана.

2.7. **Предложение.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны. Если G включает в себя абелеву подгруппу бесконечного секционного p-ранга, то G конечна над центром.*

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа секционного p-ранга группы G. Из леммы 2.4 получаем включение $A \leq FC(G)$. В частности, FC-центр имеет бесконечный секционный p-ранг. Положим $C = \zeta(FC(G))$. Тогда из леммы 2.6 получаем, что фактор-группа $FC(G)/C$ конечна, а значит, C имеет бесконечный секционный p-ранг. Пусть $1 \neq c_1 \in C$, $C_1 = \langle c_1 \rangle^G$. Поскольку $c_1 \in FC(G)$, подгруппа C_1 конечно порождена. Выберем в C подгруппу B_1, максимальную относительно $C_1 \cap B_1 = \langle 1 \rangle$. Очевидно, C/B_1 — группа конечного специального ранга, в частности, она имеет конечный секционный p-ранг. В свою очередь, это означает, что подгруппа B_1 имеет бесконечный секционный p-ранг. Теперь осталось почти дословно повторить все остальные аргументы из доказательства предложения 1.6.

Предложение 2.7 доказано.

2.8. **Теорема.** *Пусть G — локально почти разрешимая группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны. Если G включает в себя периодическую подгруппу бесконечного секционного p-ранга, то G конечна над центром.*

Доказательство. Пусть S — периодическая подгруппа, имеющая бесконечный секционный p-ранг, T — максимальная периодическая подгруппа, включающая в себя S. Тогда T также имеет бесконечный секционный p-ранг, а потому она почти нормальна в G. Но тогда T нормальна в G (см., например, [26], § 54), т. е. T содержит все элементы конечного порядка. Поскольку G локально почти разрешима, то T локально конечна. Тогда из леммы 2.5 получаем, что T включает в себя бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу A, а из предложения 2.7 — что G имеет центр конечного индекса.

Теорема 2.8 доказана.

2.9. **Теорема.** *Пусть G — радикальная группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны. Если G имеет бесконечный секционный p-ранг, но все периодические подгруппы имеют конечные секционные p-ранги, то $G/O_{p'}(G)$ конечна над центром.*

Доказательство. Положим $R = O_{p'}(G)$, $P = P(G)$. Не ограничивая общности можно допустить, что $R = \langle 1 \rangle$. Поскольку каждая силовская p-подгруппа P имеет конечный секционный p-ранг, то каждая силовская p-подгруппа P является черниковской, а так как G разрешима, то P — черниковская подгруппа по теореме М. И. Каргаполова (см., например, [27], теорема 3.17). Если допустить теперь конечность $r_0(G)$, то G/P имеет конечный специальный ранг [12] (теорема 3), а потому G/P имеет конечный секционный p-ранг. Это противоречие доказывает бесконечность 0-ранга группы G. Но тогда и G/P имеет бесконечный 0-ранг. Из предложения 1.10 получаем, что G/P включает в себя абелеву подгруппу A/P без кручения, имеющую бесконечный 0-ранг. В частности, A/P имеет бесконечный секционный p-ранг. Теперь из предложения 2.7 получаем, что G имеет центр конечного индекса.

Теорема 2.9 доказана.

2.10. **Теорема.** *Пусть G — разрешимая группа, в которой все подгруппы бесконечного секционного p-ранга почти нормальны, и предположим, что любая конечнопорожденная подгруппа G минимаксна. Если G имеет бесконечный секционный p-ранг, то G конечна над центром.*

В самом деле, если G включает в себя периодическую подгруппу бесконечного секционного p-ранга, то используется теорема 2.8. Если же все периодические подгруппы имеют конечный секционный p-ранг, то из теоремы 2.9 получаем, что $G/P(G)$ — абелева группа без кручения, а затем используем рассуждения, аналогичные таковым при доказательстве теоремы 1.12.

Аналогичная ситуация и с последующими утверждениями.

2.11. **Теорема.** *Пусть G — локально нетерова радикальная группа бесконечного секционного p-ранга. Если все ее подгруппы, имеющие бесконечный секционный p-ранг, почти нормальны, то G конечна над центром.*

2.12. Следствие. *Пусть G — локально нильпотентная группа бесконечного секционного p-ранга. Если все ее подгруппы, имеющие бесконечный секционный p-ранг, почти нормальны, то G конечна над центром.*

2.13. Следствие. *Пусть G — FC-гиперцентральная группа бесконечного секционного p-ранга. Если все ее подгруппы, имеющие бесконечный секционный p-ранг, почти нормальны, то G конечна над центром.*

2.14. **Теорема.** *Пусть G — радикальная группа бесконечного секционного p-ранга. Если все ее подгруппы, имеющие бесконечный секционный p-ранг, почти нормальны, то G конечна над центром.*

Доказательство. Положим $P = P(G)$. Если G включает в себя периодическую подгруппу бесконечного секционного p-ранга для некоторого простого числа p, то согласно теореме 2.8 G конечна над центром. Предположим теперь, что все периодические подгруппы имеют конечный секционный p-ранг. Из теоремы 2.9 следует, что G/P — абелева группа без кручения. Поскольку каждая силовская p-подгруппа P имеет конечный секционный p-ранг, каждая силовская p-подгруппа P является черниковской для любого простого числа p. Согласно теореме М. И. Каргаполова (см., например, [27], теорема 2.5.14) G включает в себя такую нормальную абелеву делимую подгруппу D, что G/D — финитно аппроксимируемая группа с конечными силовскими p-подгруппами для всех простых чисел p. Поскольку силовские подгруппы D являются черниковскими, то $D \leq FC(G)$. Пусть L/D — локально нильпотентный радикал P/D. Поскольку его силовские подгруппы конечны, то $L/D \leq FC(G/D)$. Теперь нетрудно получить, что G — FC-гиперцентральная группа, а затем применить следствие 2.13.

Теорема 2.14 доказана.

Следующие два утверждения доказываются небольшой модификацией тех рассуждений, которые использовались для доказательства леммы 2.6 и предложения 2.7.

2.15. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного специального ранга почти нормальны. Если G — FC-группа бесконечного специального ранга, то G конечна над центром.*

2.16. **Предложение.** *Пусть G — группа, в которой все подгруппы бесконечного специального ранга почти нормальны. Если G включает в себя абелеву подгруппу бесконечного специального ранга, то G конечна над центром.*

2.17. **Теорема.** *Пусть G — группа бесконечного специального ранга, имеющая возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен. Если все ее подгруппы, имеющие* *бесконечный секционный ранг, почти нормальны, то* G *конечна над центром.*

Доказательство. Положим $P = P(G)$. Если G включает в себя периодическую подгруппу бесконечного специального ранга, то G включает в себя периодическую абелеву подгруппу бесконечного специального ранга [28]. Из предложения 2.16 получаем, что G конечна над центром. Предположим теперь, что все периодические подгруппы G имеют конечный специальный ранг. Тогда фактор-группа G/P имеет бесконечный специальный ранг. Если допустить теперь, что G/P имеет конечный 0-ранг, то G/P имеет конечный специальный ранг [24]. Таким образом, $r_0(G/P)$ бесконечен. Из предложения 1.10 получаем, что G/P включает в себя абелеву подгруппу A/P бесконечного 0-ранга. Но тогда A/P имеет бесконечный специальный ранг. Из предложения 2.16 следует, что G/P — абелева группа без кручения. Поскольку P имеет конечный специальный ранг, то P почти локально разрешима. Обозначим через L локально разрешимый радикал P, тогда L/P конечна. Отсюда следует конечность $G/C_G(L/P)$. Подгруппа $C_G(L/P)$ уже локально разрешима. Пусть F — произвольная конечнопорожденная подгруппа $C_G(L/P)$. Поскольку $F \bigcap P$ имеет конечный специальный ранг, а $F/(F \bigcap P)$ — абелева и конечно порождена, то F — разрешимая подгруппа конечного специального ранга. Но конечнопорожденная разрешимая группа конечного специального ранга минимаксна согласно теореме Д. Робинсона (см., например, [21], теорема 10.38). Повторяя почти дословно рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1.12, получаем, что $[F, F]$ конечна. Так же, как и в этой теореме, можно получить, что G включает в себя свободную абелеву подгруппу без кручения бесконечного 0-ранга. Теперь из предложения 2.16 следует, что G конечна над центром.

Теорема 2.17 доказана.

3. Группы, в которых все подгруппы бесконечного тотального ранга почти нормальны. Следуя Д. Робинсону [13] (утверждение 6.2), определим *тотальный ранг группы* G *по формуле* $r_{\text{tot}}(G) = r_0(G) + \sum_{p \in \Pi(G)} r_p(G)$.

Абелева группа A имеет конечный тотальный ранг, когда ее периодическая часть T — черниковская, а фактор-группа A/T имеет конечный 0-ранг. Поэтому класс разрешимых групп конечного тотального ранга — это в точности класс разрешимых A_3-групп в смысле А. И. Мальцева, или класс S_1 в обозначениях Д. Робинсона.

3.1. **Теорема.** *Пусть* G *— локально почти разрешимая группа, в которой все подгруппы бесконечного тотального ранга почти нормальны. Если* G *включает в себя периодическую подгруппу бесконечного тотального ранга, то* G *конечна над центром.*

Доказательство. Пусть S — периодическая подгруппа, имеющая бесконечный тотальный ранг, T — максимальная периодическая подгруппа, включающая в себя S. Тогда T также имеет бесконечный тотальный ранг, а потому она почти нормальна в G. Но тогда T нормальна в G (см., например, [26], § 54), т. е. T содержит все элементы конечного порядка. Поскольку G локально почти разрешима, то T — локально конечна. Поскольку T не является черниковской, то T включает в себя абелеву подгруппу B, не являющуюся черниковской (см., например, [25], теорема 5.8). Тогда B — почти нормальна, т. е. $N_G(B)$ имеет конечный индекс в G. Положим $H = \mathrm{Core}_G(N_G(B))$, тогда оба индекса $|G:H|$ и $|B:B \bigcap H|$ конечны. Из конечности последнего получаем, что $C = B \bigcap H$ не является черниковской, а потому C почти нормальна, более того, любая подгруппа, включающая C, также почти нормальна.

Очевидно, C нормальна в H, так что H/C конечна над центром [4]. Пусть $\left\{C^x \mid x \in G\right\} = \left\{x_1^{-1}Cx_1, \ldots, x_m^{-1}Cx_m\right\}$. Для любого $x \in G$ $H/C^x \cong H^x/C^x \cong H/C$ конечна над центром, а потому из вложения

$$H/\mathrm{Core}_G(C) \le H/x_1^{-1}Cx_1 \times \ldots \times H/x_m^{-1}Cx_m,$$

вытекающего из теоремы Рэмака, получаем, что $H/\mathrm{Core}_G(C)$ конечна над центром. Из конечности индекса $|G:H|$ и коммутативности подгруппы C следует теперь, что группа G почти разрешима. Если G имеет бесконечный специальный ранг, то из предложения 2.17 получаем, что G имеет центр конечного индекса.

Предположим теперь, что G имеет конечный специальный ранг. Это означает, что все силовские подгруппы T являются черниковскими. В свою очередь, это влечет бесконечность множества $\Pi(C)$ Подгруппа $E = \langle x_1^{-1}Cx_1, \ldots$ $\ldots, x_m^{-1}Cx_m\rangle$ нормальна в G. С другой стороны, она периодическая нильпотентная подгруппа по теореме Фиттинга (см., например, [19], теорема 2.18). Итак, $E = \times_{p\in\Pi(E)} B_p$, где B_p — силовская p-подгруппа E и множество $\Pi(E)$ бесконечно. Пусть $x \in G$, тогда можно выбрать такое бесконечное подмножество $\pi \subseteq \Pi(E)$, что $\langle x\rangle \bigcap \times_{p\in\pi} E_p = \langle 1\rangle$. Найдутся два бесконечных подмножества ρ, σ со следующими свойствами: $\rho \bigcup \sigma = \pi$, $\rho \bigcap \sigma = \varnothing$. Тогда обе подгруппы $\langle x\rangle(\times_{p\in\rho} E_p)$ и $\langle x\rangle(\times_{p\in\sigma} E_p)$ имеют бесконечный тотальный ранг, а потому почти нормальны. Следовательно, и их пересечение $\langle x\rangle(\times_{p\in\rho} B_p) \bigcap$ $\bigcap \langle x\rangle(\times_{p\in\sigma} B_p) = \langle x\rangle$ почти нормально. В частности, $x \in FC(G)$, т. е. $G =$ $= FC(G)$.

Пусть R — произвольная подгруппа G. Если пересечение $R \bigcup E$ бесконечно, то $R \bigcap E$ — подгруппа бесконечного тотального ранга, а потому она почти нормальна. Допустим теперь, что $R \bigcap E$ конечна. Выберем такое бесконечное подмножество $\Xi \subseteq \Pi(E)$, что $R \bigcap \times_{p\in\Xi} E_p = \langle 1\rangle$. Найдутся два бесконечных подмножества Δ, ζ со следующими свойствами: $\Delta \bigcup \zeta = \Xi$, $\Delta \bigcap \zeta = \varnothing$. Тогда обе подгруппы $R(\times_{p\in\Delta} E_p)$ и $R(\times_{p\in\zeta} E_p)$ имеют бесконечный тотальный ранг, а потому почти нормальны. Следовательно, и их пересечение $R(\times_{p\in\Delta} B_p) \bigcap R(\times_{p\in\zeta} B_p) = R$ — почти нормальная подгруппа. Итак, любая подгруппа G почти нормальна. Но в этом случае G конечна над центром согласно теореме Б. Неймана [4].

Теорема 3.1 доказана.

3.2. **Теорема.** *Пусть G — группа бесконечного тотального ранга, имеющая возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен. Если все ее подгруппы, имеющие бесконечный тотальный ранг, почти нормальны, то G конечна над центром.*

Доказательство. Положим $P = P(G)$. Если G включает в себя периодическую подгруппу бесконечного тотального ранга, то согласно теореме 3.1 G конечна над центром. Поэтому надо рассмотреть случай, когда P имеет конечный тотальный ранг. В этом случае P — черниковская подгруппа. В свою очередь, отсюда вытекает, что $r_0(G/P)$ бесконечен. Любая подгруппа G/P, имеющая бесконечный 0-ранг, имеет и бесконечный тотальный ранг, а потому почти нормальна. Из теоремы 1.11 получаем, что G/P — абелева группа без кручения. Таким образом, G — FC-гиперцентральная группа, и осталось воспользоваться следствием 1.16.

Теорема 3.2 доказана.

4. Группы, в которых все подгруппы бесконечного минимаксного ранга почти нормальны. Следуя Д. И. Зайцеву [15], будем говорить, что *группа* G *имеет конечный минимаксный ранг* $r_{\mathrm{mmx}}(G) = m$, *если для каждой конечной цепочки подгрупп* $\langle 1 \rangle = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$ *такой, что все индексы* $|G_{j+1} : G_j|$ *бесконечны, имеет место соотношение* $n \leq m$ *и существует цепочка подгрупп со свойством* $n = m$. *Если такой номер не существует, то минимаксный ранг группы считаем бесконечным, а если* G *конечна, то полагаем* $r_{\mathrm{mmx}}(G) = 0$.

Отметим, что в статье [15] Д. И. Зайцев использовал другой термин — показатель минимальности, который оказался не очень удачным. Поэтому позднее Д. И. Зайцев отказался от него и предложил более точный термин — минимаксный ранг [29] (раздел 4б, § 3). Д. Робинсон использует другой термин — минимаксная длина группы [21] (предложение 10.3). Локально почти разрешимая группа G тогда и только тогда имеет конечный минимаксный ранг, когда она минимаксна (т. е. G имеет конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию Max или Min) (Д. И. Зайцев [30]; отметим, что для локально разрешимых групп эта теорема была доказана в [31]). Кроме того, если все абелевы подгруппы радикальной группы G имеют конечные минимаксные ранги, то сама G минимаксна (Р. Бэр [32], Д. И. Зайцев [33]). Отметим также, что если H — нормальная подгруппа группы G, то $r_{\mathrm{mmx}}(G) = r_{\mathrm{mmx}}(H) + r_{\mathrm{mmx}}(G/H)$.

Пусть G — абелева минимаксная группа. Выберем в ней такую конечнопорожденную подгруппу без кручения H, что G/H — периодическая (а значит, черниковская). Обозначим через D/H делимую часть G/H и положим $\mathrm{Sp}(G) = \Pi(D/H)$. Если K — другая конечнопорожденная подгруппа без кручения, определяющая периодическую фактор-группу G/K, то оба фактора $H/(H \cap K)$ и $K/(H \cap K)$ конечны. Это означает, что делимые части G/H и G/K изоморфны, так что множество $\mathrm{Sp}(G)$ является инвариантом группы G. Пусть $p \notin \Pi(G/H)$, тогда H/H^p — конечная силовская p-подгруппа G/H^p и $G/H^p = H/H^p \times R/L^p$ (см., например, [18], теорема 27.5). Это показывает, что $G \neq G^p$.

4.1. **Предложение.** *Пусть* G *имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен. Если все ее подгруппы, имеющие бесконечный минимаксный ранг, почти нормальны, то либо* G *конечна над центром, либо* G *— почти разрешимая* A_3*-группа.*

Доказательство. Предположим сначала, что G имеет бесконечный тотальный ранг. Поскольку любая минимаксная подгруппа имеет конечный тотальный ранг, из теоремы 3.2 получаем, что G конечна над центром. Пусть теперь G имеет конечный тотальный ранг. Легко видеть, что в этом случае G имеет конечный ряд нормальных подгрупп

$$\langle 1 \rangle = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G,$$

факторы которого — локально конечные группы или локально нильпотентные группы без кручения. Если H_{j+1}/H_j — локально нильпотентная группа без кручения, то она является нильпотентной группой конечного 0-ранга (см., например, [21], теорема 6.36). Если же H_{j+1}/H_j — локально конечная группа, то ее абелевы подгруппы являются черниковскими, а потому H_{j+1}/H_j — черниковская группа (см., например, [25], теорема 5.8). Таким образом, G — почти разрешимая A_3-группа.

Предложение 4.1 доказано.

В работе Д. Кутоло и Л. А. Курдаченко [9] рассмотрены группы со слабыми условиями минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся почти нормальными. В этой же работе доказано, что классы этих групп при некоторых дополнительных ограничениях совпадают с классом групп, в которых все подгруппы, не являющиеся минимаксными, почти нормальны. Таким образом, описание почти разрешимых A_3-групп, все подгруппы которых, имеющие бесконечный минимаксный ранг, почти нормальны, можно найти в работе [9].

Минимаксные почти разрешимые группы, как это видно из их определения, возникают из двух важных классов групп: черниковских и почти полициклических. Поэтому естественно возникает вопрос о строении групп, в которых все подгруппы, не являющиеся черниковскими, почти нормальны, и групп, в которых все подгруппы, не являющиеся почти полициклическими, почти нормальны. В работе Л. А. Курдаченко и В. В. Пылаева [8] рассмотрены группы с условием минимальности для подгрупп, не являющихся почти нормальными. Очевидно, что почти разрешимые группы, в которых все подгруппы, не являющиеся черниковскими, почти нормальны, удовлетворяют условию минимальности для подгрупп, не являющихся почти нормальными. Применяя основной результат работы [8], получаем следующий результат.

4.2. **Теорема.** *Пусть G — (нечерниковская) локально почти разрешимая группа, в которой все подгруппы, не являющиеся черниковскими, почти нормальны. Тогда G — группа одного из следующих типов*:

1) *G конечна над центром*;

2) *$G = A \leftthreetimes \langle g \rangle$, где $|g| = p$ — простое число, $A = C_G(A)$ — свободная абелева группа, $r_0(A) = p - 1$, g индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм*;

3) *$G = D \times (A \leftthreetimes \langle g \rangle)$, где D — делимая черниковская подгруппа, $A \leftthreetimes \langle g \rangle$ — группа типа* (2);

4) *G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что G/F — группа типа* (2);

5) *G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что G/F — группа типа* (3).

Группы, все подгруппы которых, не являющиеся почти полициклическими, почти нормальны, еще не рассматривались. Поэтому их рассмотрение становится нашей следующей целью.

4.3. **Лемма.** *Пусть группа G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, произвольный фактор которого локально нильпотентен или локально конечен. Если все ее подгруппы, не являющиеся почти полициклическими, почти нормальны, то либо G конечна над центром, либо G — почти разрешимая A_3-группа.*

Действительно, любая подгруппа, не являющаяся минимаксной, не будет и почти полициклической, поэтому достаточно использовать предложение 4.1.

4.4. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой почти нормальны все подгруппы, не являющиеся почти полициклическими. Если H — такая ее нормальная подгруппа, что любая подгруппа, включающая H, не является почти полициклической, то G/H конечна над центром.*

Действительно, любая подгруппа, включающая в себя H, почти нормальна, т. е. любая подгруппа G/H почти нормальна. Но в этом случае G/H конечна над центром по теореме Б. Неймана [4].

4.5. **Лемма.** *Пусть G — группа, в которой почти нормальны все подгруппы, не являющиеся почти полициклическими. Тогда любая подгруппа G, не имеющая конечной системы порождающих, почти нормальна в G.*

Группы, в которых любая подгруппа, не имеющая конечной системы порождающих, почти нормальна (анти-FC-группы), изучались в работе С. Франциози, Ф. де Жиованни и Л. А. Курдаченко [10]. Следующие две леммы очевидны.

4.6. **Лемма.** *Пусть G — локально конечная группа, в которой почти нормальны все подгруппы, не имеющие конечной системы порождающих. Тогда любая подгруппа G, не являющаяся почти полициклической, почти нормальна в G.*

4.7. **Лемма.** *Пусть G — локально нильпотентная группа, в которой почти нормальны все подгруппы, не имеющие конечной системы порождающих. Тогда любая подгруппа G, не являющаяся полициклической, почти нормальна в G.*

Таким образом, описание локально конечных и локально нильпотентных групп, в которых почти нормальны все подгруппы, не являющиеся почти полициклическими, можно найти в работе [10].

4.8. **Лемма.** *Пусть G — почти разрешимая A_3-группа, в которой почти нормальны все подгруппы, не имеющие конечной системы порождающих. Если подгруппа $P(G)$ бесконечна, то любая подгруппа G, не являющаяся почти полициклической, почти нормальна в G.*

Действительно, подгруппа $P(G)$ — бесконечная черниковская, так что ее делимая часть D неединична. Очевидно, $D \le FC(G)$. Поскольку D не имеет конечной системы порождающих, то G/D конечна над центром. Другими словами, G — FC-нильпотентна. Но тогда любая ее конечнопорожденная подгруппа почти нильпотентна (см. лемму 1.15), в частности, она почти полициклическая.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $P(G)$ конечна. Используя лемму 4.4 и теорему 3.17 работы [10], получаем следующее утверждение.

4.9. **Теорема.** *Пусть G — почти разрешимая A_3-группа с конечной подгруппой $P(G)$. В группе G все подгруппы, не являющиеся полициклическими, тогда и только тогда почти нормальны в G, когда G удовлетворяет следующим условиям:*

1) *G включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу без кручения A конечного 0-ранга, что G/A конечна над центром и конечно порождена;*

2) *A включает в себя такую конечнопорожденную подгруппу B, что A/B — квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p;*

3) *если L — подгруппа A, не имеющая конечной системы порождающих элементов, то $r_0(L) = r_0(A)$.*

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. – 1897. – **48**. – S. 548 – 561.
2. *Miller G. A., Moreno H. C.* Non-abelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – **4**. – P. 389 – 404.
3. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**, № 3. – С. 366 – 372.
4. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – № 1. – S. 76 – 96.
5. *Еремин И. И.* Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Мат. сб. – 1959. – **47**, № 1. – С. 45 – 54.
6. *Еремин И. И.* Группы с конечными классами сопряженных бесконечных подгрупп // Уч. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**, № 2. – С. 13 – 14.
7. *Семко Н. Н., Левищенко С. С., Курдаченко Л. А.* О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 10. – С. 57 – 63.
8. *Курдаченко Л. А., Пылаев В. В.* Группы, богатые почти нормальными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 3. – С. 326 – 330.

9. *Cutolo G., Kurdachenko L. A.* Weak chain conditions for non-almost normal subgroups // Groups 93 (Galway/St. Andrews, Galway, 1993). – London Math. Soc., Lect. Notes Ser. – 1995. – **211**. – P. 120 – 130.
10. *Franciosi S., de Giovanno F., Kurdachenko L. A.* On groups with many almost normal subgroups // Ann. Mat. Pura Appl. – 1995. – **169**, № 4. – P. 35 – 65.
11. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 2. – С. 351 – 352.
12. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Там же. – 1951. – **28**, № 3. – С. 567 – 588.
13. *Robinson D. J. S.* Infinite soluble and nilpotent groups. – London: Queen Mary College Math. Notes, 1968. – 210 p.
14. *Baer R., Heineken H.* Radical groups of finite abelian subgroup rank // Ill. J. Math. – 1972. – **16**, № 4. – P. 533 – 580.
15. *Зайцев Д. И.* Об индексе минимальности группы // Исследование групп с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 72 – 130.
16. *Зайцев Д. И.* Произведение абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – **19**, № 2. – С. 94 – 106.
17. *Franciosi S., de Giovanno F., Newell M. L.* Groups with polycyclic nonnormal subgroups // Algebra Colloq. – 2000. – **7**, № 1. – P. 33 – 42.
18. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т.1. – 336 с.
19. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups, Pt.1. – Berlin: Springer, 1972. – 210 p.
20. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. мат. журн. – 1954. – **6**, № 3. – С. 295 – 304.
21. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups, Pt.2. – Berlin: Springer, 1972. – 254 p.
22. *Robinson D. J. S.* A new treatment of soluble groups with finiteness conditions on their abelian subgroups // Bull. London Math. Soc. – 1976. – **8**. – P. 113 – 129.
23. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. – 604 с.
24. *Franciosi S., de Giovanno F., Kurdachenko L. A.* The Schur property and groups with uniform conjugace classes // J. Algebra. – 1995. – **174**. – P. 823 – 847.
25. *Kegel O. H.,Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
26. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
27. *Dixon M. R.* Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups. – Singapore: World Sci., 1994. – 253 p.
28. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. – 1971. – **10**, № 2. – С. 199 – 225.
29. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 3. – С. 81 – 126.
30. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 652 – 660.
31. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Там же. – 1968. – **20**, № 4. – С. 472 – 482.
32. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**, № 1. – P. 1 – 43.
33. *Зайцев Д. И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб. – 1969. – **78**, № 3. – С. 323 – 331.

Получено 14.10.2003,
после доработки — 06.05.2004