УДК 517.9

М. Л. Горбачук, Я. І. Грушка, С. М. Торба
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРЯМІ Й ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ В ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ МЕТОДОМ РІТЦА*

For an arbitrary self-adjoint operator B in the Hilbert space $\mathfrak{H}$, we give direct and inverse theorems that establish relations between the degree of smoothness of a vector $x \in \mathfrak{H}$ with respect to the operator B, the order of tending to zero of the best approximation of this vector by exponential-type entire vectors of operator B, and k-module of continuity of x with respect to B. The results obtained are used in finding a priori estimates of the Rietz approximation of solutions of operator equations in the Hilbert space.

Для довільного самоспряженого оператора B у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ наведено прямі й обернені теореми, що встановлюють зв'язок між степенем гладкості вектора $x \in \mathfrak{H}$ відносно оператора B, порядком прямування до нуля його найкращого наближення цілими векторами експоненціального типу оператора B і k-модулем неперервності вектора x щодо оператора B. Результати застосовано до знаходження апріорних оцінок наближених за Рітцом розв'язків операторних рівнянь у гільбертовому просторі.

В теорії наближень періодичних функцій добре відомі прямі й обернені теореми, що встановлюють зв'язок між степенем гладкості функції відносно оператора диференціювання і порядком прямування до нуля її найкращого наближення тригонометричними поліномами.

Мета цієї роботи — довести подібні теореми у випадку наближення вектора, гладкого для самоспряженого оператора у гільбертовому просторі, цілими векторами експоненціального типу цього оператора і застосувати ці теореми до знаходження апріорних оцінок наближення за Рітцом розв'язків операторного рівняння.

1. Нехай B — замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(B)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ над полем комплексних чисел.

Позначимо через $C^{\infty}(B)$ множину всіх нескінченно диференційовних векторів оператора B:

$$C^{\infty}(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(B^n), \quad \text{де} \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для числа $\alpha > 0$ покладемо

$$\mathfrak{E}^{\alpha}(B) = \left\{ x \in C^{\infty}(B) \,\middle|\, \exists\, c = c(x) > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \left\| B^k x \right\| \leq c\alpha^k \right\}.$$

Множина $\mathfrak{E}^{\alpha}(B)$ є банаховим простором щодо норми

$$\| x \|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(B)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\left\| B^n x \right\|}{\alpha^n}.$$

Тоді $\mathfrak{E}(B) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{E}^{\alpha}(B)$ — лінійний локально-опуклий простір відносно топології індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{E}^{\alpha}(B)$:

$$\mathfrak{E}(B) = \lim_{\alpha \to \infty} \operatorname{ind} \mathfrak{E}^{\alpha}(B).$$

Елементи простору $\mathfrak{E}(B)$ називаються цілими векторами експоненціального

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 01.07/027) та CRDF (проект UM1-2567-OD-03).

типу оператора B. Під типом $\sigma(x, B)$ вектора $x \in \mathfrak{E}(B)$ розумітимемо число

$$\sigma(x, B) = \inf\left\{\alpha > 0\colon x \in \mathfrak{E}^{\alpha}(B)\right\} = \limsup_{n\to\infty} \left\| B^n x \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

Скрізь у подальшому оператор B самоспряжений в $\mathfrak{H}$, а $E(\Delta)$ — його спектральна міра.

Нехай $G(\lambda)$ — майже скрізь скінченна вимірна функція на $\mathbb{R}$. Під функцією $G(B)$ від оператора B будемо розуміти

$$G(B) := \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Як показано в [1], для будь-якого $\alpha > 0$ $\mathfrak{E}^{\alpha}(B) = E([-\alpha, \alpha])\mathfrak{H}$.

Згідно з [2] покладемо

$$\omega_k(t, x, B) = \sup_{0\le\tau\le t} \left\| \Delta_\tau^k x \right\|, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де

$$\Delta_h^k = (U(h) - \mathbb{I})^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j U(jh), \tag{2}$$

$$k \in \mathbb{N}_0, \quad h \in \mathbb{R} \quad \left(\Delta_h^0 \equiv 1, \quad h \in \mathbb{R}_+\right),$$

а $U(h) = \exp(ihB)$ — група унітарних операторів в $\mathfrak{H}$ з генератором iB [3].

З визначення $\omega_k(t, x, B)$ безпосередньо випливає, що при $k \in \mathbb{N}$:

1) $\omega_k(0, x, B) = 0$;

2) при фіксованому x функція $\omega_k(t, x, B)$ не спадає на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;

3) $\omega_k(\alpha t, x, B) \le (1+\alpha)^k \omega_k(t, x, B)$, $\alpha, t > 0$;

4) при фіксованому $t \in \mathbb{R}_+$ функція $\omega_k(t, x, B)$ неперервна по x.

Далі буде встановлено нерівність типу Бернштейна – Нікольського.

Лема 1. *Нехай* $G(\lambda)$ *— невід'ємна парна функція на* $\mathbb{R}$, *неспадна на* $\mathbb{R}_+$, $x \in \mathfrak{E}(B)$ *і* $\sigma(x, B) \le \alpha$. *Тоді*

$$\left\| \Delta_h^k G(B) x \right\| \le h^k \alpha^k G(\alpha) \| x \|, \quad h > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Доведення. Оскільки $\sigma(x, B) \le \alpha$ і $\left|1 - e^{i\lambda h}\right|^{2k} = 4^2 \sin^{2k} \dfrac{\lambda h}{2} \le \lambda^{2k} h^{2k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то на основі операційного числення для оператора B маємо

$$\left\| \Delta_h^k G(B) x \right\|^2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \left(1 - e^{i\lambda h}\right)^k \right|^2 G^2(\lambda)\, d\left(E_\lambda x, x\right) \le$$

$$\le h^{2k} \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda^{2k} G^2(\lambda)\, d\left(E_\lambda x, x\right) \le h^{2k} \alpha^{2k} G^2(\alpha) \| x \|^2. \tag{4}$$

Лему доведено.

При $k = 0$ з леми 1 одержуємо

$$\| G(B) x \| \le G(\alpha) \| x \|. \tag{5}$$

Наслідок 1. *За умов леми* 1 *стосовно* x *та* $\sigma(x, B)$

$$\left\| \Delta_h^k x \right\| \le h^k \alpha^k \| x \|, \quad h \ge 0.$$

Для доведення досить в лемі 1 взяти $G(\lambda) \equiv 1, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Якщо $\mathfrak{H} = L_2([0, 2\pi]), \ (Bx)(t) = i x'(t), \ \mathcal{D}(B) = \{ x(\cdot) \in W_2^1([0, 2\pi]) \colon x(0) = x(2\pi) \}$, де $W_2^1([0, 2\pi])$ — простір Соболєва, то $\mathfrak{E}(B)$ збігається з множиною усіх тригонометричних многочленів, $\sigma(x, B)$ — степінь многочлена x, $\mathfrak{E}^{\alpha}(B)$ — множина всіх тригонометричних многочленів, степені яких не перевищують α, $(U(h)x)(t) = \tilde{x}(t + h)$, $\omega_k(t, x, B)$ — k-й модуль неперервності функції $x(t)$, а нерівність (3) при $G(\lambda) = \left| \lambda^m \right|, \ k = 0$ перетворюється на нерівність типу С. Бернштейна у просторі $L_2([0, 2\pi])$ [4] (тут під $\tilde{x}(t)$ розуміється 2π-періодичне продовження функції $x(t)$).

Для довільного $x \in \mathfrak{H}$ покладемо, дотримуючись [5, 6],

$$\mathcal{E}_r(x, B) = \inf_{y \in \mathfrak{E}(B) \colon \sigma(y, B) \le r} \| x - y \|, \quad r > 0,$$

тобто $\mathcal{E}_r(x, B)$ — найкраще наближення елемента x цілими векторами y експоненціального типу оператора B, для яких $\sigma(y, B) \le r$. При фіксованому x $\mathcal{E}_r(x, B)$ не зростає і $\mathcal{E}_r(x, B) \to 0, \ r \to \infty$. Зрозуміло, що

$$\mathcal{E}_r(x, B) = \| x - E([-r, r]) x \| = \| x - F([0, r]) x \|,$$

де $F(\Delta)$ — спектральна міра оператора $|B| = \sqrt{B^* B}$.

Теорема 1. *Нехай* $G(\lambda)$ *задовольняє умови леми* 1. *Тоді для довільного* $x \in \mathcal{D}(G(B))$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{E}_r(x, B) \le \frac{\sqrt{k+1}}{2^k G(r)} \omega_k\left(\frac{\pi}{r}, G(B)x, B \right), \quad r > 0. \tag{6}$$

Доведення. Використовуючи спектральне зображення для оператора B і монотонність функції $G(\lambda)$, одержуємо

$$\omega_k^2(t, G(B)x, B) = \sup_{0 \le \tau \le t} \left\| \left(e^{i\tau B} - \mathbb{I} \right)^k G(B) x \right\|^2 \ge \left\| \left(e^{itB} - \mathbb{I} \right)^k G(B) x \right\|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\lambda t} - 1 \right|^{2k} G^2(\lambda) \, d\left(E_\lambda x, x \right) = 2^k \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \lambda t)^k G^2(\lambda) \, d\left(E_\lambda x, x \right) \ge$$

$$\ge 2^k G^2(r) \int_{|\lambda| \ge r} (1 - \cos \lambda t)^k \, d\left(E_\lambda x, x \right).$$

Зафіксуємо $r > 0$ і візьмемо $t \in \left[0, \frac{\pi}{r} \right]$. Тоді $\sin rt \ge 0$. Помножимо обидві частини одержаної вище нерівності на $\sin rt$ і проінтегруємо по t від 0 до $\frac{\pi}{r}$. Тоді

$$\int_0^{\pi/r} \omega_k^2(t, G(B)x, B) \sin rt \, dt \ge 2^k G^2(r) \int_0^{\pi/r} \int_{|\lambda| \ge r} (1 - \cos \lambda t)^k \sin rt \, d\left(E_\lambda x, x \right) dt =$$

$$= 2^k G^2(r) \int_{|\lambda| \ge r} \left(\int_0^{\pi/r} (1 - \cos \lambda t)^k \sin rt \, dt \right) d\left(E_\lambda x, x \right). \tag{7}$$

Оскільки функція $\omega_k^2(t, G(B)x, B)$ є монотонно неспадною, то

$$\int\limits_0^{\pi/r} \omega_k^2(t, G(B)x, B)\sin rt\,dt \;\leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\pi/r} \omega_k^2\left(\frac{\pi}{r}, G(B)x, B\right)\sin rt\,dt \;=\; \frac{2}{r}\omega_k^2\left(\frac{\pi}{r}, G(B)x, B\right). \tag{8}$$

Використовуючи нерівність

$$\int\limits_0^{\pi} (1-\cos\theta t)^k \sin t\,dt \;\geq\; \frac{2^{k+1}}{k+1}, \qquad \theta \geq 1, \quad k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

(див. [7]), на основі (7) і (8) приходимо до співвідношення

$$\frac{2}{r}\omega_k^2\left(\frac{\pi}{r}, G(B)x, B\right) \;\geq\; 2^k G^2(r) \int\limits_{|\lambda|\geq r} \left(\frac{1}{r}\frac{2^{k+1}}{k+1}\right) d\left(E_\lambda x, x\right) \;=$$

$$= \;\frac{2^{2k+1}G^2(r)}{r(k+1)}\,\mathcal{E}_r^2(x, B), \tag{10}$$

рівносильного (6).

Теорему доведено.

При $G(\lambda) = |\lambda|^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m > 0$ з теореми 1 одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $x \in \mathcal{D}\left(|B|^m\right)$, $m > 0$. *Тоді для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_r(x, B) \;\leq\; \frac{\sqrt{k+1}}{2^k r^m}\,\omega_k\left(\frac{\pi}{r}, |B|^m x, B\right), \quad r > 0. \tag{11}$$

У випадку, коли B — оператор диференціювання з періодичними крайовими умовами у просторі $\mathfrak{H} = L_2([0, 2\pi])$, тобто $(Bx)(t) = ix'(t)$, $\mathcal{D}(B) = \{x(\cdot) \in W_2^1([0, 2\pi]) \colon x(0) = x(2\pi)\}$, нерівність (11) для $k = 1$ наведено в [8], а для довільного $k \in \mathbb{N}$ — в роботі [7].

Сформулюємо тепер обернену теорему у випадку наближення вектора x цілими векторами експоненціального типу оператора B.

Теорема 2. *Нехай* $\omega(t)$ — *функція типу модуля неперервності така, що:*

1) $\omega(t)$ — *неперервна і неспадна при* $t \in \mathbb{R}_+$;
2) $\omega(0) = 0$;
3) $\exists\, c > 0 \;\; \forall\, t > 0 \;\; \omega(2t) \leq c\,\omega(t)$;
4) $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty$.

Нехай також функція $G(\lambda)$ *є парною, невід'ємною і неспадною при* $\lambda \geq 0$, *причому* $\sup\limits_{\lambda>0}\frac{G(2\lambda)}{G(\lambda)} < \infty$.

Якщо для $x \in \mathfrak{H}$ *існує* $m > 0$ *таке, що*

$$\mathcal{E}_r(x, B) \;<\; \frac{m}{G(r)}\,\omega\left(\frac{1}{r}\right), \quad r > 0, \tag{12}$$

то $x \in \mathcal{D}(G(B))$ *і для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *існує стала* $m_k > 0$ *така, що*

$$\omega_k(t, G(B)x, B) \;\leq\; m_k\left[t^k \int\limits_t^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau + \int\limits_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau}\,d\tau\right], \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Доведемо спочатку таке твердження.

Лема 2. *Нехай функція* $\omega(t)$ *задовольняє умови* 1 – 3 *теореми* 2. *Якщо для* $x \in \mathfrak{H}$ *існує* $m > 0$ *таке, що*

$$\mathcal{E}_r(x, B) < m\omega\left(\frac{1}{r}\right), \quad r > 0, \tag{14}$$

то для кожного $k \in \mathbb{N}$ *існує стала* $c_k > 0$ *така, що*

$$\omega_k(t, x, B) \le c_k t^k \int_t^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau, \quad 0 < t \le \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Доведення. З умови (14) випливає існування послідовності $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ цілих векторів експоненціального типу таких, що $\sigma(u_i, B) \le 2^i$, а

$$\| x - u_i \| \le m\omega\left(\frac{1}{2^i}\right). \tag{16}$$

Візьмемо довільне $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ і виберемо число N так, щоб $\frac{1}{2^{N+1}} < h \le \frac{1}{2^N}$. Із нерівності (16) одержуємо

$$\left\| u_j - u_{j-1} \right\| \le \left\| u_j - x \right\| + \left\| x - u_{j-1} \right\| \le$$

$$\le m\omega\left(\frac{1}{2^j}\right) + m\omega\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) \le 2m\omega\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) \le 2cm\omega\left(\frac{1}{2^j}\right). \tag{17}$$

В силу монотонності $\omega(t)$ маємо

$$2^k \int_{1/2^j}^{1/2^{j-1}} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}} du \ge 2^k \omega\left(\frac{1}{2^j}\right) \int_{1/2^j}^{1/2^{j-1}} \frac{1}{u^{k+1}} du =$$

$$= \frac{2^{kj}}{k} \omega\left(\frac{1}{2^j}\right)(2^k - 1) \ge 2^{kj} \omega\left(\frac{1}{2^j}\right). \tag{18}$$

Оскільки $\sigma\left(u_j - u_{j-1}, B\right) \le 2^j$ і $\sigma(u_0, B) \le 1$, то за наслідком 1

$$\left\| \Delta_h^k u_0 \right\| \le h^k \| u_0 \|,$$

$$\left\| \Delta_h^k \left(u_j - u_{j-1}\right) \right\| \le h^k \cdot (2^j)^k \left\| u_j - u_{j-1} \right\|, \quad j \ge 1.$$

Формули (16) – (18) зумовлюють нерівності

$$\left\| \Delta_h^k \left(u_j - u_{j-1}\right) \right\| \le 2cmh^k \cdot 2^{kj} \omega\left(\frac{1}{2^j}\right) \le 2^{k+1} cmh^k \int_{1/2^j}^{1/2^{j-1}} \frac{\omega(u)}{h^{k+1}} du$$

та

$$\left\| \Delta_h^k (x - u_N) \right\| \le \left(\left\| e^{ihB} \right\| + 1 \right)^k \| x - u_N \| \le 2^k \| x - u_N \| \le 2^k m\omega\left(\frac{1}{2^N}\right),$$

використовуючи які, приходимо до співвідношень

$$\left\| \Delta_h^k x \right\| = \left\| \Delta_h^k u_0 + \sum_{j=1}^{N} \Delta_h^k (u_j - u_{j-1}) + \Delta_h^k (x - u_N) \right\| \le$$

$$\le h^k \| u_0 \| + 2^{k+1} cmh^k \sum_{j=1}^{N} \int_{1/2^j}^{1/2^{j-1}} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}} du + 2^k m\omega\left(\frac{1}{2^N}\right) \le$$

$$\leq\ h^k \| u_0 \| + 2^{k+1} cmh^k \int\limits_{1/2^N}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\, du + 2^k m\omega(h) \ \leq$$

$$\leq h^k \| u_0 \| + 2^{k+1} cmh^k \int\limits_{h}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\, du + 2^k cm\omega(h) \ =$$

$$= \ h^k \left(\| u_0 \| + 2^{k+1} cmh^k \int\limits_{h}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\, du + 2^k cm \frac{k}{1-h^k} \int\limits_{h}^{1} \frac{\omega(h)}{u^{k+1}}\, du \right) \ \leq$$

$$\leq\ c_k h^k \int\limits_{h}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\, du,$$

де

$$c_k \ = \ \max\left(\frac{\| u_0 \|}{\int_{1/2}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{k+1}} du},\ 2^k cm \frac{k}{1-\frac{1}{2^k}} \right).$$

Лему доведено.

***Зауваження* 1.** Як видно з доведення, лема є вірною за дещо слабкішої умови, ніж вимагається в теоремі, а саме: достатньо, щоб для елемента $x \in \mathfrak{H}$ існувала хоча б одна послідовність $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ така, що

$$\sigma(u_j, B) \ \leq \ 2^j \quad \text{і} \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \qquad \| x - u_j \| \ \leq \ m\omega\left(\frac{1}{2^j}\right).$$

***Доведення теореми* 2.** Завдяки (12) існує послідовність $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ така, що $\sigma(u_n, B) \leq 2^n$ і

$$\| x - u_n \| \ \leq \ \frac{m}{G(2^n)} \omega\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{19}$$

З нерівності (19) та умов 1, 2 теореми випливає, що $\| x - u_n \| \to 0,\ n \to \infty,$ а тому вектор x можна подати у вигляді

$$x \ = \ u_0 \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}).$$

Оскільки $\sigma\big(u_k - u_{k-1}, B\big) \leq 2^k,\ \ k \in \mathbb{N},$ то, беручи до уваги (5), одержуємо

$$\big\| G(B)u_k - G(B)u_{k-1} \big\| \ \leq \ G(2^k) \big\| u_k - u_{k-1} \big\| \ \leq$$

$$\leq\ G(2^k)\big(\| x - u_k \| + \| x - u_{k-1} \| \big) \ \leq \ G(2^k) \left(\frac{m}{G(2^k)} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) + \frac{m}{G(2^{k-1})} \omega\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) \right) \ \leq$$

$$\leq\ \frac{2G(2^k)m}{G(2^{k-1})} \omega\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) \ \leq \ 2cc_1 m\omega\left(\frac{1}{2^k}\right) \ \leq \ \frac{2cc_1 m}{\ln 2} \int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \frac{\omega(u)}{u}\, du,$$

де через c_1 позначено $\sup\limits_{\lambda > 0} \dfrac{G(2\lambda)}{G(\lambda)}$. Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \big(G(B)u_k - G(B)u_{k-1} \big)$ збігається. Замкненість оператора $G(B)$ зумовлює включення $x \in \mathcal{D}(G(B))$ і рівність

$$G(B)x \;=\; G(B)u_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\Big(G(B)u_k - G(B)u_{k-1}\Big).$$

Звідси випливає

$$\left\| G(B)x - G(B)u_j \right\| \;\le\; \sum_{k=j+1}^{\infty}\left\| G(B)u_k - G(B)u_{k-1}\right\| \;\le$$

$$\le\; \frac{2cc_1 m}{\ln 2}\sum_{k=j+1}^{\infty}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}}\frac{\omega(u)}{u}\,du \;=\; \frac{2cc_1 m}{\ln 2}\int_{0}^{2^{-j}}\frac{\omega(u)}{u}\,du \;=:\; \tilde c\,\Omega\big(2^{-j}\big), \quad j\in\mathbb{N},$$

де $\tilde c := \dfrac{2cc_1 m}{\ln 2}$, а

$$\Omega(t) \;:=\; \int_0^t \frac{\omega(u)}{u}\,du.$$

Неважко переконатись, що функція $\Omega(t)$ має такі властивості:

1) $\Omega(t)$ є неперервною і монотонно неспадною;

2) $\Omega(0) = 0$;

3) при $t > 0$

$$\Omega(2t) \;=\; \int_0^{2t}\frac{\omega(u)}{u}\,du \;=\; \int_0^{t}\frac{\omega(2u)}{u}\,du \;\le\; c_2\int_0^{t}\frac{\omega(u)}{u}\,du \;=\; c_2\,\Omega(t).$$

Тому, поклавши в лемі 2 $\omega(t) = \Omega(t)$ і врахувавши зауваження 1, одержимо

$$\omega_k(t, G(B)x, B) \;\le\; c_k\,t^k\int_t^1\frac{\Omega(u)}{u^{k+1}}\,du \;=$$

$$=\; \frac{c_k\,t^k}{k}\left(\Omega(u)\,\frac{1}{u^k}\Bigg|_1^t + \int_t^1\frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\,du\right) \;\le\; m_k\left(t^k\int_t^1\frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\,du + \int_0^t\frac{\omega(u)}{u}\,du\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 2 показує, що у випадку, коли $\omega(t) = t^{\alpha}$, $t \ge 0$, $\alpha > 0$, і $\mathcal{E}_r(x, B) = O\!\left(\dfrac{1}{r^{\alpha}}\right)$,

$$\omega_k(t, x, B) \;=\; \begin{cases} O(t^k) & \text{при } k < \alpha, \\ O\big(t^k\,|\ln t|\big) & \text{при } k = \alpha, \\ O(t^{\alpha}) & \text{при } k > \alpha. \end{cases}$$

2. Розглянемо рівняння

$$Ax \;=\; y, \tag{20}$$

де A — додатно визначений самоспряжений оператор з дискретним спектром, $y \in \mathfrak{H}$, $x \in \mathcal{D}(A)$ — шуканий розв'язок рівняння (20). Через $\mathfrak{H}_+$ позначимо поповнення множини $\mathcal{D}(A)$ за нормою $\|\cdot\|_+$, породженою скалярним добутком

$$(x, y)_+ \;=\; (Ax, y).$$

За умов на оператор A, зазначених вище, рівняння (20) має єдиний розв'язок $x \in \mathcal{D}(A)$ і, згідно з принципом Діріхле [9], знаходження цього розв'язку еквівалентне відшуканню вектора $u \in \mathcal{D}(A)$, на якому функціонал

$$F(z) = (Az, z) - 2\,\mathrm{Re}(y, z),$$

заданий на $\mathcal{D}(A)$, досягає свого мінімуму.

Нехай $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — повна лінійно незалежна система векторів із $\mathcal{D}(A)$ (так звана координатна система) і

$$\mathcal{H}_n = \text{л. о.}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

Позначимо через x_n вектор, на якому $F(z)$ набуває мінімального значення на $\mathcal{H}_n$. Вектор x_n називається наближеним за Рітцом розв'язком рівняння (20). Як відомо, незалежно від вибору координатної системи послідовність x_n збігається до x у просторі $\mathfrak{H}_+$ (а тим паче, і в $\mathfrak{H}$). Що стосується нев'язки $R_n = \|Ax_n - y\|$, то вона не завжди прямує до нуля в $\mathfrak{H}$. Але якщо координатну систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ вибрати так, щоб вона утворювала ортонормований власний базис якого-небудь самоспряженого додатно визначеного оператора B, спорідненого з A в тому розумінні, що $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, то $R_n \to 0$, $n \to \infty$ (див. [9]), а тому й величини $r_n = \|x_n - x\|_+$ прямують до нуля при $n \to \infty$. Проте дослідження поведінки на нескінченності цих величин, що залежать від вибору $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ і правої частини рівняння (20), виявилось досить важкою задачею, не розв'язаною й понині. Деякі окремі результати для операторів, породжених крайовими задачами для звичайних диференціальних рівнянь, було одержано в численних роботах багатьох авторів (див. огляд [10]). Що ж стосується абстрактного випадку, то деякі частинні ситуації розглянуто в [11]. У роботі [6] уперше отримано прямі й обернені теореми за умови, що $x \in C^{\infty}(B)$, а також дано оцінки величини R_n, якщо гладкість вектора x є скінченною, тобто $x \in \mathcal{D}(B^k)$. Нижче для $x \in \mathcal{D}(B^k)$ повністю характеризується величина r_n.

Надалі припускатимемо, що виконуються такі умови:

1°. Оператор A є самоспряженим додатно визначеним.

2°. Координатною системою в методі Рітца є ортонормований базис самоспряженого додатно визначеного оператора B з дискретним і простим спектром $(Be_k = \lambda_k e_k)$, спорідненого з A.

Позначимо через x_n наближений за Рітцом розв'язок рівняння (20) відносно координатної системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ і покладемо $\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$. Оскільки оператори A і B додатно визначені і самоспряжені і $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, то з нерівності Гайнца [12] випливає, що для довільного $\alpha \in (0,1)$ $\mathcal{D}(A^{\alpha}) = \mathcal{D}(B^{\alpha})$, а отже, оператори $B^{1/2}A^{-1/2}$, $A^{1/2}B^{-1/2}$ визначені й обмежені на всьому просторі $\mathfrak{H}$ і для довільного $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\mathbf{c}_1^{-1}|||x|||_+ \le \|x\|_+ \le \mathbf{c}_2|||x|||_+, \tag{21}$$

де $|||x|||_+ = \left\|B^{1/2}x\right\|$, $\mathbf{c}_1 = \left\|B^{1/2}A^{-1/2}\right\|$, $\mathbf{c}_2 = \left\|A^{1/2}B^{-1/2}\right\|$.

Лема 3. *Для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$ *і* $x \in \mathcal{D}(B)$ *справджується нерівність*

$$|||x - \tilde{x}_n|||_+ \le |||x - x_n|||_+ \le \mathbf{c}_3|||x - \tilde{x}_n|||_+, \tag{22}$$

де $\mathbf{c}_3 = \left\|B^{1/2}A^{-1/2}\right\|\left\|A^{1/2}B^{-1/2}\right\|$.

Доведення. Оскільки $B^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(B^{1/2}x, e_k\right)e_k$, то

$$|||x - \tilde{x}_n|||_+ = \left\| B^{1/2}\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right) \right\| =$$

$$= \left\| B^{1/2}x - \sum_{k=1}^{n} \left(B^{1/2}x, e_k \right) e_k \right\| \le \left\| B^{1/2}x - B^{1/2}x_n \right\| = |||x - x_n|||_+.$$

Беручи до уваги, що наближення за Рітцом x_n є найкращим наближенням вектора x у нормі $\|\cdot\|_+$, маємо

$$|||x - x_n|||_+ = \left\| B^{1/2}(x - x_n) \right\| \le$$

$$\le \left\| B^{1/2}A^{-1/2} \right\| \left\| A^{1/2}(x - x_n) \right\| = \mathbf{c}_1 \| x - x_n \|_+ \le \mathbf{c}_1 \| x - \tilde{x}_n \|_+ =$$

$$= \mathbf{c}_1 \left\| A^{1/2}(x - \tilde{x}_n) \right\| \le \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \left\| B^{1/2}(x - \tilde{x}_n) \right\| = \mathbf{c}_3 |||x - \tilde{x}_n|||_+.$$

Лему доведено.

Враховуючи, що

$$\mathscr{E}_{\lambda_n}\left(B^{1/2}x, B \right) = |||x - \tilde{x}_n|||_+$$

і

$$\mathscr{E}_{\lambda_n}\left(B^{1/2}x, B \right) = \mathscr{E}_{\lambda_n + \eta}\left(B^{1/2}x, B \right), \quad 0 < \eta < \lambda_{n+1} - \lambda_n,$$

нерівності (21), (22) і теорему 1 з $G(\lambda) = |\lambda|^{\alpha - 1/2}$, $\alpha \ge 1$, приходимо до наступного твердження.

Теорема 3. *Якщо* $x \in \mathcal{D}(B^{\alpha})$, $\alpha \ge 1$, *то для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$

$$\| x - x_n \|_+ \le \mathbf{c}_0 \frac{\sqrt{k+1}}{2^k \lambda_{n+1}^{\alpha - 1/2}} \omega_k \left(\frac{\pi}{\lambda_{n+1}}, B^{\alpha}x, B \right),$$

де $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_2$ *і* $\mathbf{c}_3$ — *сталі, що фігурують в нерівностях* (21), (22).

Оскільки при $x \in \mathcal{D}(B^{\alpha})$

$$\omega_k \left(\frac{\pi}{\lambda_{n+1}}, B^{\alpha}x, B \right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

то для $x \in \mathcal{D}(B^{\alpha})$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{n+1}^{\alpha - 1/2} \| x - x_n \|_+ = 0. \tag{23}$$

Наведемо приклади операторів A і B, для яких рівність (23) при $\alpha > 1$ не зумовлює включення $x \in \mathcal{D}(B^{\alpha})$. Покладемо $\mathfrak{H} = L_2([0, \pi])$, $A = B = -\dfrac{d^2}{dt^2}$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = \{ x(\cdot) \in W_2^2([0, \pi]) \colon x(0) = x(\pi) = 0 \}$, $\lambda_k(B) = k^2$, $e_k = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin kt$, $x = x(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{\infty} x_k \sin kt$, де $x_k = \dfrac{1}{k^{2\alpha + 1/2} \ln^{1/2} k}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Рівність

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{4\alpha}}{k^{4\alpha + 1} \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = \infty$$

показує, що $x \notin \mathcal{D}(B^{\alpha})$. Але оскільки

$$\| x - x_n \|_+^2 = \| x - \tilde{x}_n \|_+^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^{4\alpha+1} \ln k} \le$$

$$\le \frac{1}{\ln(n+1)} \int_n^{\infty} \frac{1}{t^{4\alpha-1}} dt = \frac{1}{(4\alpha - 2) n^{4\alpha-2} \ln(n+1)},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{\alpha-1/2}(B) \| x - x_n \|_+ \le \lim_{n\to\infty} n^{2\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{4\alpha - 2}} \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)} n^{2\alpha-1}} = 0.$$

Проте, як випливає з теореми 3, нерівності (21) і леми 3, вірною є така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\omega(t)$ *задовольняє умови теореми* 2. *Якщо для* $x \in \mathcal{D}(B)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$ *виконується нерівність*

$$\| x - x_n \|_+ \le c \lambda_{n+1}^{-(\alpha-1/2)} \omega\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} \right),$$

де $c \equiv \text{const}$, *то* $x \in \mathcal{D}(B^{\alpha})$.

Зазначимо, що на основі нерівності (21), $\| \cdot \|_+$ в теоремах 3 і 4 можна замінити на $||| \cdot |||_+$.

З цієї ж теореми безпосередньо випливає такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *Нехай для* $x \in \mathcal{D}(B)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$\| x - x_n \|_+ \le c \lambda_{n+1}^{-(\alpha+\varepsilon-1/2)}.$$

Тоді $x \in \mathcal{D}(B^{\alpha})$.

***Зауваження* 2.** Якщо за наближений за Рітцом розв'язок рівняння (20) взяти вектор x_n, на якому функціонал $F(z)$ досягає свого мінімуму на $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_{\lambda_1} \oplus \mathfrak{H}_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_{\lambda_n}$, де $\mathfrak{H}_{\lambda_j}$ — власний підпростір оператора B, що відповідає власному числу λ_j, то у припущенні 2° можна відкинути умову простоти спектра.

3. Покладемо $\mathfrak{H} = L_2([0, \pi])$, $\mathcal{D}(A) = \{ x(\cdot) \in W_2^2([0, \pi]) \colon x'(0) = x'(\pi) = 0 \}$,

$$(Ax)(t) = -x''(t) + q(t)x(t), \qquad q(t) > 0, \quad q(\cdot) \in C([0, \pi]).$$

Оператор B визначимо таким чином:

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A), \qquad (Bx)(t) = -x''(t) + x(t).$$

Оператори A і B є самоспряженими й додатно визначеними в $L_2([0, \pi])$. Спектр B складається з власних значень $\lambda_k(B) = k^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, яким відповідають власні функції $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kt)$, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2([0, \pi])$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ і $g(\cdot) \in C^{2k}([0, 2\pi])$. Неважко переконатися, що $\mathcal{D}(A^{k+1}) = \mathcal{D}(B^{k+1})$ тоді і тільки тоді, коли $g^{(2j+1)}(0) = g^{(2j+1)}(\pi) = 0$, $j = 0, \ldots, k$. Якщо $y(\cdot) \in C^{2(k-1)}([0, 2\pi])$ і $y^{(2j+1)}(0) = y^{(2j+1)}(\pi) = 0$, то $y(t) \in \mathcal{D}(A^k)$, а тому розв'язок задачі

$$-x''(t) + g(t)x(t) = y(t), \tag{24}$$

$$x'(0) = x'(\pi) = 0, \tag{25}$$

належить до множини $\mathcal{D}(A^{k+1}) = \mathcal{D}(B^{k+1})$ і із співвідношення (23) безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 5. *Якщо* $g(\cdot) \in C^{2k}([0, 2\pi])$, $g^{(2j+1)}(0) = g^{(2j+1)}(\pi) = 0, j = 0, \ldots, k$, *а* $y(\cdot) \in C^{2(k-1)}([0, 2\pi])$, $y^{(2j+1)}(0) = y^{(2j+1)}(\pi) = 0$, $j = 0, \ldots, k-1$, *то для наближеного за Рітцом розв'язку задачі* (24), (25) *виконується співвідношення*

$$\| x_n - x \|_{W_2^2([0,\pi])} = o\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right).$$

1. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596 – 607.
2. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 118 – 178.
3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 320 с.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории относительности. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
5. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* Пространства бесконечно дифференцируемых векторов замкнутого оператора и их применение к вопросам аппроксимации // Успехи мат. наук. – 1993. – **48**, вып. 4. – С. 180.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, вып. 6. – С. 90 – 108.
7. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
8. *Черных Н. И.* О неравенствах Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
10. *Лучка А. Ю., Лучка Г. Ф.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики. – Киев: Наук. думка, 1970. – 340 с.
11. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости приближенного метода Ритца // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, № 4. – С. 654 – 663.
12. *Бирман М. Ш., Соломьяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264 с.
13. *Радыно Я. В.* Пространства векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 215 – 229.

Одержано 09.02.2005