УДК 517.9

Р. Х. Амиров (Баку, Азербайджан)

О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

We study representations of solutions of the Dirac equation, properties of spectral data, and inverse problems of the Dirac operator on a finite interval with conditions of discontinuity inside the interval.

Вивчаються зображення розв'язків рівняння Дірака, властивості спектральних даних та обернені задачі оператора Дірака на скінченному інтервалі з умовами розриву всередині інтервалу.

1. Введение. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений Дирака

$$By' + \Omega(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

на конечном интервале. Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $p(x)$ и $q(x)$ — действительные функции из пространства $L_2(0, \pi)$.

Обозначим через L краевую задачу, порожденную уравнением (1) с граничными условиями

$$y_1(0) = 0, \tag{2}$$

$$y_1(\pi) = 0, \tag{3}$$

а также условиями разрыва во внутренней точке $x = a$ интервала $(0, \pi)$:

$$y(a-0) = Ay(a+0), \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in (0, \pi). \tag{4}$$

Здесь $\alpha > 0$ — действительное число и $\alpha \neq 1$.

Из (2) и (3) видно, что в точках $x = 0$ и $x = \pi$ граничные условия имеют специальный вид. Можно рассматривать и общие самосопряженные граничные условия, а также случай, когда в условии (4) матрица A — любая самосопряженная матрица второго порядка и $\det A = 1$.

Целью настоящей работы является исследование прямых и обратных задач спектрального анализа для краевой задачи L.

Для классических операторов Штурма – Лиувилля, Дирака, уравнения Шредингера и гиперболических уравнений прямые и обратные задачи достаточно полно изучены (см. [1 – 6] и приведенную в них библиографию). Наличие условия разрыва внутри интервала вносит качественные изменения в исследование. Некоторые аспекты прямых и обратных задач для операторов Штурма – Лиувилля и Дирака с условиями разрыва изучались в [7 – 12].

2. Представление решения. Обозначим через $Y_0(x, \lambda)$ матричное решение уравнения (1) при $\Omega(x) \equiv 0$, удовлетворяющее условию $Y_0(0, \lambda) = I$ (I — единичная матрица). Тогда $Y_0(x, \lambda)$ имеет вид

$$Y_0(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & 0 < x < a, \\ e^{-\lambda B(x-a)} A^{-1} e^{-\lambda Ba}, & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $Y(x, \lambda)$ — матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $Y(0, \lambda) = I$. Докажем, что решение $Y(x, \lambda)$ можно представить в виде

$$Y(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} K(x, t) e^{-\lambda B t} dt. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что интегральное уравнение для решения $Y(x, \lambda)$ имеет вид

$$Y(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) + \int_0^x Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) B\Omega(t) Y(t, \lambda) dt. \tag{7}$$

Для того чтобы функция вида (6) удовлетворяла уравнению (7), должно выполняться равенство

$$\int_{-x}^{x} K(x, t) e^{-\lambda B t} dt = \int_0^x Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) B\Omega(t) Y_0(t, \lambda) dt +$$
$$+ \int_0^x Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K(t, s) e^{-\lambda B s} ds\, dt, \tag{8}$$

и наоборот, если матрица-функция $K(x, t)$ удовлетворяет этому равенству, то матрица-функция $Y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (7). Преобразуем правую часть равенства (8) так, чтобы она имела вид, аналогичный левой части. Введем следующие обозначения:

$$K_{\pm}(x, t) = \frac{1}{2}[K(x, t) \pm BK(x, t)B] \qquad \big(K(x, t) = K_+(x, t) + K_-(x, t)\big).$$

Из вида матриц-функций $K_+(x, t)$ и $K_-(x, t)$ ясно, что они удовлетворяют следующим свойствам:

$$BK_+(x, t) = \frac{1}{2}[BK(x, t) - K(x, t)B] = -K_+(x, t)B,$$
$$BK_-(x, t) = \frac{1}{2}[BK(x, t) + K(x, t)B] = K_-(x, t)B.$$

Учитывая, что

$$Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda B(x-t)}, & t < x < a, \\ \alpha^+ e^{-\lambda B(x-t)} + \\ \quad + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x-t)}, & t < a < x, \\ e^{-\lambda B(x-t)}, & a < t < x, \end{cases}$$

где $\alpha^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha} \pm \alpha\right)$, и преобразуя правую часть равенства (8) для матриц-функций $K_+(x, t)$ и $K_-(x, t)$, получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$K_+(x, t) = \frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) + \int_{(x+t)/2}^{x} B\Omega(\xi) K_-(\xi, t+x-\xi) d\xi, \qquad \text{если } t < x < a,$$

$$K_-(x, t) = \int_{(x+t)/2}^{x} B\Omega(\xi) K_+(\xi, t+x-\xi) d\xi, \qquad \text{если } t < x < a,$$

$$K_+(x, t) = \frac{\alpha^+}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) + \alpha^+ \int_{(x+t)/2}^{a} B\Omega(\xi) K_-(\xi, t - \xi + x) d\xi +$$

$$+\ \alpha^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{(2a-x-t)/2}^{a} B\Omega(\xi)\,K_{+}(\xi,\ t+x+\xi-2a)\,d\xi\ +$$

$$+\int\limits_{a}^{x} B\Omega(\xi)\,K_{-}(\xi,\ t+x-\xi)\,d\xi, \qquad \text{если}\ \ x>a,\quad -x<t<2a-x,$$

$$K_{+}(x,t)\ =\ \frac{\alpha^{+}}{2}B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)+$$

$$+\int\limits_{(x+t)/2}^{x} B\Omega(\xi)\,K_{-}(\xi,\ t+x-\xi)\,d\xi, \qquad \text{если}\ \ x>a,\quad 2a-x<t<x,$$

$$K_{-}(x,t)\ =\ \alpha^{+}\int\limits_{(x+t)/2}^{a} B\Omega(\xi)\,K_{+}(\xi,\ t-\xi+x)\,d\xi\ +$$

$$+\ \alpha^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{(2a-x-t)/2}^{a} B\Omega(\xi)\,K_{-}(\xi,\ t+x+\xi-2a)\,d\xi\ +$$

$$+\int\limits_{a}^{x} B\Omega(\xi)\,K_{+}(\xi,\ t+x-\xi)\,d\xi, \qquad \text{если}\ \ x>a,\quad -x<t<x-2a,$$

$$K_{-}(x,t)\ =\ \frac{\alpha^{-}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right)+$$

$$+\ \alpha^{+}\int\limits_{(x+t)/2}^{a} B\Omega(\xi)\,K_{+}(\xi,\ t-\xi+x)\,d\xi\ +$$

$$+\ \alpha^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{(2a-x-t)/2}^{a} B\Omega(\xi)\,K_{-}(\xi,\ t+x+\xi-2a)\,d\xi\ +$$

$$+\int\limits_{a}^{x} B\Omega(\xi)\,K_{+}(\xi,\ t+x-\xi)\,d\xi, \qquad \text{если}\ \ x>a,\quad x-2a<t<2a-x,$$

$$K_{-}(x,t)\ =\ \frac{\alpha^{-}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right)+\ \frac{\alpha^{-}}{2}B\Omega\left(\frac{x+2a-t}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+$$

$$+\int\limits_{(x+t)/2}^{x} B\Omega(\xi)\,K_{+}(\xi,\ t+x-\xi)\,d\xi, \qquad \text{если}\ \ x>a,\quad 2a-x<t<x.$$

Применяя метод последовательных приближений (см. [2, 5]), получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть*

$$\int\limits_{0}^{\pi}\|\Omega(x)\|\,dx\ <\ +\infty.$$

Тогда решение $Y(x,\lambda)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию* $Y(0,\lambda)=I$, *можно представить в виде* (6), *причем евклидова норма* $\|K(x,t)\|$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{-x}^{x} \| K(x,t) \| dt \ \le \ e^{C\sigma(x)} - 1,$$

где $\sigma(x) = \int_0^x \|\Omega(t)\| dt$, C *— положительная постоянная.*

Далее, если функция $\Omega(x)$ дифференцируема, то ядро $K(x,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$BK_x + \Omega(x)K = -K_t B,$$

$$K(x,0)B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Omega(x) + BK(x,x) = K(x,x)B, \qquad \text{если } 0 < x < a,$$

$$\alpha^+\Omega(x) + BK(x,x) = K(x,x)B, \qquad \text{если } x > a,$$

$$B\left[K(x,2a-x+0) - K(x,2a-x-0)\right] =$$

$$= -\left[K(x,2a-x+0) - K(x,2a-x-0)\right]B, \qquad \text{если } x < a,$$

$$\alpha^-\,\Omega(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + B\left[K(x,2a-x+0) - K(x,2a-x-0)\right] =$$

$$= -\left[K(x,2a-x+0) - K(x,2a-x-0)\right]B, \qquad \text{если } x > a.$$

Отметим, что если $p(x) \in L_2(0,\pi)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$, то элементы матрицы-функции $K(x,t) = (K_{ij}(x,t))_{i,j=1}^2$ при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ принадлежат пространству $L_2(0,\pi)$ по переменной t.

3. Свойства спектра. В этом пункте изучаются свойства спектра задачи L. В случае $\Omega(x) \equiv 0$ задачу L обозначим через L_0. Нетрудно показать, что решение $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x,\lambda) \\ \varphi_{02}(x,\lambda) \end{pmatrix}$ уравнения $By' = \lambda y$ с начальным условием $\varphi_0(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и условиями (4) имеет вид

$$\varphi_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix}, & 0 < x < a, \\ \alpha^+\begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix} + \alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \\ \qquad \times \begin{pmatrix} \sin\lambda(2a-x) \\ -\cos\lambda(2a-x) \end{pmatrix}, & a < x < \pi. \end{cases}$$

Обозначим через $\Delta_0(\lambda)$ характеристическую функцию задачи L_0:

$$\Delta_0(\lambda) \equiv \alpha^+\sin\lambda\pi + \alpha^-\sin\lambda(2a-\pi).$$

Корни этого уравнения λ_n^0 являются собственными значениями задачи L_0. Предположим, что $\lambda_n^0 > 0$, если $n > 0$, $\lambda_n^0 = 0$ и $\lambda_{-n}^0 = -\lambda_n^0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 1. *Имеет место соотношение* $\inf\limits_{n \ne m} \left|\lambda_n^0 - \lambda_m^0\right| = \beta > 0$, *т. е. корни характеристического уравнения* $\Delta_0(\lambda) = 0$ *отделены.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть существуют подпоследовательности $\{\lambda_{n_k}^0\}$ и $\{\hat{\lambda}_{n_k}^0\}$ последовательности $\{\lambda_n^0\}$ такие, что $\lambda_{n_k}^0 \neq \hat{\lambda}_{n_k}^0$, $\lambda_{n_k}^0, \hat{\lambda}_{n_k}^0 \to \infty$ при $k \to +\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty}\left|\lambda_{n_k}^0 - \hat{\lambda}_{n_k}^0\right| = 0.$$

Используя ортогональность собственных функций $\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)$ и $\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0)$ задачи L_0 в пространстве $L_2(0, \pi; R^2)$, получаем

$$0 = \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0)} \right\rangle dx = \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)} \right\rangle dx +$$

$$+ \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\left[\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\right]} \right\rangle dx \geq$$

$$\geq \int_0^a \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)} \right\rangle dx +$$

$$+ \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\left[\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\right]} \right\rangle dx \geq$$

$$\geq \int_0^a \left(\sin^2 \lambda_{n_k}^0 x + \cos^2 \lambda_{n_k}^0 x\right) dx +$$

$$+ \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\left[\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\right]} \right\rangle dx =$$

$$= a + \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \left[\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\right] \right\rangle dx.$$

Здесь через $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве R^2.

Таким образом, получим неравенство

$$0 \geq \int_0^\pi \left\langle \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0), \overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)} \right\rangle dx + a. \tag{9}$$

Из вида решения $\varphi_0(x, \lambda)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\| \varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0) \right\|_{R^2} = 0 \qquad \left(\|\cdot\|_{R^2} = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle} \right)$$

равномерно по $x \in [0, \pi]$. Поэтому, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве (9), имеем $0 \geq a$. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Обозначим через $\Delta(\lambda)$, $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ соответственно характеристическую функцию, последовательность собственных значений и нормировочных чисел задачи L. Пусть $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и условиям (4). Тогда с помощью вектор-решений

$$F(x,\lambda) = Y(x,\lambda)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad f_0(x,\lambda) = Y_0(x,\lambda)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

можно записать

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{2i}\Big[F(x,\lambda) - \overline{F(x,\lambda)}\Big], \qquad \varphi_0(x,\lambda) = \frac{1}{2i}\Big[f_0(x,\lambda) - \overline{f_0(x,\lambda)}\Big].$$

Следовательно, используя представление (6), для решения $\varphi(x,\lambda)$ имеем

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_{-x}^{x} K(x,t)\begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix} dt.$$

Тогда для $\varphi_1(x,\lambda)$ — первой компоненты решения $\varphi(x,\lambda)$ — получаем

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_{01}(x,\lambda) + \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\sin\lambda t\,dt - \int_{-x}^{x} K_{12}(x,t)\cos\lambda t\,dt,$$

или

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_{01}(x,\lambda) + \int_{0}^{x} \tilde{K}_{11}(x,t)\sin\lambda t\,dt + \int_{0}^{x} \tilde{K}_{12}(x,t)\cos\lambda t\,dt,$$

где

$$\tilde{K}_{11}(x,t) = K_{11}(x,t) + K_{11}(x,-t),$$

$$\tilde{K}_{12}(x,t) = -K_{12}(x,t) - K_{12}(x,-t),$$

$$\tilde{K}_{11}(x,\cdot),\ \tilde{K}_{12}(x,\cdot) \in L_2(-x,x).$$

Таким образом, характеристическое уравнение задачи L будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{0}^{\pi} \tilde{K}_{11}(\pi,t)\sin\lambda t\,dt + \int_{0}^{\pi} \tilde{K}_{12}(\pi,t)\cos\lambda t\,dt = 0.$$

Лемма 2. *Собственные значения задачи* L *простые, т. е.* $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку

$$B\,\varphi'(x,\lambda) + \Omega(x)\,\varphi(x,\lambda) = \lambda\,\varphi(x,\lambda),$$

$$B\,\dot{\varphi}'(x,\lambda) + \Omega(x)\,\dot{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\,\dot{\varphi}(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda),$$

умножая скалярно в евклидовом пространстве R^2 первое уравнение на $\dot{\varphi}(x,\lambda)$, второе уравнение на $\varphi(x,\lambda)$ и вычитая из второго равенства первое, получаем

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = \langle B\dot{\varphi}',\varphi\rangle - \langle B\varphi',\dot{\varphi}\rangle.$$

Интегрируя последнее равенство на отрезке $[0,\pi]$ и учитывая, что

$$\alpha_n = \int_{0}^{\pi}\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle\,dx = \int_{0}^{\pi}\Big[\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)\Big]dx,$$

после интегрирования по частям получаем

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)\,\varphi_2(\pi, \lambda_n).$$

Отсюда следует, что $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для собственных значений задачи* L *справедливо асимптотическое равенство*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n,$$

где $\{\varepsilon_n\} \in l_2$.

Доказательство. Обозначим

$$\Gamma_n = \left\{\lambda : |\lambda| = |\lambda_n^0| + \frac{\beta}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\right\},$$

$$G_\delta = \left\{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \geq \delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\right\},$$

где δ — достаточно малое положительное число $(\delta \ll \beta/2)$. Из вида $\Delta_0(\lambda)$ и леммы 1 следует, что $\Delta_0(\lambda)$ является функцией типа „синуса”. Поэтому [13, с. 118, 119] для $\lambda \in \overline{G}_\delta$ выполняются неравенства

$$|\Delta_0(\lambda)| > C_\delta e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}, \qquad |\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)| \geq \gamma > 0.$$

С другой стороны [2] (лемма 1.3.1),

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\lambda|\pi}(\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)) =$$

$$= \lim_{|\lambda|\to\infty}\left(e^{-|\mathrm{Im}\lambda|\pi}\int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t)\sin\lambda t\,dt + e^{-|\mathrm{Im}\lambda|\pi}\int_0^\pi \tilde{K}_{12}(\pi, t)\cos\lambda t\,dt\right) = 0,$$

т. е. при достаточно больших n для $\lambda \in \Gamma_n$ выполняется неравенство

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| < \frac{C_\delta}{2} e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}.$$

Значит, для $\lambda \in \Gamma_n$, где n — достаточно большое натуральное число, имеем

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi} > \frac{C_\delta}{2} e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi} > |\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)|.$$

Тогда, используя теорему Руше, получаем, что внутри контура Γ_n при достаточно большом n функции $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda) + \{\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\} = \Delta(\lambda)$ имеют одинаковое число нулей, т. е. $2n + 1$ нулей: $\lambda_{-n}, \ldots, \lambda_0, \ldots, \lambda_n$. Аналогично, используя теорему Руше, можно доказать, что при достаточно больших n в каждом круге $|\lambda - \lambda_n^0| < \delta$ имеется ровно один нуль функции $\Delta(\lambda)$. Поскольку δ — любое достаточно малое число, можно записать $\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, а так как числа λ_n являются корнями характеристической функции $\Delta(\lambda)$, то

$$\Delta(\lambda_n) = \Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n) + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)t\,dt +$$

$$+ \int_0^\pi \tilde{K}_{12}(\pi, t)\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)t\,dt = 0.$$

С другой стороны,

$$\Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n) = \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)[1 + o(1)]\varepsilon_n.$$

Поэтому для определения поведения ε_n получим

$$\varepsilon_n \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)[1 + o(1)] + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)t\,dt +$$

$$+ \int_0^\pi \tilde{K}_{12}(\pi, t)\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)t\,dt = 0. \qquad (10)$$

Далее, следуя результатам работ [14, 15], имеем

$$\lambda_n^0 = n + h_n, \quad \sup|h_n| \le \mu.$$

Поэтому [2, с. 67]

$$\left\{\int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)t\,dt\right\} \in l_2, \quad \left\{\int_0^\pi \tilde{K}_{12}(\pi, t)\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)t\,dt\right\} \in l_2.$$

Следовательно, из (10) получаем, что $\{\varepsilon_n\} \in l_2$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для нормировочных чисел задачи L справедливо асимптотическое равенство*

$$\alpha_n = \alpha_n^0 + \delta_n,$$

где $\{\delta_n\} \in l_2$.

Доказательство. В силу леммы 3 из представлений $\Delta(\lambda)$ и $\varphi_2(\pi, \lambda)$ нетрудно получить следующие соотношения:

$$\dot{\Delta}_0(\lambda_n) = \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) + O(\varepsilon_n),$$

$$\varphi_2(\pi, \lambda_n) = \varphi_{2,0}(\pi, \lambda_n^0) + \tilde{\delta}_n, \quad \{\tilde{\delta}_n\} \in l_2.$$

Поэтому

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2(\pi, \lambda_n) = -\left[\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) + O(\varepsilon_n)\right]\left[\varphi_{2,0}(\pi, \lambda_n^0) + \tilde{\delta}_n\right] = \alpha_n^0 + \delta_n,$$

где

$$\delta_n = -\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\tilde{\delta}_n + O(\varepsilon_n)\varphi_{2,0}(\pi, \lambda_n^0) + O(\varepsilon_n)\tilde{\delta}_n.$$

Очевидно, что $\{\delta_n\} \in l_2$.

Лемма доказана.

4. Решение Вейля. Функция Вейля. Пусть вектор-функция $\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix}\Phi_1(x,\lambda)\\ \Phi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям $\Phi_1(0, \lambda) = 1$, $\Phi_1(\pi, \lambda) = 0$, а также условиям склейки (4). Функцию $\Phi(x, \lambda)$ будем называть решением Вейля для краевой задачи L.

Обозначим через $\psi(x, \lambda) = \begin{pmatrix}\psi_1(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ и $C(x, \lambda) = \begin{pmatrix}C_1(x,\lambda)\\ C_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $\psi(\pi,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и условиям склейки (4). Ясно, что функции $\psi(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Тогда функцию $\psi(x,\lambda)$ можно представить в виде

$$\psi(x,\lambda) = -\psi_2(0,\lambda)\,\varphi(x,\lambda) - \Delta(\lambda)\,C(x,\lambda).$$

Обозначим

$$M(\lambda) = +\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad \left(-\frac{\psi_2(0,\lambda)}{\psi_1(0,\lambda)}\right). \tag{11}$$

Ясно, что

$$\Phi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + M(\lambda)\,\varphi(x,\lambda). \tag{12}$$

Функцию $-\Phi_2(0,\lambda) = M(\lambda)$ будем называть функцией Вейля для задачи L. Решение Вейля и функция Вейля являются мероморфными по λ функциями с полюсами на спектре задачи L. Из (11) и (12) следует

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Справедливо представление*

$$M(\lambda) = \frac{1}{\alpha_0(\lambda-\lambda_0)} + \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} \left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} + \frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right\}. \tag{14}$$

Доказательство. Аналогично представлению решения $\varphi(x,\lambda)$ нетрудно получить представление для решения $\psi(x,\lambda)$:

$$\psi(x,\lambda) = \psi_0(x,\lambda) + \int\limits_{-(\pi-x)}^{\pi-x} N(x,t)\begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \psi_0(x,\lambda) + \int\limits_0^{\pi-x} \tilde N(x,t)\begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix} dt, \tag{15}$$

где элементы $\tilde N_{ij}(x,t)$ матрицы-функции $\tilde N(x,t) = \left\{\tilde N_{ij}(x,t)\right\}_{i,j=1}^2$ при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ принадлежат пространству $L_2(0,\pi)$ по переменной t,

$$\psi_0(x,\lambda) = \begin{cases} -\alpha^+\begin{pmatrix} \sin\lambda(\pi-x) \\ \cos\lambda(\pi-x) \end{pmatrix} - \alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \\ \qquad \times \begin{pmatrix} \sin\lambda(x-2a+\pi) \\ \cos\lambda(x-2a+\pi) \end{pmatrix}, & 0 < x < a, \\ \qquad -\begin{pmatrix} \sin\lambda(\pi-x) \\ \cos\lambda(\pi-x) \end{pmatrix}, & a < x < \pi. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$M_0(\lambda) = -\frac{\psi_{20}(0,\lambda)}{\psi_{10}(0,\lambda)} = \frac{-\alpha^+\cos\lambda\pi + \alpha^-\cos\lambda(\pi-2a)}{\alpha^+\sin\lambda\pi + \alpha^-\sin\lambda(\pi-2a)},$$

$$f_i(\lambda) = \int_0^\pi \{\tilde{N}_{i1}(0,t)\sin\lambda t - \tilde{N}_{i2}(0,t)\cos\lambda t\}\,dt, \qquad i=1,2. \tag{16}$$

Тогда из (15) имеем

$$\psi_i(0,\lambda) = \psi_{i,0}(0,\lambda) + f_i(\lambda).$$

Поскольку $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\lambda|\pi}\left|f_i(\lambda)\right| = 0$, $\left|\Delta(\lambda)\right| > C_\delta e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}$ при $\lambda\in G_\delta$, из равенства

$$M(\lambda) - M_0(\lambda) = \frac{f_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{f_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}M_0(\lambda)$$

следует

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\sup_{\lambda\in G_\delta}\left|M(\lambda) - M_0(\lambda)\right| = 0. \tag{17}$$

Далее, вектор-функции $\varphi(x,\lambda_n)$ $(\varphi_0(x,\lambda_n^0))$ и $\psi(x,\lambda_n)$ $(\psi_0(x,\lambda_n^0))$ являются собственными функциями задачи L (L_0). Поэтому существуют константы β_n (β_n^0) такие, что

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n) \quad \left(\psi_0(x,\lambda_n^0) = \beta_n^0\varphi_0(x,\lambda_n^0)\right).$$

Отсюда получаем

$$\beta_n = -\psi_2(0,\lambda_n) = -\frac{1}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)}, \qquad \beta_n^0 = -\varphi_{2,0}(0,\lambda_n^0) = -\frac{1}{\varphi_{2,0}(\pi,\lambda_n^0)}.$$

Используя равенства $\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n)$, $\alpha_n^0 = -\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varphi_{2,0}(\pi,\lambda_n^0)$, имеем

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = \frac{\psi_2(0,\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)} = -\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n)} = \frac{1}{\alpha_n},$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n^0} M_0(\lambda) = \frac{1}{\alpha_n^0}. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим контурный интеграл

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M(\mu) - M_0(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu, \qquad \lambda\in\operatorname{int}\Gamma_n.$$

В силу (17) имеем $\lim_{n\to\infty} I_n(\lambda) = 0$. С другой стороны, согласно теореме о вычетах из (18) имеем

$$I_n(\lambda) = -M(\lambda) + M_0(\lambda) + \sum_{\lambda_n\in\operatorname{int}\Gamma}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} - \sum_{\lambda_n^0\in\operatorname{int}\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda-\lambda_n^0)}.$$

Отсюда при $n\to\infty$

$$M(\lambda) = M_0(\lambda) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} - \frac{1}{\alpha_n^0(\lambda-\lambda_n^0)}\right\}.$$

Из вида (16) функции $M_0(\lambda)$ следует

$$M_0(\lambda) = \frac{1}{\alpha_0\lambda} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n^0}\left\{\frac{1}{\lambda-\lambda_n^0} + \frac{1}{\lambda_n^0}\right\}.$$

Сравнивая два последних равенства, получаем

$$M(\lambda) = \frac{1}{\alpha_0(\lambda-\lambda_0)} + \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty} \left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} + \frac{1}{\alpha_n^0}\frac{1}{\lambda_n^0}\right\}.$$

5. Обратная задача. В этом пункте исследуются обратные задачи восстановления краевой задачи L по заданным функции Вейля и дискретным спектральным данным. Эти обратные задачи являются обобщениями известных обратных задач для системы Дирака (см. [5, 6]).

Наряду с L рассмотрим краевую задачу $\tilde{L}$ того же вида, но с потенциалом $\tilde{\Omega}(x)$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче L, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать объект, относящийся к задаче $\tilde{L}$.

Теорема 3. *Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет краевую задачу L.*

Доказательство. Введем матрицу $P(x,\lambda) = [P_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1,2}$ по формуле

$$P(x,\lambda)\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Используя тот факт, что вронскиан решений $\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ и $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$

$$W\left\{\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\Phi}(x,\lambda)\right\} \equiv \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) = 1,$$

находим

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= \varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) - \Phi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda), \\ P_{12}(x,\lambda) &= \Phi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda), \\ P_{21}(x,\lambda) &= \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) - \Phi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda), \\ P_{22}(x,\lambda) &= \Phi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda); \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda), \\ \varphi_2(x,\lambda) &= P_{21}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) + P_{22}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda), \\ \Phi_1(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda), \\ \Phi_2(x,\lambda) &= P_{21}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + P_{22}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda). \end{aligned} \tag{20}$$

Из (19), (12) и (18) следует

$$P_{11}(x,\lambda) = 1 + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\big(\varphi_1(x,\lambda)\big(\tilde{\psi}_2(x,\lambda) - \psi_2(x,\lambda)\big) -$$

$$- \psi_1(x,\lambda)\big(\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\big)\big),$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\big(\psi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\tilde{\psi}_1(x,\lambda)\big),$$

$$P_{21}(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\big(\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\psi}_2(x,\lambda) - \psi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\big),$$

$$P_{22}(x,\lambda) = 1 + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\big(\psi_2(x,\lambda)\big(\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\big) -$$

$$- \varphi_2(x,\lambda)\big(\tilde{\psi}_1(x,\lambda) - \psi_1(x,\lambda)\big)\big).$$

Из представлений решений $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ ясно, что

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\le x\le\pi} \left|P_{11}(x,\lambda) - 1\right| = \lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\le x\le\pi} \left|P_{22}(x,\lambda) - 1\right| =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\le x\le\pi} \left|P_{12}(x,\lambda)\right| = \lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\le x\le\pi} \left|P_{21}(x,\lambda)\right| = 0. \tag{21}$$

Согласно (12) и (20) имеем

$$P_{11}(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda)\tilde{C}_2(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) +$$

$$+ (\tilde{M}(\lambda) - M(\lambda))\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda),$$

$$P_{12}(x,\lambda) = C_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\tilde{C}_1(x,\lambda) +$$

$$+ (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda),$$

$$P_{21}(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda)\tilde{C}_2(x,\lambda) - C_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) +$$

$$+ (\tilde{M}(\lambda) - M(\lambda))\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda),$$

$$P_{22}(x,\lambda) = C_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \tilde{C}_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda) +$$

$$+ (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda).$$

Таким образом, если $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$, то при каждом фиксированном x функции $P_{ij}(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Вместе с (21) $P_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{22}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{21}(x,\lambda) \equiv 0$. Подставляя их в (20), находим $\varphi_1(x,\lambda) \equiv \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda) \equiv \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)$, $\Phi_1(x,\lambda) \equiv \tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$, $\Phi_2(x,\lambda) \equiv \tilde{\Phi}_2(x,\lambda)$ при всех x и λ, и, следовательно, $L \equiv \tilde{L}$.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь обратную задачу восстановления L по дискретным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Из формулы (14) для функции Вейля и теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ *при всех* $n \in Z$, *то* $L \equiv \tilde{L}$. *Таким образом, задание спектральных данных однозначно определяет задачу* L.

Автор выражает благодарность И. М. Гусейнову за внимание к работе и критические замечания.

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 329 с.
3. *Березанский Ю. М.* Теорема единственности в обратной спектральной задаче для уравнения Шредингера // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – **7**. – С. 3 – 51.
4. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1977. – 329 с.
5. *Гасымов М. Г.* Обратная задача теории рассеяния для систем Дирака порядка $2n$ // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1968. – **19**. – С. 41 – 112.
6. *Гасымов М. Г., Джабиев Т. Т.* Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам // Тр. школы-семинара по спектральной теории операторов и представлению теории групп. – Баку: Элм, 1975. – С. 46 – 71.
7. *Гусейнов И. М.* О представлении решений Йоста системы дифференциальных уравнений Дирака с разрывными коэффициентами // Изв. АН АзССР. – 1999. – № 5. – С. 41 – 45.
8. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1984. – **37**. – P. 539 – 577.
9. *Shepelsky D.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions // Spectral Operator Theory and Related Topics: Adv. in Sov. Math. – Providence: Amer. Math. Soc., 1994. – **19**. – P. 209 – 232.
10. *Kobayashi M.* A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm – Liouville problems with symmetric potentials // Inverse Problems. – 1989. – **5**, № 5. – P. 767 – 781.
11. *Амиров Р. Х., Юрко В. А.* О дифференциальных операторах с особенностью и условиями разрыва внутри интервала // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1443 – 1458.
12. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary-value problems // Int. Trans. and Spec. Funct. – 2000. – **10**, № 2. – P. 141 – 164.
13. *Левин Б. Я.* Целые функции. – М.:Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 125 с.
14. *Жданович В. Ф.* Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов // Докл. АН СССР. – 1960. – **135**, № 8. – С. 1046 – 1049.
15. *Крейн М. Г., Левин Б. Я.* Докл. АН СССР. – 1949. – **64**, № 3.

Получено 29.01.2004